UNIVERSAL GRAPH SERIES, CHROMATIC FUNCTIONS, AND THEIR INDEX THEORY

三枝崎剛

Abstract. この原稿は 2024 年 12 月 16 日に行われた，RIMS 共同研究（公開型）「有限群論，代数的組合せ論，頂点代数の研究」における講演の報告である．論文は arXiv に同じタイトルで掲載済（arXiv: 2403.09985）で，宗政昭弘先生（東北大学），西村優作先生（早稲田大学），佐久間雅先生（山形大学），辻栄周平先生（北海道教育大学）との共同研究である．

講演では普遍グラフ族という概念を定義し，これを用いてグラフの 4 つ不変量を導入し，その性質を議論した．特にそのうちの一つは Stanley による彩色対称関数の一般化となっており，グラフの完全不変量であることを示した．これらについて概説する．

1. 導入

1.1. **彩色対称関数.** $G=(V_G,E_G), H=(V_H,E_H)$ を単純グラフ，写像 $\varphi: V_G \to V_H$ を G から H への準同型とする．つまり

$$\{u,v\}\in E_G \Rightarrow \{\varphi(u),\varphi(v)\}\in E_H.$$

G から H への準同型がなす集合を $\mathrm{Hom}(G,H)$ と書く．

定義 1.1. 有限単純グラフ G に対して，$\chi(G,n)=\sharp\mathrm{Hom}(G,K_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ を満たす多項式 $\chi(G,t)\in\mathbb{Z}[t]$ が存在する．これを G の彩色多項式という．これはグラフの不変量である．

例 1.2. $\mathcal{T}_m$ を m 頂点の木の集合とする．このとき任意の $T\in\mathcal{T}_m$ に対して $\chi(T,n)=n(n-1)^{m-1}$ となる．したがって彩色多項式は木を区別しない．

論文 [8] にて，Stanley は次の彩色対称関数を導入した．

定義 1.3 ([8])**.**

$$X(G,x):=\sum_{\varphi\in\mathrm{Hom}(G,K_{\mathbb{N}})}\prod_{v\in V_G}x_{\varphi(v)}$$

Date: December 24, 2024.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary:05E05, 05C15; Secondary:05C31, 05C63, 05C60, 05C09, 05A19.

Key words and phrases. Universal graphs, symmetric functions.

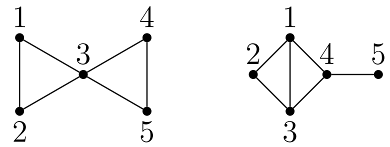


Figure 1. Graphs G_1 and G_2

を G の彩色対称関数という．ただし，$K_{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}$ を頂点集合とする完全グラフである．

例えば，K_2 を 2 頂点完全グラフとする．このとき

$$X(K_2) = \sum_{i<j} 2x_i x_j.$$

ここで

$$\mathbf{1}^n := (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots)$$

に対し，

$$X(G, \mathbf{1}^n) = \chi(G, n)$$

を得る．したがって彩色対称関数は彩色多項式よりも強い不変量である．実際，Stanley により次が予想されている．

予想 1.4 ([8]). 木全体の集合を $\mathcal{T}$ とする．任意の $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ に対して，もし $X(T_1, x) = X(T_2, x)$ であれば，T_1 と T_2 は同型である．

Stanley の予想は彩色対称関数が $\mathcal{T}$ の完全不変量であることを主張する．しかしグラフ全体の集合を $\mathcal{G}$ としたとき，$\mathcal{G}$ の完全不変量ではない．実際，Stanley は次の例を与えた [8]．図 1 の $G_1 = (V, E_1)$ と $G_2 = (V, E_2)$ は明らかに非同型だが，

$$X(G_1) = X(G_2).$$

したがって次の問題を得る．すなわち

問題 1.5. 彩色対称関数の一般化で，グラフ全体の完全不変量となるものは存在するか．

この講演ではそのようなものの一例を与える．

我々は，Rado は普遍グラフという概念を参考にし [7]，普遍グラフ族という概念を導入した [6]．この概念を使ってグラフの 4 つの不変量を導入し，[6] にて基本的な性質を議論した．その紹介が本講演の目標である．

最初に Rado の普遍グラフを紹介しよう [7]：

定義 1.6 ([7])**.** G を無限グラフとする．このとき全ての有限単純グラフを G は誘導部分グラフとして含むとき，G を普遍グラフと呼ぶ.

普遍グラフ族はこの概念を一般化したものである.

定義 1.7. $N \subset \mathbb{N}$ とし，$\{H_n\}_{n\in N}$ をグラフの族とする．全ての有限単純グラフ G に対して，ある $n \in N$ が存在して，G は H_n の誘導部グラフとなっているとき，$\{H_n\}_{n\in N}$ を普遍グラフ族と呼ぶ.
さらに普遍グラフ族 $\{H_n\}_{n\in N}$ が次の性質を満たすとする：全ての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m \le n$ のとき，H_m が H_n の誘導部分グラフとなる，このとき普遍グラフ族 $\{H_n\}_{n\in N}$ は誘導普遍グラフ族と呼ぶ.

例えば，Kneser グラフの族 $\{K_{\mathbb{N},k}\}_{k=1}^{\infty}$ は誘導普遍グラフ族であり [5]，Paley グラフの族 $\{P(q)\}_{q\in\mathcal{P}}$ は普遍グラフ族である [1, 2, 4]．ここで $\mathcal{P}$ は $q \equiv 1 \pmod 4$ を満たすすべての素数べき q の集合である.
我々の不変量の定義のため，H-彩色関数を導入しよう：

定義 1.8. x_u $(u \in V(H))$ を不定元とし，H-彩色関数 $X_H(G)$ を次で定義する：

$$X_H(G) := X_H(G, x) := \sum_{\varphi\in \mathrm{Hom}(G,H)} \prod_{v\in V(G)} x_{\varphi(v)}.$$

次が [6] の最初の結果である．与えられた普遍グラフ族 $\{H_n\}_{n\in N}$ に対して，次の 4 つのグラフ不変量を導入した [6]：

定義 1.9. $H = \{H_n\}_{n\in N}$ を普遍グラフ族，G を有限単純グラフとする．$\mathcal{G}$ を全ての有限単純グラフからなる集合とする.

(1) G の普遍 H-彩色関数を次で定義する：

$$\{X_{H_n}(G)\}_{n\in N}.$$

(2) グラフの族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ に対して，H-関数指数 $I_H(\mathcal{A})$ を次で定義する：

$$I_H(\mathcal{A}) = \min\{t \in N \mid \{X_{H_n}(\bullet)\}_{n=1}^{t} \text{は } \mathcal{A} \text{ の完全不変量}\}.$$

(3) H-誘導指数 $i_H(G)$ を次で定義する：

$$i_H(G) = \min\{n \in N \mid G \text{ は } H_n \text{ の誘導部分グラフ}\}.$$

(4) H-指数 $\widetilde{i}_H(G)$ を次で定義する：

$$\widetilde{i}_H(G) = \min\{n \in N \mid G \text{ は } H_n \text{ の部分グラフ}\}.$$

注意 1.10. $H = \{H_n\}_{n\in N}$ を誘導普遍グラフ族とする．このとき全ての $m, n \in N$ に対して，$m \le n$ ならば $X_{H_n}(\bullet)$ は $X_{H_m}(\bullet)$ より強い不変量である．つまり任意の $G, G' \in \mathcal{G}$ に対して，$X_{H_n}(G) = X_{H_n}(G')$ ならば $X_{H_m}(G) = X_{H_m}(G')$ が成立する．例えば $\{K_{\mathbb{N},k}\}_{k=1}^{\infty}$ は誘導普遍グラフ族であった．したがって $X_{K_{\mathbb{N},k+1}}(\bullet)$ は $X_{K_{\mathbb{N},k}}(\bullet)$ より強い不変量である.

本講演の主結果を紹介しよう．もし普遍グラフ族が存在するなら，それに応じてグラフの完全不変量を構成できる：

定理 1.11. *(1)* H を普遍グラフとする。このとき

$$X_H(\bullet)$$

は有限単純グラフの完全不変量である．

(2) $H = \{H_n\}_{n\in N}$ を普遍グラフ族とする．このとき

$$\{X_{H_n}(\bullet)\}_{n\in N}$$

は有限単純グラフの完全不変量である．

例えば $\{K_{\mathbb{N},k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ Kneser グラフ族とする．このとき

$$\{X_{K_{\mathbb{N},k}}(\bullet)\}_{k=1}^{\infty}$$

はグラフの完全不変量である．$K_{\mathbb{N},1} = K_{\mathbb{N}}$ に注意すると，$X_{K_{\mathbb{N},1}}(\bullet)$ は彩色対称関数 $X(\bullet)$ であることに注意されたい．したがって，この不変量は Stanley の彩色対称関数の一般化である．

次の定理は，いくつかのグラフに対して，Paley（誘導）指数の上からの評価を与える．q を $q \equiv 1 \pmod 4$ を満たす素数べきとし，$P(q)$ をサイズ q の Paley グラフとする．K_{k_1,k_2} を完全 2 部グラフとし，それぞれの部集合のサイズは k_1 と k_2 とする．C_k と P_k は，それぞれサイズ k のサイクルとパスとする．

定理 1.12. q を奇数の素数べきとする．

(1) $P = \{P((q^2)^{3^n})\}_{n=1}^{\infty}$ は，誘導普遍グラフ族である．

(2) $\mathcal{A}_k$ を高々k 頂点の全ての単純グラフの集合とする．このとき次が成立する：

$$I_P(\mathcal{A}_k) \le \lceil \log_3 \log_q((k-1)2^{k-2})\rceil.$$

(3) k_1 と k_2 を $q^{3^{m-1}} - 1 \le k_1 \le k_2 \le q^{3^m} - 1$ を満たす整数とする．

(a) 次でグラフの族を定義する：

$$\mathcal{H} = \{K_{k_1,k_2}, C_{2k_1}, P_{k_1+k_2-1}\}$$

このとき任意の $G \in \mathcal{H}$ に対して，次が成立する：

$$i_P(G) \le \left\lceil \log_3 \log_q((q^{3^m} - 2)\binom{q^{3^m}-1}{\frac{q^{3^m}-1}{2}} + 1)\right\rceil.$$

(b) 次が成立する：

$$\begin{aligned} &i_P(C_{2k_1+1}) \\ &\le \left\lceil \log_3 \log_q\left(\left((2q^{3^m} - 3)\binom{q^{3^m}-1}{\frac{q^{3^m}-1}{2}} - q^{3^m} + 2\right)2^{q^{3^m}-1}\right)\right\rceil. \end{aligned}$$

(4) 任意の整数 k に対して，次が成立する：

$$\widetilde{i}_P(C_k) = \widetilde{i}_P(P_k) = \left\lceil \log_3 \frac{1}{2}(\log_q k) \right\rceil.$$

[8, Theorem 2.5] にて，Stanley はべき和対称関数からなる基底を用いて，$X(\bullet)$ を展開する公式を与えた．最後の主結果はこの公式の $\{X_{K_{\mathbb{N},k}}(\bullet)\}_{k=1}^{\infty}$ への一般化である．(未定義の記号（$\mathcal{A}_S^{(k)}$ と p_λ）はセクション 3 を参照のこと.)：

定理 1.13. 次が成立する：

$$X_{K_{\mathbb{N},k}}(G) = \sum_{S \subset E(G)} (-1)^{|S|} \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_S^{(k)}} p_\lambda.$$

以上が [6] の内容である．以降のセクションでは，より詳しく内容を見ていこう．セクション 2 では，定理 1.11 の証明を行う．セクション 3 では定理 1.13 の解説を行う．定理 1.12 に関する議論は割愛する．詳しくは [6] を参照されたい．最後にセクション 4 にて，いくつかの未解決問題を紹介する．

2. 定理 1.11 の証明

定理 1.11 の証明のため，次の補題を引用しよう：

補題 2.1 ([3, p.128 Excercise 11])**.** G_1 と G_2 を有限グラフとする．全ての有限グラフ F に対して，$|\operatorname{Hom}(G_1, F)| = |\operatorname{Hom}(G_2, F)|$ が成立するなら，G_1 と G_2 は同型である．

定理 *1.11* の証明. . (1) の証明を与えよう．(2) も同様に証明できる．

$X_H(G_1) = X_H(G_2)$ と仮定する．F を有限グラフとしよう．H は普遍グラフだから，F は H の誘導部分グラフになっている．このとき，$w \in V(F)$ か否かに応じて，次のように変数に値を代入する：$x_w = 1$ または 0．すると $|\operatorname{Hom}(G_1, F)| = |\operatorname{Hom}(G_2, F)|$ を得る．補題 2.1 を用いて G_1 と G_2 は同型になることがわかる． □

3. $X_{K_{\mathbb{N},k}}(G, x)$ のべき和展開

このセクションでは定理 1.13 の証明を与える．Kneser グラフ $\operatorname{Aut}(K_{\mathbb{N},k})$ の自己同型群は対称群 $S_{\mathbb{N}}$ と同型で，$X_{K_{\mathbb{N},k}}(G)$ は $S_{\mathbb{N}}$ の自然な作用で不変である．$\mathrm{Sym}^{(k)}$ を $R_{K_{\mathbb{N},k}}^{S_{\mathbb{N}}}$ の部分環，有限次数からなるものとする．$X_{K_{\mathbb{N},k}}(G)$ は次数が $|V(G)|$ の斉次だから，$X_{K_{\mathbb{N},k}}(G)$ は $\mathrm{Sym}^{(k)}$ に属す．$\mathrm{Sym}^{(1)}$ は対称関数環で，$X_{K_{\mathbb{N},1}}(G)$ は G の彩色対称関数であることに注意しよう．

$\{I_1,\ldots,I_n\}$ と $\{J_1,\ldots,J_n\}$ を $\binom{\mathbb{N}}{k}$ の元からなる，2 つの多重集合とする．同値関係 $\{I_1,\ldots,I_n\}\sim\{J_1,\ldots,J_n\}$ を，ある $\sigma\in S_{\mathbb{N}}$ が存在して，次を満たすときとして定義しよう：

$$\{I_1,\ldots,I_n\}=\{\sigma(J_1),\ldots,\sigma(J_n)\}.$$

ただし等号は多重集合で考える．

定義 3.1. $\mathcal{P}_n^{(k)}$ を上で定義した多重集合の同値類からなる集合とする．また $\mathcal{P}^{(k)}\coloneqq\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n^{(k)}$ と定義する．

$\lambda\in\mathcal{P}_n^{(k)}$ とし，$\{I_1,\ldots,I_n\}$ を λ の代表元とする．すると λ は k-一様なハイパー多重グラフとみなすことができる．ここで頂点集合は $V_\lambda=I_1\cup\cdots\cup I_n$，辺の多重集合は $E_\lambda=\{I_1,\ldots,I_n\}$ である．このハイパーグラフの同型類は代表元 $\{I_1,\ldots,I_n\}$ の選び方に依存しないことに注意されたい．また全ての n,k に対して，$\mathcal{P}_n^{(k)}$ は有限集合である．

例えば $k=1$ のとき，グラフ λ は 1-一様ハイパー多重グラフである．この場合 λ は λ のハイパーエッジからなる整数の分割と同一視される．こうして $\mathcal{P}^{(1)}$ は整数の分割の集合となる．$k=2$ のとき，λ は 2-一様ハイパー多重グラフとなる．したがって $\mathcal{P}^{(2)}$ はループや孤立点のない多重グラフの集合となる．

$\lambda\in\mathcal{P}^{(k)}$ と仮定しよう．単項 k-重対称関数 $m_\lambda=m_\lambda^{(k)}\in\mathrm{Sym}^{(k)}$ を次で定義しよう：

$$m_\lambda\coloneqq\sum_{\{I_1,\ldots,I_n\}\in\lambda}x_{I_1}\cdots x_{I_n}.$$

$\mathrm{Sym}^{(k)}$ の全ての斉次部分は有限次元であり，集合 $\{m_\lambda\}_\lambda$ は $\mathrm{Sym}^{(k)}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底となる．

$\lambda\in\mathcal{P}^{(k)}$ がハイパー多重グラフとして連結のとき，$\lambda\in\mathcal{P}^{(k)}$ を連結と呼ぼう．ハイパー多重グラフ λ は $\lambda=\lambda_1\sqcup\cdots\sqcup\lambda_\ell$ の非交和に，通常の方法で分解される．するとべき和 k-重対称関数 $p_\lambda=p_\lambda^{(k)}\in\mathrm{Sym}^{(k)}$ を以下のように定義できる：

$$p_\lambda\coloneqq m_{\lambda_1}\cdots m_{\lambda_\ell}.$$

$k=1$ のとき，p_λ は通常のべき和対称関数であることに注意されたい．

命題 3.2. 集合 $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}^{(k)}}$ は $\mathrm{Sym}^{(k)}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底をなす．特に $\mathrm{Sym}^{(k)}$ は $\mathbb{C}$-代数として，$\left\{\, p_\lambda\in\mathcal{P}^{(k)}\;\middle|\;\lambda\text{は連結}\,\right\}$ で自由に生成される．

定義 3.3. G を n 頂点の連結グラフとする．$\lambda\in\mathcal{P}_n^{(k)}$ が G-admissible とは，全単射 $\varphi\colon V(G)\to E_\lambda$ が存在して，$\{u,v\}\in E(G)$ ならば $\varphi(u)\cap\varphi(v)\neq\emptyset$ を満たすものである．$\mathcal{A}_G^{(k)}$ を $\mathcal{P}_n^{(k)}$ の元で，G-admissible なもの全体とする．

G が非連結，$G=G_1\sqcup\cdots\sqcup G_\ell$ を連結成分への分解のとき，次のように定義する：$\mathcal{A}_G^{(k)}\coloneqq\mathcal{A}_{G_1}^{(k)}\times\cdots\times\mathcal{A}_{G_\ell}^{(k)}$.

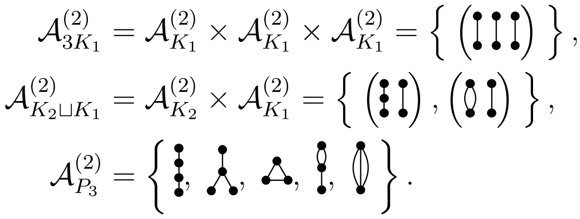
定理 3.4 (定理 1.13（再掲）). 次が成立する：

$$X_{K_{\mathbb{N},k}}(G) = \sum_{S\subset E(G)} (-1)^{|S|} \sum_{\lambda\in\mathcal{A}_S^{(k)}} p_\lambda,$$

ここで $\mathcal{A}_S^{(k)}$ は次を意味し $\mathcal{A}_{G_S}^{(k)}$，G_S は G の辺集合 S で生成される全域部分グラフである.

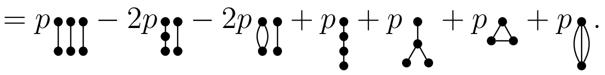
例 3.5. $G = P_3$，$k = 2$ とする．G の全域部分グラフは，次のどれかと同型である：$3K_1, K_2 \sqcup K_1, P_3$．したがって次を得る：

$$\mathcal{A}^{(2)}_{3K_1} = \mathcal{A}^{(2)}_{K_1} \times \mathcal{A}^{(2)}_{K_1} \times \mathcal{A}^{(2)}_{K_1} = \{\ \},$$
$$\mathcal{A}^{(2)}_{K_2\sqcup K_1} = \mathcal{A}^{(2)}_{K_2} \times \mathcal{A}^{(2)}_{K_1} = \{\ ,\ \},$$
$$\mathcal{A}^{(2)}_{P_3} = \{\ ,\ ,\ ,\ ,\ \}.$$



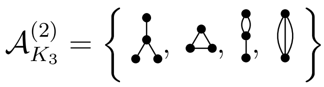
以上より，次の展開公式を得る：

$$X_{K_{\mathbb{N},2}}(P_3) = \sum_{\lambda\in\mathcal{A}^{(2)}_{3K_1}} p_\lambda - 2\sum_{\lambda\in\mathcal{A}^{(2)}_{K_2\sqcup K_1}} p_\lambda + \sum_{\lambda\in\mathcal{A}^{(2)}_{P_3}} p_\lambda$$
$$= p - 2p - 2p + p + p + p + p.$$



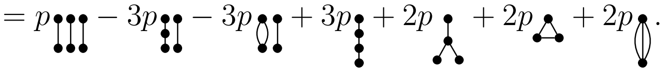
例 3.6. $G = K_3$，$k = 2$ とする．G の全域部分グラフは，次のどれかと同型である：$3K_1, K_2 \sqcup K_1, P_3, K_3$．次に注意して，

$$\mathcal{A}^{(2)}_{K_3} = \{\ ,\ ,\ ,\ \}$$



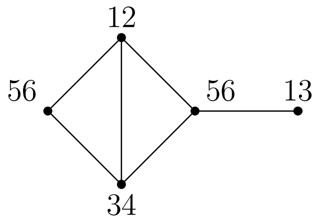
以下の展開公式を得る：

$$X_{K_{\mathbb{N},2}}(K_3) = \sum_{\lambda\in\mathcal{A}^{(2)}_{3K_1}} p_\lambda - 3\sum_{\lambda\in\mathcal{A}^{(2)}_{K_2\sqcup K_1}} p_\lambda + 3\sum_{\lambda\in\mathcal{A}^{(2)}_{P_3}} p_\lambda - \sum_{\lambda\in\mathcal{A}^{(2)}_{K_3}} p_\lambda$$
$$= p - 3p - 3p + 3p + 2p + 2p + 2p.$$



4. 関連する問題について

注意 4.1. $X_{K_{\mathbb{N},2}}(\bullet)$ は図 1 の G_1 と G_2 を区別する．実際，G_2 から $K_{\mathbb{N},2}$ への準同型写像は次のように存在する：



一方で，G_1 から $K_{\mathbb{N},2}$ への準同型写像で，像が $\{12, 13, 34, 56, 56\}$ からなるものは存在しない．

問題：非同型グラフのペア G_1，G_2 で $X_{K_{\mathbb{N},2}}(G_1) = X_{K_{\mathbb{N},2}}(G_2)$ となるものは存在するか？

注意 4.2. $\mathcal{T}$ を木全体の集合とし，$I_K(\mathcal{T})$ を $\mathcal{T}$ の Kneser-関数指数とする．Stanley の予想 1.4 は $I_K(\mathcal{T}) = 1$ を意味する．

問題：$I_K(\mathcal{T})$ を上から評価することは可能か？

References

[1] A. Blass, G. Exoo, and F. Harary, Paley graphs satisfy all first-order adjacency axioms, *J. Graph Theory* **5** (1981), no. 4, 435–439.
[2] B. Bollobás and A. Thomason, Graphs which contain all small graphs, *European J. Combin.* **2** (1981), no. 1, 13–15.
[3] C.D. Godsil and G. Royle, *Algebraic graph theory*, Graduate texts in mathematics, no. 207, Springer, New York, 2001.
[4] R.L. Graham and J.H. Spencer, A constructive solution to a tournament problem, *Canad. Math. Bull.* **14** (1971), 45–48.
[5] P. Hamburger, A. Por, and M. Walsh, Kneser representations of graphs. *SIAM J. Discrete Math.* **23** (2009), no. 2, 1071–1081.
[6] T. Miezaki, A. Munemasa, Y. Nishimura, T. Sakuma, and S. Tsujie, Universal graph series, chromatic functions, and their index theory, submitted.
[7] R. Rado, Universal graphs and universal functions, *Acta Arith.* **9** (1964), 331–340.
[8] R.P. Stanley, A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph, *Adv. Math.* **111** (1995), no. 1, 166–194.

早稲田大学基幹理工学部
Email address: miezaki@waseda.jp