Two-sided tilting complexes and generalized Brauer tree algebras

東京理科大学大学院・理学研究科　藤野秀司
Shuji Fujino
Department of Mathematics,
Tokyo University of Science

Joint work with

東京理科大学・理学部数学科　小境雄太
Yuta Kozakai
Department of Mathematics,
Tokyo University of Science

東京理科大学大学院・理学研究科　髙村航平
Kohei Takamura
Department of Mathematics,
Tokyo University of Science

1　導入

Brauer tree algebra は, 有限群のモジュラー表現論において不足群が巡回群であるブロックを記述するために導入された [Dad66; Jan69]. これは, Brauer tree と呼ばれる各頂点のまわりに巡回的な辺の順番を備えた重み付き木から組み合わせ的に構造を決められる多元環のことである. ただし, Brauer tree の重複度 (重み付き木の重みのこと) は 1 つの例外的頂点を除いてすべて 1 である. Brauer tree の各頂点における重複度を任意の正整数としたものを generalized Brauer tree といい, この tree から Brauer tree algebra と同様の方法により構造が決定される多元環を generalized Brauer tree algebra という. Brauer tree algebra は有限表現型 (直既約加群の同型類が有限個) であるが, Brauer tree algebra でない generalized Brauer tree algebra は有限表現型ではない tame 型の有限次元対称多元環である.

以降, **多元環は単位的で体上有限次元**なものを表すものとし, **加群は多元環上の有限次元右加群**を表すものとする. 多元環 Γ に対して, Γ 加群圏の有界導来圏を $D^b(\Gamma)$ とかくこととする. 体上の 2 つの多元環が**導来同値**であるとは, それぞれの加群圏の有界導来圏が三角圏として圏同値であるときをいう. Rickard により次の定理が成り立つ.

定理 1.1 ([Ric89b]) 体 k 上の有限次元多元環 Γ と Λ が導来同値であるための必要十分条件は右 Γ 加群の片側傾複体 T があり $\mathrm{End}_{K^b(\mathrm{proj}\,\Gamma)}(T)$ と Λ が同型であることである.

よって, 多元環の導来同値について調べるには片側傾複体を調べれば良いことになる. ここで, 片側傾複体の定義は次のとおりである.

定義 1.2 (片側傾複体) 有限生成射影 Γ 加群からなる有界な複体 T が**片側傾複体 (one-sided tilting complex)** であるとは次の条件をみたすことである.

- $\mathrm{Hom}_{D^b(\Gamma)}(T, T[n]) = 0$ が任意の非零整数 n に対して成り立つ.
- T を含む最小の充満加法部分圏が, 有限生成射影 Γ 加群の有界なホモトピー圏を三角圏として生成する.

一方, 両側 (Λ, Γ) 加群からなる有界な複体 X に対して導来テンソル $- \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} X$ が有界導来圏 $D^b(\Lambda)$ から $D^b(\Gamma)$ への三角同値を与えるとき X を両側傾複体という. Rickard と Keller により, 両側傾複体の存在も導来同値であることの必要十分条件であることが知られている [Ric91; Kel93]. しかし, 片側傾複体から両側傾複体を構成するこれらの方法は明示的ではない. 一方, Rouquier–Zimmermann は, (Λ, Γ) 両側傾複体 X とその逆の導来同値を与える両側傾複体 Y があれば, 両側 (Λ, Γ) 加群からなる有界な複体 C と両側 (Γ, Λ) 加群からなる有界な複体 D で次の条件を満たすものが存在することを示した [RZ03]. 整数 n があり,

1. X は C と擬同型.
2. Y は D と擬同型.
3. 各 $i > n$ に対して, $C^{-i} = 0$, $D^i = 0$ が成り立つ.
4. 各 $i < n$ に対して, C^{-i} と D^i は射影的である.
5. C^{-n} は片側 Λ^{op} 加群, 片側 Γ 加群として射影的である.
6. D^n は片側 Γ^{op} 加群, 片側 Λ 加群として射影的である.
7. $C \otimes_{\Gamma} D$ は両側 (Λ, Λ) 加群の複体として, Λ とホモトピー同値である.
8. $D \otimes_{\Lambda} C$ は両側 (Γ, Γ) 加群の複体として, Γ とホモトピー同値である.

さらに, Rickard や Rouquier–Zimmermann において, $\Omega^{-n}_{\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes \Gamma} C^{-n}$ と $\Omega^{n}_{\Gamma^{\mathrm{op}} \otimes \Lambda} D^{n}$ は Λ と Γ の森田型安定同値を誘導することが示された [Ric91; RZ03]. 以降, **両側傾複体 (two-sided tilting complex)** といえば, このように有界導来圏の三角同値を有限生成射影加群の有界ホモトピー圏の三角同値に持ち上げて得られる両側傾複体のことを指すものとする.

Rickard は, 重複度 m を例外頂点にもつ任意の Brauer tree algebra と 重複度 m の例外的頂点を中心にもつ星型の Brauer tree に付随する Brauer tree algebra の間の片側傾複体を構成することで, 2 つの Brauer tree algebra が導来同値であることの必要十分条件が, 付随する Brauer tree の辺の個数と重複度が等しいことを示した [Ric89a]. さらに, Dade や Janusz の結果と組み合わせることで, アーベル不足群をもつブロックとブラウアー対応するブロックが導来同値であるということを主張する Broué 予想が, 巡回不足群をもつブロックに関して成り立つことが従う. これに対して, Kozakai–Kunugi は, Rickard が構成した傾複体に対応する両側傾複体を明示的に構成した [KK18]. このことにより, 巡回不足群をもつブロックとブラウアー対応するブロックが, 片側に作用を制限して Rickard の複体となる両側複体により splendid 同値であることがわかる. 一方, Membrillo-Hernández は Rickard の傾複体を generalized Brauer tree algebra 上に一般化する傾複体を構成することで, generalized Brauer tree algebra の導来同値類を分類した [Mem97]. よって, 自然な疑問として生じるのは, Kozakai–Kunugi の構成方法を一般化し, Membrillo-Hernández の傾複体に対応する両側傾複体を明示的に構成できないかということである. 本稿では, [FKT] に基づき, 構成された Membrillo-Hernández の傾複体に対応する両側傾複体の明示的な構成方法について解説する.

2 多元環の同値

本稿では, k を代数閉体, Γ, Λ を直既約な有限次元対称 k 多元環, $D^b(\Gamma)$ を有限生成右 Γ 加群の有界導来圏を表すものとする. $K^b(\mathrm{proj}\,\Gamma)$ を有限生成射影 Γ 加群からなる有界ホモトピー圏であるとする. これらの圏は

シフトをシフト関手とする三角圏の構造をもつ．以降, 加群といえば断らない限り有限生成右加群を表すものとする．両側 (Λ, Γ) 加群は, $\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes_k \Gamma$ 加群と同一視されるので, 断らなければ有限生成であるものとし, 両側加群が射影的であることは, 同一視された片側加群が射影的であるということである． $\underline{\mathrm{mod}}\,\Gamma$ を有限生成右 Γ 安定加群圏であるとする．この圏は cosyzygy をシフト関手とする三角圏の構造をもつ．次の命題は, 導来同値を森田型安定同値へ落とした場合, 森田型安定同値で単純加群に対応する直既約加群を知るために重要である．

命題 2.1 ([Ric91]) $F : D^b(\Gamma) \to D^b(\Lambda)$ が導来同値であるとすると, 次の図式が自然同値を除いて可換であるような森田型安定同値を誘導する直既約な両側加群 M が存在する．

$$\begin{array}{ccc}
D^b(\Lambda) & \xrightarrow{\quad F^{-1} \quad} & D^b(\Gamma) \\
\downarrow & & \downarrow \\
D^b(\Lambda)/\,K^b(\mathrm{proj}\,\Lambda) & & D^b(\Gamma)/\,K^b(\mathrm{proj}\,\Gamma) \\
\wr\Vert & & \wr\Vert \\
\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda & \xrightarrow{\quad -\otimes_\Lambda M \quad} & \underline{\mathrm{mod}}\,\Gamma
\end{array}.$$

ただし, 上で直既約な両側加群 M が取れることは Γ と Λ の直既約性から従う．次の 2 つの命題は, 森田型安定同値から両側傾複体の復元を試みるために重要である．

命題 2.2 ([Rou95]) M を両側 (Λ, Γ) 加群で, 右加群に制限しても左加群に制限しても射影的であるものとする．このとき, M の射影被覆は, Λ 加群の単純加群の完全代表系を渡る V に関する直和により, 次で与えられる．

$$\bigoplus_V P(V)^* \otimes_k P(V \otimes_\Lambda M)$$

ただし, P は加群の射影被覆を表すものとする．

M の射影被覆の kernel は $\Omega\, M$ であるので, 上の命題を繰り返し適用することで M の極小射影分解を求めることができる．次の補題は, C が両側傾複体であるための十分条件を与える．

補題 2.3 (see [Rou98; KK18]) C を両側 (Λ, Γ) 加群の有界複体とし, 正次数の項は零加群で, 負次数の項はすべて射影的であるものとする．任意の自然数 n と Λ 単純加群 V, W に対して,

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\Gamma)}(V \otimes_\Lambda C, W \otimes_\Lambda C[-n]) \cong \begin{cases} 0 & (n > 0 \text{ か } V \text{ と } W \text{ が非同型のとき}) \\ k & (n = 0 \text{ で } V \text{ と } W \text{ が同型のとき}) \end{cases}$$

が成り立つとする．このとき, C は両側傾複体である．

次に, Chuang–Rouquier により導入された導来同値について述べる．本稿では, [CR17] における偏屈同値の特徴付けを定義として紹介する． $\mathcal{S}$ および $\mathcal{S}'$ を, それぞれ単純 Γ 加群と Λ 加群の同型類の完全代表系であるものとする．$q : \{0, \dots, r-1\} \to \mathbb{Z}$ を写像とし, $\mathcal{S}_\bullet$ および $\mathcal{S}'_\bullet$ をそれぞれ $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ のフィルトレーション (包含の列) で, 次の条件を満たすものとする．

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\bullet &: \emptyset = \mathcal{S}_{-1} \subseteq \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}_{r-1} = \mathcal{S}, \\
\mathcal{S}'_\bullet &: \emptyset = \mathcal{S}'_{-1} \subseteq \mathcal{S}'_0 \subseteq \mathcal{S}'_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}'_{r-1} = \mathcal{S}'.
\end{aligned}$$

定義 2.4 ([CR17]) 三角同値 $F : D^b(\Gamma) \to D^b(\Lambda)$ が $(\mathcal{S}_\bullet, \mathcal{S}'_\bullet, q)$ に関する**偏屈同値**であるとは, 任意の i に対して次が成り立つことをいう．

- $S \in \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1}$ であれば, $\ell \neq -q(i)$ をみたす任意の整数 ℓ に対して, $H^\ell(F(S))$ の組成因子はすべて $\mathcal{S}'_{i-1}$ に入る．

- $S \in \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1}$ であれば, Λ 加群のフィルトレーション $L_1 \subseteq L_2 \subseteq H^{-q(i)}(F(S))$ があり, L_1 と $H^{-q(i)}(F(S))/L_2$ の組成因子は $\mathcal{S}'_{i-1}$ に入り, $L_2/L_1 \in \mathcal{S}'_i - \mathcal{S}'_{i-1}$ である.
- 上の対応 $S \mapsto L_2/L_1$ は全単射 $\mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1} \to \mathcal{S}'_i - \mathcal{S}'_{i-1}$ を与える.

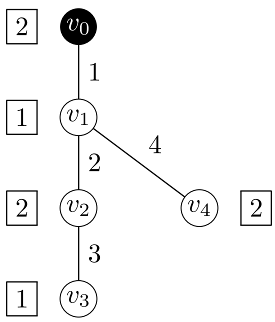
命題 2.5 ([CR17]) Λ' を対称 k 多元環であるとする. 導来同値 $F : D^b(\Gamma) \to D^b(\Lambda)$ が $(\mathcal{S}_\bullet, \mathcal{S}'_\bullet, q)$ に関する偏屈同値で, $G : D^b(\Lambda) \to D^b(\Lambda')$ が $(\mathcal{S}'_\bullet, \mathcal{S}''_\bullet, q')$ に関する偏屈同値ならば, 次が成り立つ.

1. F^{-1} は $(\mathcal{S}'_\bullet, \mathcal{S}_\bullet, -q)$ に関する偏屈同値.
2. $G \circ F$ は $(\mathcal{S}_\bullet, \mathcal{S}''_\bullet, q + q')$ に関する偏屈同値.
3. もし $q = 0$ ならば, F は Γ から Λ への森田同値に制限される.

3 Generalized Brauer tree algebra

Generalized Brauer tree algebra とは, Brauer graph が tree のものに付随する Brauer graph algebra である. tree 型の Brauer graph を generalized Brauer tree という. $\mathcal{T} = (V, E, m, \rho)$ が generalized Brauer tree であるとすると, (V, E) は tree であり, m は V から正整数への写像であり, 各頂点 $v \in V$ に対して, ρ_v は v から出る辺の巡回的な順番を与える. Generalized Brauer tree を図示したときは, 各頂点の m の値はそばの四角の箱の中の数字で表し, 各頂点の ρ の順番はその頂点から出る辺の反時計まわりの順番が表すことにする. また, generalized Brauer tree の頂点 v_0 を固定したとき, その tree は tree with a root となる.

例 3.1 次は, v_0 から v_4 を頂点にもち, 1 から 4 を辺にもつ generalized Brauer tree である. 黒く塗られた v_0 は root を表していて, 例えば, $m_{v_0} = m_{v_2} = m_{v_4} = 2$ であり, v_1 まわりの巡回的な辺の順番 ρ_{v_1} は 2, 4, 1 である.



A を tree $\mathcal{T}$ に付随する generalized Brauer tree algebra であるとする. $n \in E$ に対して, P_n を辺 n に対応する直既約射影 A 加群, S_n を辺 n に対応する単純 A 加群であるとする. 辺 $n \in E$ にある頂点で, root v_0 より遠い位置にある頂点を v_n と表すとする. ρ_{v_n} に関して辺 n の次の辺を n' で表すものとする. L_n は, ボトムが S_n でトップが $S_{n'}$ である長さ最小の単列加群であるとする. L_n は重複度の影響を受けない. 先ほどの例でこのことをみると次のようになる.

例 3.2 例 3.1 に付随する generalized Brauer tree algebra A に対して次が成り立つ.

$$P_1 = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & \\ & & 1 \\ 4 & & \\ & 1 & \end{array}, \quad P_2 \begin{array}{ccc} & 2 & \\ & & 3 \\ 4 & & \\ & & 2 \\ 1 & & \\ & & 3 \\ & 2 & \end{array}, \quad P_3 = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{array}, \quad P_4 = \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 1 & & \\ & & 4 \\ 2 & & \\ & 4 & \end{array}, \quad L_1 \cong \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 1 \end{array}, \quad L_2 \cong \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}, \quad L_3 \cong 3, \quad L_4 \cong 4.$$

各 $n \in E$ に対して, $v_n (\neq v_0)$ から root v_0 への経路

$$(p_n^0, p_n^1, \ldots, p_n^{d(n)-2}, p_n^{d(n)-1}).$$

をとる. ただし, $d(n)$ は v_n から v_0 への経路の長さを表す. $r = \max_{n \in E} d(n)$ とし, T_n を, 上の辺の列に対応して得られる A 加群の有界な複体であるとする:

$$\begin{array}{ccccccc} (-r+1)\mathrm{st} & & (-r+2)\mathrm{nd} & & & & (-r+d(n))\mathrm{th} \\ P_{p_n^{d(n)-1}} & \longrightarrow & P_{p_n^{d(n)-2}} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{p_n^0}. \end{array}$$

ただし, この複体の各微分射は, 右極小なものである.

定理 3.3 ([Mem97]) $T = \bigoplus_{n \in E} T_n$ に対して, 以下が成り立つ.

- 複体 T は A 加群の片側傾複体である.
- $\mathrm{End}(T)$ は generalized Brauer tree algebra であり, 付随する generalized Brauer tree $\mathcal{T}' = (V', E', m', \rho')$ は星形である.
- $\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}'$ の辺の個数は等しく, 頂点の個数も等しい.
- $\mathcal{T}'$ の星形の中心の頂点を w_0 とすると, $m'_{w_0} = m_{v_0}$ である.
- $\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}'$ で共通する辺の個数を ℓ とする. $\mathcal{T}'$ の w_0 から始まる頂点に関する Green walk $(w_0, y_1, \ldots, y_\ell)$ と, $\mathcal{T}$ の v_0 から始まる頂点に関する Green walk $(v_0, x_1, \ldots, x_\ell)$ に対して, それぞれ m_{w_0} と m_{v_0} を除いた正整数の組 $(m_{y_1}, m_{y_2}, \ldots, m_{y_\ell})$ と $(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_\ell})$ は巡回置換の違いを除いて等しい.

ここでいう generalized Brauer tree に関する Green walk とは, tree の外周を反時計まわりに一筆書きしたときに現れる頂点の巡回的な順番である. 一筆書きで同じ頂点が複数回現れるとき, 最初に現れたものだけを考慮する. また, m による V の多重集合の像を $\widehat{m}$ とする.

この傾複体 T をもとに, Membrillo-Hernández は次を示した.

定理 3.4 ([Mem97]) Generalized Brauer tree $\mathcal{T}_1 = (V_1, E_1, m_1, \rho_1)$, $\mathcal{T}_2 = (V_2, E_2, m_2, \rho_2)$ それぞれに付随する generalized Brauer tree algebra A_1, A_2 が導来同値であるための必要十分条件は, $|E_1| = |E_2|$ (辺の本数が等しい) かつ 多重集合として $\widehat{m_1} = \widehat{m_2}$ である.

よって, Membrillo-Hernández の傾複体 T は generalized Brauer tree algebra の導来同値類を考える上で重要である.

注意 3.5 $\mathcal{T}$ が Brauer tree であるときは, root として例外的頂点をとることで Rickard [Ric89a] の結果が復元される. 例外的頂点を中心に持つ星型の Brauer tree algebra は対称中山多元環であり, その多元環上のすべての直既約加群は単列加群である.

例 3.6 例 3.1 の generalized Brauer tree $\mathcal{T} = (V, E, m, \rho)$ に付随する generalized Brauer tree algebra A について,

$$\begin{array}{ccccccc} & & -2\mathrm{nd} & & -1\mathrm{st} & & 0\mathrm{th} \\ T_1 & : & P_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ T_2 & : & P_1 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 \\ T_3 & : & P_1 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_3 \\ T_4 & : & P_1 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

とすると $T = \bigoplus_{n\in E} T_n$ は Membrillo-Hernández の傾複体を与える．ただし, $\mathcal{T}$ の v_0 から始まる Green walk は $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$ である．ここから, v_0 を除いて各頂点を m で送ると, 組 $(1, 2, 1, 2)$ を得る．よって, 定理 3.3 により, $\mathrm{End}(T)$ が付随する generalized Brauer tree $\mathcal{T}' = (V', E', m', \rho')$ は星形であり, 中心 w_0 に対して, $m'_{w_0} = m_{v_0} = 2$ であり, それ以外の点の m' の値は反時計まわりに $1, 2, 1, 2$ である．

4 主結果

3 章の設定を引継ぐものとする．B を A と導来同値な多元環 $\mathrm{End}(T)$ であるとし, generalized Brauer tree $\mathcal{T}$ の辺 n に対して, V_n を n に対応する単純 B 加群であるとする．

$r = \max_{n\in E} d(n)$ とし, $i \in \{-1, 0, 1, \ldots, r-1\}$ に対して,

$$\mathcal{S}_i = \{S_n \in \mathcal{S} \mid d(n) \geq r - i\}$$

と定めると, 次の単純 A 加群の同型類の完全代表系 $\mathcal{S}$ に関するフィルトレーション

$$\mathcal{S}_\bullet : \emptyset = \mathcal{S}_{-1} \subseteq \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}_{r-1} = \mathcal{S}$$

が得られる．次の 2 つの命題は Chuang–Rouquier の decreasing perversities に従うことで得られる．特に, tree with a root が階層構造をもつことから, 帰納法を適用することができる．

命題 4.1 ([FKT]) $F = \mathrm{Hom}^\bullet_A(T, -) : D^b(A) \to D^b(B)$ は

$$\mathcal{S}_i = \{S_n \in \mathcal{S} \mid d(n) \geq r - i\}, \qquad \mathcal{S}'_i = \{V_n \in \mathcal{S}' \mid S_n \in \mathcal{S}_i\}$$

で定義される A, B 上の単純加群の完全代表系 $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ のフィルトレーション $\mathcal{S}_\bullet$, $\mathcal{S}'_\bullet$ と写像 q

$$\begin{array}{cccc} q & : & \{-1, 0, \ldots, r-1\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & i & \longmapsto & -i \end{array}$$

に関して偏屈同値である．

命題 4.2 ([FKT]) $S_n \in \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1}$ に対して, $F^{-1}(V_n)$ は $D^b(A)$ において L_n の i シフト $L_n[i]$ に同型である．

ここで, $W^* := \mathrm{Hom}_k(W, k)$ を B 加群 W の双対 B^{op} 加群であるとし, $\Omega\, U$ を A 加群 U の射影被覆の kernel, つまり syzygy であるとする．$\Omega^n\, U := \Omega\, \Omega^{n-1}\, U$ を $n \geq 1$ に対して n 回 U の syzygy をとったものとする．双対的に, cosyzygy を定義する．

命題 2.1 により, T が誘導する森田型安定同値を誘導する直既約な両側 (B, A) 加群を M とする．$P^\bullet$ を両側 (B, A) 加群 M の極小射影分解であるとする．$\Omega\, M$ が再び森田型安定同値を誘導すること [Rou01] や, 単純 Λ 加群 V に対して $\Omega\,(V \otimes_\Lambda M)$ と $V \otimes_\Lambda \Omega\, M$ が同型であること [KK18], および命題 2.1 と 2.2 から, $P^\bullet$ は次のようになる．

$$P^{-t} = \begin{cases} M & (t = 0), \\ \bigoplus_{n\in E} P(V_n)^* \otimes_k P(\Omega^{t-1+d(n)-r}\, L_n) & (t > 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

この各項から次のように直和因子を削ると, $P^\bullet$ の部分複体 C を得られる．

$$C^{-t} = \begin{cases} M & (t = 0), \\ \bigoplus_{n\in E,\ d(n)\leq r-t} P(V_n)^* \otimes_k P(\Omega^{t-1+d(n)-r}\, L_n) & (t > 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

この C は, 実際には Membrillo-Hernández の傾複体 T に対応する両側傾複体である．

定理 4.3 ([FKT]) 複体 C は両側 (B, A) 加群の両側傾複体であり, C を片側 A 加群に制限すると, $D^b(A)$ において T と同型である.

証明の方針は次の通りである. C の定め方と命題 4.2 から,

$$V_n \otimes_B C \cong L_n[r - d(n)] \cong F^{-1}(V_n)$$

である.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(V_n \otimes_B C, V_\ell \otimes_B C[-u]) \\
\cong\ &\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(F^{-1}(V_n), F^{-1}(V_\ell)[-u]) \\
\cong\ &\mathrm{Hom}_{D^b(B)}(V_n, V_\ell[-u]) \\
\cong\ &\delta_{n\ell}\delta_{u0}k
\end{aligned}$$

であるため, 補題 2.3 から, C が両側傾複体であることが示される. また, 偏屈同値の定義から, 関手 $-\otimes_B C$ は F^{-1} と同じフィルトレーションと関数に関する偏屈同値であることがわかる. よって, 命題 2.5 から, $-\otimes_B C$ と F の合成は自己森田同値に制限される. よって, $F(B \otimes C)$ は $B \cong F(T)$ と同型である. F^{-1} を施すことで $C = B \otimes C$ と T は片側 A 加群の有界導来圏において同型である.

例 4.4 例 3.1 の generalized Brauer tree に付随する generalized Brauer tree algebra を A とすると, 例 3.6 の T は A 上の Membrillo-Hernández の傾複体である.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & -2\mathrm{nd} & & -1\mathrm{st} & & 0\mathrm{th} \\
 & & P(V_1)^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_1) & & P(V_1)^* \otimes_k P(\Omega^{-2} L_1) & & \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
 & & P(V_2)^* \otimes_k P(L_2) & & P(V_2)^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_2) & & \\
\cdots & \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow & M \\
 & & P(V_3)^* \otimes_k P(\Omega\, L_3) & & P(V_3)^* \otimes_k P(L_3) & & \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
 & & P(V_4)^* \otimes_k P(L_4) & & P(V_4)^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_4) & &
\end{array}$$

は T が誘導する森田型安定同値を誘導する両側加群 M の射影分解であり,

$$\begin{array}{ccccc}
-2\mathrm{nd} & & -1\mathrm{st} & & 0\mathrm{th} \\
P(V_1)^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_1) & & P(V_1)^* \otimes_k P(\Omega^{-2} L_1) & & \\
 & & \oplus & & \\
 & & P(V_2)^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_2) & & \\
 & \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow & M \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & P(V_4)^* \otimes_k P(\Omega^{-1} L_4) & &
\end{array}$$

は T に対応する有界な両側傾複体である.

注意 4.5 $P(\Omega^{-1} L_1) = P(S_1)$, $P(\Omega^{-1} L_2) = P(S_2)$, $P(\Omega^{-1} L_4) = P(S_4)$, $P(\Omega^{-2} L_1) = P(S_1) \oplus P(S_4)$ である. 一般に, generalized Brauer tree algebra では, $P(\Omega^{-\ell} L_n)$ が直既約であるとは限らない.

一方, Brauer tree algebra では, L_n が $P(S_n)$ の極大な単列部分加群であることから, 任意の $n_1, n_2 \in E$ に対して, $L_{n_1} \cong \Omega^{-\ell} L_{n_2}$ をみたす ℓ が存在する. $d(N) = r$ である $N \in E$ に対して $L_N = S_N$ であるので, すべての L_n は S_N の何回かの syzygy で表せる. よって, すべての $n \in E$ と $\ell < 0$ に対して, $P(\Omega^{-\ell} L_n) = P(\Omega^{-\ell'} S_N)$ をみたす ℓ' が存在して, $P(\Omega^{-\ell} L_n)$ は直既約である. また, B においては, すべての単純加群は V_N の何回かの syzygy で表せる. このことから, 本稿で構成した C は Kozakai–Kunugi が構成

した Brauer tree algera における両側傾複体を generalized Brauer tree algebra 上に一般化したものであることがわかる.

References

[CR17] J. Chuang, R. Rouquier, *Perverse equivalences*, (2017), preprint.

[Dad66] E. C. Dade, *Blocks with cyclic defect groups*, Annals of Mathematics 84 (1966), no. 1, 20–48.

[FKT] S. Fujino, Y. Kozakai, K. Takamura, *Two-sided tilting complexes for generalized Brauer tree algebras*, preprint arXiv : 2405.09188, to appear in Communications in Algebra.

[Jan69] G. J. Janusz, *Indecomposable modules for finite groups*, Annals of Mathematics 89 (1969), no. 2, 209–241.

[Kel93] B. Keller, *A remark on tilting theory and DG algebras*, manuscripta mathematica 79 (1993), no. 1, 247–252.

[KK18] Y. Kozakai, N. Kunugi, *Two-sided tilting complexes for Brauer tree algebras*, Journal of Algebra and its Applications 17 (2018), no. 12, 1850231, 26.

[Mem97] F. H. Membrillo-Hernández, *Brauer tree algebras and derived equivalence*, Journal of Pure and Applied Algebra 114 (1997), no. 3, 231–258.

[Ric89a] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, Journal of Pure and Applied Algebra 61 (1989), no. 3, 303–317.

[Ric89b] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, Journal of the London Mathematical Society s2-39 (1989), no. 3, 436–456.

[Ric91] J. Rickard, *Derived equivalences as derived functors*, Journal of the London Mathematical Society s2-43 (1991), no. 1, 37–48.

[Rou95] R. Rouquier, *From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect*, *Groups '93 Galway/St Andrews*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1995, 512–523.

[Rou98] R. Rouquier, *The derived category of blocks with cyclic defect groups*, *Derived equivalences for group rings*, vol. 1685, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1998, 199–220.

[Rou01] R. Rouquier, *Block theory via stable and Rickard equivalences*, Symposium on Modular Representation Theory of Finite Groups (2001), 101–146.

[RZ03] R. Rouquier, A. Zimmermann, *Picard Groups for Derived Module Categories*, Proceedings of the London Mathematical Society 87 (2003), no. 1, 197–225.

Shuji Fujino 1124702@ed.tus.ac.jp
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601, Japan

Yuta Kozakai kozakai@rs.tus.ac.jp
Department of Mathematics, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo 162-8601, Japan

Kohei Takamura 1122514@alumni.tus.ac.jp
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601, Japan