τ-tilting theory of skew group algebra extensions

小境雄太 *

概要

k を代数的閉体，Λ を k 上有限次元多元環，G を Λ に作用している有限群とする。この状況で，ねじれ群環 $\Lambda * G$ を考えることができる。また，τ-傾理論の主役である台 τ-傾加群は，表現論的に重要な多くの対象と一対一対応することが知られている。本稿では，Λ 上の台 τ-傾加群全体の集合のある部分集合が，$\Lambda * G$ 上のそれと半順序集合として同型であることを説明する。

1　ねじれ群環

この章では，k を代数的閉体，Λ を k 上有限次元多元環，G を Λ に作用する（必ずしも有限ではない）群とし，ねじれ群環の定義と例を紹介する。

定義 1.1. k を代数的閉体，Λ を k 上有限次元多元環，G を Λ に作用する（必ずしも有限ではない）群とする。ねじれ群環 $\Lambda * G$ を以下のように定義する。

- ベクトル空間として $\Lambda * G := \Lambda \otimes_k kG$ である。
- $r * g := r \otimes g, s * h := s \otimes h \in \Lambda * G$ に対して，積が次で定まって

* 東京理科大学 kozakai@rs.tus.ac.jp

いる。

$$(r*g)(s*h) := rg(s)*gh$$

注意 1.2. より一般に，Λ が環，G が Λ に作用している群とした場合のねじれ群環も次のように定義できる。

- 集合として $\Lambda * G := \{\sum_{g\in G,\ \text{有限和}} \lambda_g g \mid g \in G, \lambda_g \in \Lambda\}$ である。
- $rg, sh \in \Lambda * G\ (r, s \in \Lambda, g, h \in G)$ に対して，積が次で定まっている。

$$(rg)(sh) := (rg(s))gh$$

本稿では，簡単のために，Λ が k 上有限次元多元環の場合のみを考える。

例 1.3. $\Lambda = k$ とし，G が k に自明に作用している，すなわち，$gx := x\ (\forall g \in G, \forall x \in k)$ とする。このとき，ねじれ群環 $\Lambda * G$ は，群環 kG と同型となる。実際，$r*g, s*h \in \Lambda * G$ に対して，

$$(r*g)(s*h) = rg(s)*gh = rs*gh$$

であることから，同型であることがわかる。

例 1.4. N, H を群とし，群準同型 $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ が与えられているとする。これらから得られる半直積群を G とする，すなわち，$G := N \rtimes_\varphi H$ とする。群 H が $\Lambda := kN$ に，$hn := \varphi(h)(n)\ (\forall h \in H, \forall n \in N)$ で作用しているとする。このとき，ねじれ群環 $\Lambda * H$ は，群環 kG と同型となる。

例 1.5. $\Lambda := k \times k$, $G := \langle g \mid g^2 = e\rangle \cong C_2$ とし，G が Λ に以下のように作用しているとする。

$$g : (1_k, 0) \leftrightarrow (0, 1_k)$$

このとき，$\Lambda * G$ は $M_2(k)$ と同型である。実際，以下の対応が同型を与える。

$$(1_k,0)*e \mapsto \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, (0,1_k)*e \mapsto \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, (1_k,0)*g \mapsto \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, (0,1_k)*g \mapsto \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

ねじれ群環 $\Lambda * G$ と Λ-加群 M が与えられたとき，G の Λ への作用を用いて，次のように新たな Λ-加群 ${}_gM$ を定義することができる。

- ベクトル空間として $M = {}_gM$ である。
- $m \in {}_gM, \lambda \in \Lambda$ に対して，$\lambda \cdot_{{}_gM} m := \lambda \cdot_M m$ である。ただし，$\cdot_M$ は，最初に与えられた Λ-加群 M の Λ の作用を表す。

この加群は 3 章で重要となる。

2　τ-傾理論

この章では，k を代数的閉体，Λ を k 上有限次元多元環し，[1] により導入された台 τ-傾加群の定義と性質について紹介する。台 τ-傾加群は次のように定義される。

定義 2.1 ([1]).　(1) Λ-加群 M が τ リジッドであるとは, $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau M) = 0$ が成り立つときをいう。ここで，τ は Auslander-Reiten 変換である。

(2) Λ-加群 M が τ 傾加群であるとは, M が τ リジッドであり, $|M| = |\Lambda|$ が成り立つときをいう。(ただし，$|M|$ は M の互いに非同型な直既約因子の個数を表す。特に，$|\Lambda|$ は，単純 Λ-加群の同型類の個数と一致する。)

(3) Λ 加群 M が台 τ 傾加群であるとは，ある Λ のべき等元 e が存在して，M が $\Lambda/\Lambda e\Lambda$-加群として τ 傾加群になるときをいう。

Λ-加群 M_1, M_2 に対して，$M_1 =_{\mathrm{add}} M_2$ を $\mathrm{add}\, M_1 = \mathrm{add}\, M_2$ で定義する。ただし，$\mathrm{add}\, M_i$ は M_i の有限直和の直和因子全体である。この “$=_{\mathrm{add}}$” は Λ-加群全体上の同値関係であり，さらに，台 τ-傾加群全体上の同値関係も与える。

Λ 上の台 τ-傾加群の add-同値類全体 $\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ は，Λ の表現論的に重要な

多くの対象と一対一で対応する。その例として，例えば次のものがある。

定理 2.2 ([1, 3, 5, 6, 9])**.** Λ を有限次元多元環とする。$\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ は次の集合と一対一対応下にある。

- 台 τ^{-1} 傾加群 (support τ^{-1}-tilting module) の add-同値類の集合 $\mathrm{s}\tau^{-1}\text{-tilt}\,\Lambda$
- 二項準傾複体 (two-term silting complex) の add-同値類の集合 2-siltΛ
- 二項余準傾複体 (two-term cosilting complex) の add-同値類の集合 2-cosilt Λ
- 関手的有限なねじれ類 (functorially finite torsion class) の集合 f-tors Λ
- 関手的有限なねじれ自由類 (functorially finite torsion-free class) の集合 f-torf Λ
- 左有限 (left finite) な半煉瓦 (semibrick) の集合 $\mathrm{f_L}\text{-sbrick}\,\Lambda$
- 右有限 (right finite) な半煉瓦の集合 $\mathrm{f_R}\text{-sbrick}\,\Lambda$
- 二項単純系 (two-term simple-minded collection) の集合 2-smd Λ
- $D^b(\Lambda)$ において length heart をもつ intermediate t-structure の集合 int-t-str Λ
- 左有限な Λ-mod の広大部分圏 (wide subcategory) の集合 $\mathrm{f_L}\text{-wide}\,\Lambda$
- 右有限な Λ-mod の広大部分圏 (wide subcategory) の集合 $\mathrm{f_R}\text{-wide}\,\Lambda$

$\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ は $M_1, M_2 \in \mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ に対して，$M_1 \leq M_2$ を $\mathsf{Fac}\,M_1 \subseteq \mathsf{Fac}\,M_2$ で定義することにより，半順序集合の構造をもつ。また，[2] により 2-siltΛ も半順序集合となることが示されており，上記の $\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ と 2-siltΛ の間の一対一対応は，単なる一対一対応ではなく，半順序集合としての同型となっている。また，Λ が対称多元環である場合，準傾複体と傾複体は一致することも [2] で示されており，群環をはじめとする対称多元環 Λ 上の $\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,\Lambda$ を

調べることは，導来同値の研究にも役立つことが期待される。

こういった理由から，与えられた多元環に対して，その多元環上の台 τ-傾加群を与えたり，分類することは，最近では表現論の 1 つのテーマとなっており，τ-傾理論に関する研究は急速に進んでいる。

3 主結果

この章では，Λ を代数的閉体 k 上の有限次元多元環，G を Λ に作用する有限群，$A := \Lambda * G$ をねじれ群環とする。一般に，Λ 上の台 τ-傾加群全体と A 上のそれには一対一対応は存在しないが，Λ 上の台 τ-傾加群全体のある部分集合と A 上のそれには一対一対応（実際には半順序集合としての同型）が存在することが示された結果がある [4, 7, 10]。この 3 つの主定理については，ここでは省くが，これらの 3 つの結果をねじれ群環の結果として一般化するのが，今回の主定理となる。したがって，この章では，Λ 上の台 τ-傾加群全体のある部分集合が，A 上のそれと誘導関手と，制限関手により一対一に対応することを [8] に基づいて紹介する。

まずは，上記の "ある部分集合" を定義するために，2 つの概念を定義する。

定義 3.1. M を Λ-加群とする。M が G-stable であるとは，以下が成り立つことである：

$$_gM \cong M \ (\forall g \in G)$$

（$_gM$ の定義については，1 章の最後をご覧ください。）また，$(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)^G$ で G-stable な Λ 上の台 τ-傾加群の add-同値類全体を表す。(厳密にいうと，add-同値な Λ 上の台 τ-傾加群 M_1, M_2 に対して，M_1 が G-stable としても，M_2 は G-stable とは限らない。そこで，$(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)^G$ の厳密な定義は，G-stable な Λ 上の台 τ-傾加群で basic なものを完全代表系とする add-同値類とする。)

定義 3.2. N を A-加群とし，X を kG-加群とする。次のようにして A-加

群 $X \otimes_k^G N$ を定義する。

- ベクトル空間として
$$X \otimes_k^G N = X \otimes_k N$$
- $\lambda * g \in A, x \otimes n \in X \otimes_k^G N$ に対して,
$$(\lambda * g) \cdot (x \otimes n) := g(x) \otimes (\lambda * g)n$$

以上の設定で，A-加群 N が $(\mathrm{mod} G)$-stable であるとは，任意の kG-加群 X に対して，$X \otimes_k^G N \in \operatorname{add} N$ が成り立つときをいう。

また，$(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, A)^{\mathrm{mod} G}$ で mod$G$-stable な A 上の台 τ-傾加群の add-同値類全体を表す。

注意 3.3. 実際には，A 上の台 τ-傾加群 N に対して，N が $(\mathrm{mod}\, G)$-stable であることを確認するためには，単純 kG-加群だけを確認すればよい。つまり，N が $(\mathrm{mod}\, G)$-stable であるための必要十分条件は，任意の単純 kG-加群 S に対して，$N \otimes_k^G S \in \operatorname{add} N$ が成り立つことである。これは，一般の A-加群に対しては成り立たないが，リジッド加群に対しては成り立つ。（台 τ-傾加群ならば，リジッド加群である。）

以上の設定で，主定理を述べる。

定理 3.4. Λ を代数的閉体 k 上の有限次元多元環，G を Λ に作用する有限群，$A := \Lambda * G$ をねじれ群環とする。また，$\mathrm{Ind}_\Lambda^A : \Lambda \operatorname{mod} \to A \operatorname{mod}$ により誘導関手，$\mathrm{Res}_\Lambda^A : A \operatorname{mod} \to \Lambda \operatorname{mod}$ により制限関手を表すものとする。このとき，$(\mathrm{Ind}_\Lambda^A, \mathrm{Res}_\Lambda^A)$ により，$(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, \Lambda)^G$ と $(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, A)^{\mathrm{mod} G}$ に一対一対応がある：
$$\mathrm{Ind}_\Lambda^A : (\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, \Lambda)^G \longleftrightarrow (\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, A)^{\mathrm{mod} G} : \mathrm{Res}_\Lambda^A$$

参考文献

[1] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ-tilting theory.* Compos. Math. **150** (2014), no. 3, 415–452.

[2] T. Aihara, O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories.* J. Lond. Math. Soc. (2) **85** (2012), no. 3, 633–668.

[3] S. Asai, *Semibricks.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2020, no. 16, 4993–5054.

[4] S. Breaz, A. Marcus, G. C. Modoi, *Support τ-tilting modules and semibricks over group graded algebras.* J. Algebra 637 (2024), 90–111.

[5] T. Brüstle, D. Yang, *Ordered exchange graphs.* Advances in representation theory of algebras, 135–193, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.

[6] S. Koenig, D. Yang, *Silting objects, simple-minded collections, t-structures and co-t-structures for finite-dimensional algebras.* Doc. Math. **19** (2014), 403–438.

[7] R. Koshio, Y. Kozakai, *Normal subgroups and support τ-tilting modules.* J. Math. Soc. Japan **76** (2024), no. 4, 1279–1305.

[8] Y. Kimura, R. Koshio, Y. Kozakai, H. Minamoto, Y. Mizuno, *τ-tilting theory and silting theory of skew group algebra extensions.* arXiv:2407.06711 (2024).

[9] F. Marks, J. Šťovíček, *Torsion classes, wide subcategories and localisations.* Bull. Lond. Math. Soc. **49** (2017), no. 3, 405–416.

[10] Y. Zhang, Z. Huang, *G-stable support τ-tilting modules.* Front. Math. China11(2016), no.4, 1057–1077.