On new proper Jordan schemes related to quaternion and octonion algebras

兵庫教育大学　吉川昌慶　　信州大学　花木章秀
Masayoshi Yoshikawa　　Akihide Hanaki
Hyogo University of Teacher Education　　Shinshu University

本稿では，新しい proper ジョルダン・スキームとその隣接ジョルダン代数の構造を紹介する．詳細については，現在準備中の論文 [3] を参照してほしい．

1　ジョルダン・スキーム

X を有限集合とし，$M_X(\mathbb{C})$ を X で添え字づけられた複素行列全体とする．I, J をそれぞれ，単位行列，すべての成分が 1 の行列とする．必要に応じて，添え字によって，これらの行列の次数を表すことにする．

$S = \{A_0 = I, A_1, \ldots, A_d\} \subset M_X(\mathbb{C})$ を以下の条件を満たす $\{0,1\}$-行列の集合とする．

(1) $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$.

(2) 任意の $i \in \{0,1,\ldots,d\}$ に対して，${}^tA_i = A_{i^*}$ となる $i^* \in \{0,1,\ldots,d\}$ が存在する．

(3) 任意の $i, j \in \{0,1,\ldots,d\}$ に対して，A_iA_j が S で張られる空間に含まれる．

このとき，(X,S) を**アソシエーション・スキーム**という．単に，S はアソシエーション・スキームであるということもある．S のすべての元が対称行列であるとき，S は**対称アソシエーション・スキーム**であるという．また，任意の $i, j \in \{0,1,\ldots,d\}$ に対して，$A_iA_j = A_jA_i$ を満たすとき，S は**可換アソシエーション・スキーム**であるという．

[1] において，Cameron は**ジョルダン・スキーム**の概念を紹介した．彼は対称アソシエーション・スキームの定義の条件 (3) における通常の行列の積を次のようなジョルダン積に替えたものをジョルダン・スキームの定義とした．ここで，任意の同じ次数の行列 A, B に対して，ジョルダン積 $A * B$ は

$$A * B := \frac{AB + BA}{2}$$

によって，定義される．一般に，ジョルダン積は非結合的である．

(X,S) をアソシエーション・スキームとする．$A_i \in S$ に対して，

$$\tilde{A_i} := \begin{cases} A_i & (A_i = {}^tA_i \text{ のとき}) \\ A_i + {}^tA_i & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

とおき，$\tilde{S} := \{\tilde{A_i} \mid A_i \in S\}$ とおく．このとき，$(X, \tilde{S})$ をアソシエーション・スキーム (X,S) の**対称化**という．よく知られているように，任意の可換アソシエーション・スキームの対称化はまたアソシエーション・スキームである．一方，非可換アソシエーション・スキームの対称化は一般にアソシエーション・スキームと限らない．しかし，それはいつもジョルダン・スキームをなす．こうして，あるアソシエーション・スキームの対称化であるジョルダン・スキームを **improper** といい，そうでないときに **proper** という．Cameron は proper ジョルダン・スキームは存在するかという問いを提示したが，Klin, Muzychuk, Reichard によって，proper ジョルダン・スキームが発見された [6].

本稿では，新たに 2 つの proper ジョルダン・スキームとその隣接ジョルダン代数の構造を紹介する．このとき，隣接ジョルダン代数の単純成分として，対称行列全体の単純ジョルダン代数以外のものが現れる．このようなジョルダン・スキームは初めての例である．また，今回の構成法からはこの 2 つ以外の proper ジョルダン・スキームは得られないことも証明される．

2 ジョルダン代数

ジョルダン代数の一般論については，[5] や [7] を参照せよ．本稿では，$\mathbb{R}$ 上のジョルダン代数のみを考える．

A を双線形な乗法 $*$ をもつ $\mathbb{R}$-ベクトル空間で，

1. $a * b = b * a$,
2. $a^2 * (b * a) = (a^2 * b) * a$, where $a^2 = a * a$.

を満たすとする．このとき，A は**ジョルダン代数**と呼ばれる．

Remark. S をジョルダン・スキームとする．このとき，$\mathbb{R}S := \oplus_{A_i \in S} \mathbb{R}A_i$ にジョルダン積を考えると，ジョルダン代数となる．これをジョルダン・スキーム S の**隣接ジョルダン代数**という．一部，$\mathbb{C}$-ベクトル空間としての $\mathbb{C}S$ を用いることがある．

A をジョルダン代数とする．2 つの元 $a, b \in A$ は，任意の $x \in A$ に対して，

$$a * (b * x) = b * (a * x)$$

を満たすとき，a, b は可換であるという．ジョルダン代数 A の**中心** $Z(A)$ を

$$Z(A) := \{a \in A : \text{任意の } b \in A \text{ に対して，} a, b \text{ が可換}\}$$

で定義する．

V を $\dim V > 1$ であり，正定値対称双線型形式 f を持つ $\mathbb{R}$-ベクトル空間とする．ベクトル空間 $\mathbb{R} \oplus V$ に，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して，

$$(\alpha 1 + \boldsymbol{x}) * (\beta 1 + \boldsymbol{y}) := (\alpha\beta + f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))1 + (\beta \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y})$$

で積を定義すると，$(\mathbb{R} \oplus V, *)$ はジョルダン代数となり，これを $\mathbb{R} \oplus_f V$ とかく．$\mathbb{R} \oplus_f V$ は単純であることが知られている．

3 基本アーベル 2-群とある性質をもつ $\{1, -1\}$-行列によるジョルダン・スキームの構成

$K_2 := J_2 - I_2$ とおく．G を階数 m の基本アーベル 2-群とする．G によって添え字づけられた $\{1, -1\}$-行列 M が次の条件を満たすと仮定する．$x \neq y$ となる任意の $x, y, z \in G$ に対して，

$$M_{x,xz} M_{x,yz} M_{y,xz} M_{y,yz} = -1$$

が成り立つ．

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} & xz & & yz & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ x \\ \\ y \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & * & \cdots & * & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & * & \cdots & * & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

$H := C_2 \times G$ とする．ここで，$C_2 := \langle h \rangle$ は位数 2 の群とする．このとき，$3|G| + 1$ 個の $4|G|$ 次行列を次のように定義する．任意の $(t, s) \in H = C_2 \times G$ に対して，

$$\sigma_{(t,s)} := \sum_{g \in G} E_{(1,g),(t,gs)} \otimes L_{g,gs} + \sum_{g \in G} E_{(h,g),(ht,gs)} \otimes L_{gs,g},$$

ここで，$E_{(t,s),(u,v)}$ は $M_H(\mathbb{C})$ における $(t, s), (u, v) \in H$ に対する行列単位とする．また，任意の $x, y \in G$ に対して，$L_{x,y}$ を

$$L_{x,y} := \begin{cases} I_2 & (t = 1, s = 1) , \\ J_2 & (t = 1, s \neq 1) , \\ I_2 & (t \neq 1 \text{ かつ } M_{x,y} = 1) , \\ K_2 & (t \neq 1 \text{ かつ } M_{x,y} = -1) \end{cases}$$

で定義する．さらに，$\sigma'_{(t,s)}$ を $\sigma_{(t,s)}$ の定義における，$L_{g,gs}$ と $L_{gs,g}$ をそれぞれ，$L_{g,gs}K_2$ と $L_{gs,g}K_2$ に置き換えたもので定義する．このとき，$s \neq 1$ なら，$\sigma_{(1,s)} = \sigma'_{(1,s)}$ であることに注意する．

$S := \{\sigma_{(1,1)}, \sigma'_{(1,1)}\} \cup \{\sigma_{(1,s)}\}_{1 \neq s \in G} \cup \{\sigma_{(h,s)}, \sigma'_{(h,s)}\}_{s \in G}$ とおくと，次が成り立つ．

Theorem 3.1. S はジョルダン・スキームである．

任意の $c \in G$ に対して，多項式 f_c を

$$f_c := \sum_{g \in G} M_{g,gc}\ x_g y_{gc}$$

で定義すると，行列 M の条件から

$$\left(\sum_{g \in G} {x_g}^2\right)\left(\sum_{h \in G} {y_h}^2\right) = \sum_{c \in G} {f_c}^2$$

が成り立つことが分かる．こうして，Hurwitz の定理（[4, 10.1 Theorem] を参照）より，M の次数は $2, 4, 8$ のいずれかであることが分かる．

Example 3.2. 次の行列はそれぞれ，次数が $2, 4, 8$ の場合の行列 M の例である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

GAP システム [2] によって，それぞれの次数の可能な行列 M をすべて見つけることができ，それらから上の構成法で得られるジョルダン・スキームはすべて組合せ的に同型であることが分かる．こうして，この方法では本質的に位数が $8, 16, 32$ の 3 つのジョルダン・スキームを構成することができるが，位数 8 のものは improper である．以後，構成された位数 $16, 32$ のジョルダン・スキームをそれぞれ，J_{16}, J_{32} とかくことにする．

4　J_{16}, J_{32} の隣接ジョルダン代数

Theorem 4.1. ジョルダン・スキーム S の隣接ジョルダン代数 $\mathbb{R}S$ は形式的に実なので，半単純である．

$M_n(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ 上の全行列環とする．$T \subset M_n(\mathbb{C})$ に対して，$\mathrm{Alg}(T)$ を T を含む最小の結合代数とし，$\mathrm{WL}(T)$ を T を含む最小のコヘレント代数とする（コヘレント代数については [8] を参照）．また，写像 $\mathrm{Sym} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ を $\mathrm{Sym}(a) = a + {}^t a$ で定義する．定義より，次の包含関係が成り立つ．

$$\mathbb{C}S \subset \mathrm{Alg}(\mathbb{C}S) \subset \mathrm{WL}(\mathbb{C}S), \quad \mathbb{C}S \subset \mathrm{Sym}(\mathrm{Alg}(\mathbb{C}S)) \subset \mathrm{Sym}(\mathrm{WL}(\mathbb{C}S)).$$

Lemma 4.2. *[8, Proposition 1.6]* ジョルダン・スキーム S が *improper* であることと $\mathbb{C}S = \mathrm{Sym}(\mathrm{WL}(\mathbb{C}S))$ は同値である．

したがって，$\mathbb{C}S \neq \mathrm{Sym}(\mathrm{Alg}(\mathbb{C}S))$ なら，S は proper である．GAP システムにより，ジョルダン・スキーム J_{16} と J_{32} は proper であることが分かる．

Theorem 4.3. S をジョルダン・スキーム，$\mathbb{R}S$ を S の隣接ジョルダン代数とする．$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_r$ を $\mathrm{Alg}(\mathbb{C}S)$ における 1 の中心的ベキ等元分解とする．e_i が $\mathbb{R}S$ の元ならば，$e_i \in Z(\mathbb{R}S)$ である．特に，すべての e_i が $\mathbb{R}S$ の元ならば，$\mathbb{R}S = \bigoplus_{i=0}^{r} e_i * \mathbb{R}S$ は $\mathbb{R}S$ の直和分解である．

ジョルダン・スキーム J_{16} の隣接ジョルダン代数 $\mathbb{R}J_{16}$ の構造を考える．いま，$\dim \mathrm{Alg}(\mathbb{C}J_{16}) = 24$ であり，$\mathrm{Alg}(\mathbb{C}J_{16})$ の 1 の中心的ベキ等元分解 $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_9$ は，任意の e_i が $\mathbb{R}S$ の元となり，

$$\dim_{\mathbb{R}} e_i * \mathbb{R}S = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, 8), \quad \dim_{\mathbb{R}} e_9 * \mathbb{R}S = 5$$

を満たす．さらに，$e_9 * \mathbb{R}S \cong \mathbb{R} \oplus_f \mathbb{R}^4, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_i x_i y_i$ for any $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ であることが得られる．

Theorem 4.4. ジョルダン・スキーム J_{16} の隣接ジョルダン代数 $\mathbb{R}J_{16}$ の構造は，

$$\mathbb{R}J_{16} \cong 8\mathbb{R} \oplus (\mathbb{R} \oplus_f \mathbb{R}^4)$$

である．

同様にして，ジョルダン・スキーム J_{32} の隣接ジョルダン代数 $\mathbb{R}J_{32}$ の構造も得られる．

Theorem 4.5. ジョルダン・スキーム J_{32} の隣接ジョルダン代数 $\mathbb{R}J_{32}$ の構造は，

$$\mathbb{R}J_{32} \cong 16\mathbb{R} \oplus (\mathbb{R} \oplus_f \mathbb{R}^8)$$

である．ここで，任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_8), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_8)$ に対して，$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_i x_i y_i$ である．

Remark. これらは，その隣接ジョルダン代数が $\mathbb{R} \oplus_f V$ の形の単純成分をもつジョルダン・スキームの初めての例である．

参考文献

[1] P. J. Cameron, *Coherent configurations, association schemes and permutation groups*, in A. A. Ivanov, M. W. Liebeck & J. Saxl (Eds.), *Group, Combinatorics and Geometry (Durham, 2001)*, World Scientific, River Edge, NJ, 2003, pp.55-71.

[2] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.14.0*; 2024, `https://www.gap-system.org`.

[3] A. Hanaki and M. Yoshikawa, *On new proper Jordan schemes related to quaternion and octonion algebras*, in preparation.

[4] B. Huppert, *Character theory of finite groups*, Walter de Gruyter, 2011.

[5] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, American Mathematical Society, 1968.

[6] M. Klin, M. Muzychuk and S. Reichard, *Proper Jordan schemes exist. First examples, computer search, patterns of reasoning. An essay*, `http://arxiv.org/abs/1911.06160`.

[7] M. Koecher, *The Minnesota Notes on Jordan Algebras and Their Applications*, Springer, 1999.

[8] M. Muzychuk, S. Reichard and M. Klin, *Jordan schemes*, Israel J. Math. **249** (2022), 309-342.