高次群論とその幾何学 II　さまざまな分野との照応 ＆ 群論版双曲線の変形論

— Higher group theory and its geometry II —

高村茂　京都大学理学研究科数学教室

2024 年 12 月 18 日

概 要

一般に幾何と言うと、距離あるいは位相が入った空間を扱う—「遠・近」に基づいて幾何を展開する。広い意味では、"通常の" 空間でなくても、「遠・近」に相当するものがあれば、幾何が展開できる。可換環がまさしくこの観点から発展してきた（ザリスキ位相を入れて位相空間とみる）。一般の群には、「遠・近」に相当するものがないが、その代わり「ミクロ・マクロ」がある—群の元たちの積（ミクロ積）と群の部分集合たちの積（マクロ積）。ここで、「ミクロ・マクロ」と言えば、統計力学や社会学には「ミクロ（粒子や個人）がランダムに振る舞っても、マクロ（気体や集団）は統制が取れた規則的な振る舞いをする」という原理がある。これは高次群論の原理でもある。群の「ミクロ・マクロ」の "相互作用" から一種の幾何（幾何的描像）が立ち現れるのである。この幾何は、さまざまな分野、特に代数幾何に対応する現象や定理を含む。本稿の前半では、高次群論と他分野との照応にスポットライトを当て、後半では「群論版双曲線」を導入し、その "高次群論的" 変形論を解説する。

1　序　群論の "幾何化"

数は空間を模倣する。本性から言えば、
異なったものであるにもかかわらず。

パスカル　パンセ（下）p.135
松浪信三郎訳　講談社文庫

※ 著者が高次群論に至った経緯や背景などは、[高村 5] で "カジュアルに" 説明されているので、興味ある方はご覧ください。

出自は同じでも、その後の環境でまったく違った人生を歩む、ということはよくある。ただし、それでも核となるものは受け継がれている、ということも。代数学の基本概念である "可換環" と "群" も、いわば同じ出自である。どちらも「空間由来」—前者は空間の上の関数たち、後者は空間の対称性である。しかし、理論の発展様式は大きく異なっている。可換環は、スキーム論の立場から「幾何化」され、幾何的思考が持ち込まれ、それをテコに大発展した。一般の群に対しては、可換環のザリスキ位相に相当する自然な位相がなく、可換環のようには、幾何を展開できない。もし位相があれば、層に基づいた幾何を展開できるが、群ではそうはいかないのである。可換環と群との本質的な差異がまさしくここである。**では、本当に群には幾何がないのだろうか？**

注： 特殊な群のクラス（リー群、位相群、離散群など）に対しては、個別的に「幾何」があるが、群全般に対してのものではない。一方、スキーム論は可換環全般に対しいっさい制約を付けずに成り立つ "幾何的枠組み" を提供する（もちろん、整数環や多項式環など個別な扱いが効果的な環はあるが）。このような幾何的枠組みは今までの群論にはなかった。

後でみるように、高次群論の観点から、群に対しても幾何があることがわかる。この幾何には、"出自が同じだった可換環" の幾何（代数幾何）に対応する現象や定理（たとえばベズー型定理）を含む—まったく違った "人生" を歩んでも、核となるものは遺伝的に受け継がれている。つまり、収斂(しゅうれん)進化とも言えることが起こっている—イカの目とヒトの目が、異なった進化のプロセスを辿りながらも、同じような形態になったように。

注意深く観察すると、（高次群論ではない古典的な）群論にも、代数幾何的な現象や公式が見え隠れしている。たとえば、両側コセット HaK の位数公式 $|HaK| = |H||K|/|H \cap K^a|$ を書き換えたものと、代数幾何の（複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の中の代数曲線 C と D の交点に関する）ベズーの定理の特別な場合（同じ tangency で交わるとき—つまり、どの交点も同じ交差重複度を持つとき）の類似性：

群論	代数幾何
両側コセットの位数公式	ベズーの定理の特別な場合
$\lvert H\rvert\lvert K\rvert = m\lvert H \cap K^a\rvert$	$\deg C \deg D = n\lvert C \cap D\rvert$
ここで $m := \lvert HaK\rvert$,	ここで n は共通の交差重複度、
$K^a := aKa^{-1}$（共役）	$\deg C, \deg D$ は C, D の次数。

両側コセットの位数公式の一般化が、高次群論の観点から定式化され、証明される（**ベズー型定理**）。これは、両側コセット HaK の $a \in G$ を、G の（任意の）部分集合 A に置き換えた "両側コセットの一般化" HAK に関する公式である。ただし、HAK は、次で与えられる G の部分集合である：

$$HAK = \{hak : a \in A\}. \tag{1.1}$$

ここで、HAK には、H と K が左右から自然に作用する：$H \curvearrowright HAK \curvearrowleft K$（両側作用）。具体的には、

$$hak \longmapsto (uh)a(kv) \ \ (u \in H,\, v \in K), \qquad \text{ここで、} uh \in H,\, kv \in K \text{ に注意。}$$

この両側作用の軌道分解として、両側コセット分解 $HAK = \coprod_{i \in I} Ha^{(i)}K$ が得られる (ここで $a^{(i)} \in A$ は代表元)。また、このとき $Ha^{(i)}K$ の**重複度** $m^{(i)}$ という量（自然数）が定義される (定義 5.4 (3))。さて、HAK が有限の場合（たとえば、G が有限群のとき）、両側コセット分解は有限和である：$HAK = \coprod_{i=1}^{l} Ha^{(i)}K$ と書く。このとき、次が成り立つ [Ta10]：

$$\textbf{ベズー型定理} \qquad |H||A||K| = \sum_{i=1}^{l} m^{(i)} |H \cap K^{a^{(i)}}|. \tag{1.2}$$

比較 1.1. 両側コセットの位数公式では、登場人物（部分群 H, K とその共役 K^a）は古典的な群論の範疇に収まっているが、ベズー型定理ではハミ出している登場人物もいる (A は群の任意の部分集合)。したがって、**ベズー型定理は、古典的な群論では定式化すらできない**のである—高次群論への移行が不可欠。

次に、代数曲線に対するベズーの定理の一般形を述べる。まず、複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の中の代数曲線 C と D の交点たちの交差重複度の集合を $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ とし、交差重複度が n_j である交

点の個数を $|C\cap D|_j$ と書く。このとき、

$$\textbf{ベズーの定理}\qquad \deg C\deg D=\sum_{j=1}^{k} n_j|C\cap D|_j. \tag{1.3}$$

並べて書くと、類似性が一目瞭然である：

高次群論	代数幾何
ベズー型定理	ベズーの定理
$\lvert H\rvert\lvert A\rvert\lvert K\rvert=\sum_{i=1}^{l} m^{(i)}\lvert H\cap K^{a^{(i)}}\rvert$	$\deg C\deg D=\sum_{j=1}^{k} n_j\lvert C\cap D\rvert_j$

注：ベズー型定理は $|H||A||K|=\sum_{i=1}^{l} m^{(i)}|H^{a^{(i)^{-1}}}\cap K|$ としてもよい。

比較　ベズーの定理では $|C\cap D|_j$ であるが、ベズー型定理では $|H\cap K^{a^{(i)}}|$ となっている。ここで、K の肩に $a^{(i)}$ が掛かっているのは、非可換性のためである（実際、$a^{(i)}$ と K が可換 $(a^{(i)}K=Ka^{(i)})$ ならば、$K^{a^{(i)}}=K$ となって K の肩から $a^{(i)}$ がなくなる）。一方、ベズーの定理は「可換」環に基づいているので、こういうことは起こらない—非可換性と可換性の違いの "現れ"。なお根源的には、

> **$H\cap K^{a^{(i)}}$ に $a^{(i)}$ が入っているのは、ギルド HAK の中で、H と K のあいだにある "媒質" A の影響である。物理的な言い方をすると、H と K は媒質 A を通じて相互作用しているのである。**

$H\cap K^{a^{(i)}}$	$C\cap D$
interaction of H and K via the medium A	*intersection* of C and D
(H と K の、媒質 A を通じた相互作用)	(C と D の交わり)

別の側面の比較もしておこう：

(i) 代数曲線 C と D は、$\mathbb{CP}^2$ の中で（それらの定義式の係数にパラメータを入れて）連続に動かすことができる。このとき、C と D の交点たちの個数や交差重複度などのデータは変化する。一方、C と D の ambient space $\mathbb{CP}^2$ は変化しない。

(ii) 群 G の部分群 H と K は、G の中で動かない。しかし、H と K の ambient space HAK は（A を変えると）変化する。このとき、HAK の両側コセット分解やその両側コセットの重複度などのデータは変化する。

高次群論	代数幾何
$H,K\subset HAK$	$C,D\subset\mathbb{CP}^2$
A を変えると、HAK は変化する	$\mathbb{CP}^2$ は変化しない
H, K は G の中で動かない	C, D は $\mathbb{CP}^2$ の中で動ける
HAK が変化すると、その両側コセット分解や両側コセットの重複度が変化する	$\mathbb{CP}^2$ の中で、C, D を動かすと、交点の個数やそれらの交差重複度が変化する

これまでのわれわれの結果を念頭に置いて、次を提唱したい：

スローガン 1.　代数曲線論と群論は「隣接分野」である。

これは、代数的整数論が代数曲線論をモデルに、類体論へと飛翔したことを思い起こすと興味深い。

> 余談ながら、森毅著『数学プレイ・マップ』（ちくま文庫、2020 年）は一般向けの本だが、第一章はベズーの定理、第二章は群論、という配列になっている。さまざまな雑誌の記事を集めた本なので、この配列はたまたまなのだろうが、高次群論の立場から眺めると意味深である。

さて、[Ta10] ではベズー型定理以外のさまざまな組み合わせ的公式も導出している。また、[Ta11] ではさらなる新しい組み合わせ的公式を導出している。たとえば、HAK を一般化した $HA_1A_2\cdots A_nK$ (ただし、A_i は群 G の部分集合) に対する次の公式（ベズー型定理の一般化）：

$$\textbf{相乗的位数公式}\qquad |H||A_1||A_2|\cdots|A_n||K| = \sum_{i=1}^{l} m^{(i)}|H\cap K^{\alpha^{(i)}}|. \tag{1.4}$$

（英語では、synergetic order formula.）ここで、重複度 $m^{(i)}$（自然数）や $\alpha^{(i)} \in A_1A_2\cdots A_n$ は次のように定義される。まず、HAK と同様に $HA_1A_2\cdots A_nK$ は自然な両側作用を持つことに注意する：

$$H \curvearrowright HA_1A_2\cdots A_nK \curvearrowleft K. \tag{1.5}$$

この両側作用の軌道分解として、$HA_1A_2\cdots A_nK$ の両側コセット分解が得られる:

$$HA_1A_2\cdots A_nK = \coprod_{i\in I} H\alpha^{(i)}K \quad (\alpha^{(i)} \in A_1A_2\cdots A_n \text{ は代表元}). \tag{1.6}$$

このとき、$H\alpha^{(i)}K$ の重複度 $m^{(i)}$（自然数）は、非常に大ざっぱに言うと写像 “シナジー”

$$\begin{aligned} \pi\colon H\times A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\times K &\longrightarrow HA_1A_2\cdots A_nK, \\ (h,a_1,a_2,\ldots,a_n,k) &\longmapsto ha_1a_2\cdots a_nk \end{aligned} \tag{1.7}$$

に関する「$H\alpha^{(i)}K$ の被覆度」のようなものである (正確には定義 5.4 (3) 参照)。このように、**単に $HA_1A_2\cdots A_nK$ 自体だけを考えるのではなく、その上部構造 “シナジー” も込めて考えることがポイントである。** これは、代数幾何において、代数多様体自体だけを考えるのではなく、その上部構造 “層” も込めて考えることに似ている。層の導入により理論が透徹化され、不変量（コホモロジー）やそれらの間の公式（リーマン・ロッホの定理など）が見通し良く導かれる。つまり、上部構造の導入により、理論のステージが上がるのである。

**スローガン 2.　群論においても、「上部構造（シナジー）」を導入すると
今までの群論の射程外のことが可能になる。**

次に、相乗的位数公式 (1.4) の幾何的意味を考察しよう。まず、次に注意する：

> 現代幾何学の重要公式は、左辺が多様体の大局的不変量（オイラー数など）、右辺がその多様体の局所的不変量の和（あるいは積分）で表されることが多い。

たとえば、ポアンカレ・ホップの公式やガウス・ボンネの公式（指数定理）。ここで、多様体 M に対するポアンカレ・ホップの公式は次で与えられる：

$$\chi(M) = \sum_i \mathrm{Ind}_i(X). \tag{1.8}$$

ただし、$\chi(M)$ は M のオイラー数、X は M 上の（零点が孤立している）ベクトル場で、右辺は、ベクトル場 X の零点における指数の和である。同じく、われわれの相乗的位数公式

$$|H||A_1||A_2|\cdots|A_n||K| = \sum_{i=1}^{l} m^{(i)}|H \cap K^{\alpha^{(i)}}| \tag{1.9}$$

も、右辺が "局所不変量" の足し上げである—これは、$|H||A_1||A_2|\cdots|A_n||K|$ が $HA_1A_2\cdots A_nK$ の "オイラー数のようなもの" であることを示唆している。

なお、ポアンカレ・ホップの公式のベクトル場として、モース関数 $f : M \to \mathbb{R}$ の定める勾配ベクトル場 X_f を取ることができる（これは M にリーマン計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を与えると定まる[1]）。このとき、X_f の零点は f の臨界点に一致する。さらに、そこでの X_f の指数は f の "二次の部分"（ヘッセ行列）から定まる：ヘッセ行列式が正ならば $+1$、負ならば -1 ([Tha] p.33 Theorem 8.34 の証明参照)。このようにして、モース関数 f の "二次の部分" から多様体 M のオイラー数が決まるが、より強く M の位相型までもが決定される[2]（モース理論）。これは、われわれの相乗的位数公式の導出においても、シナジー (1.7) の "二次の部分"（両側コセット）が活躍することや、シナジーの構造自体も "二次の部分" に基づいて決定されること（シナジーの構造定理）に似ている。

以上を念頭に置いて、

スローガン 3.　群論は、モース理論と似た側面をも持っている。

補足 1.2. (1) 上で、モース関数 $f : M \to \mathbb{R}$ とシナジー $\pi :\ H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K \to HA_1A_2\cdots A_nK$ との類似性を述べたが、モース関数は多様体 M を調べるために導入されたのに対し、シナジーは像 $HA_1A_2\cdots A_nK$ を調べるために導入した（直積 $H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K$ を調べるためではない）。**主客転倒しているのである。**

(2) (1) を念頭に置くと、シナジーはむしろ多様体 M 上の層 $p : \mathcal{S} \to M$ に比せられる。実際、層からは多様体 M の不変量やそれらの間の公式が生み出されるが、シナジーもそうである—後述する「シナジーの第一・第二構造定理」の帰結として、さまざまな組み合わせ的公式がシナジーから生み出される。

(3) 幾何学では、まず空間に位相が定まっていて（つまり、"局所" が定まっていて）、しかるのちに空間上の写像の連続性が議論されるが、高次群論では真逆である。写像（シナジー）が与えられた後に、"局所"（正確には、"局所もどき" だが）が定まるのである（補足 6.2）。**"局所" と "写像" が、主客転倒しているのである。**

その他の「主客転倒」は比較 2.4 参照。

[1] M 上の任意のベクトル場 Y に対し、$\langle X_f, Y\rangle = Yf$ となるベクトル場 X_f が、f の勾配ベクトル場。ミルナー『モース理論』（吉岡書店）p.16 参照。

[2] オイラー数の決定のときよりも細かい情報—ヘッセ行列式ではなく、ヘッセ行列自身の情報（負の固有値の個数）を使う。この個数が「f の臨界点での指数」である（用心：これは「ベクトル場 X_f の零点での指数」とは異なる）。

ベズー型定理および関連する諸結果について、より詳しくは [Ta10], [Ta11] を参照されたい。以下では、まず §2 で高次群論に至る道筋を概念史と共振させながら概説する。次に §3 で**群論版の双曲線**を導入し、その "高次群論的" 変形族を（代数幾何の変形族と比べつつ）解説する—高次群論とその幾何学の一端がかなりわかりやすく伝わるのではと期待している。

先に進む前に、少しコメントしておく。まず、数学において「ワザ」の重要性は言うまでもない。問題を解くときに不可欠である。しかし、「ワザ」が威力を発揮するのは、すでに "道" がある場合で、何も "道" が無い場合、つまり、公式はおろか概念、記号、用語など何もない段階では、荒野にポツンと佇（たたず）んで、どっちに行けばいいのだろうかと方向性を模索するようなもので、「ワザ」は威力を発揮できない[3]。

このときに、「ワザ」に取って代わり、道しるべとなるのは何であろうか。

それは、「数学的自然性」（の追究）である。これは、アプリオリに都合よく与えられているものでは全くなく、過去の数学の流れに目を向けて、自分なりの洞察光をさまざまな角度から当てて、その跳ね返り具合から方向性を探ることにより獲得するものである—ライトをパッと当てるというよりも、ロウソクの炎で丹念に照らし出すようにして。そして、それに立脚した上で、研究対象へ考察波を何度も何度もぶつけて "障害" を突き崩したり、角（かど）を丸くしたり、小さくしたりするわけである—海岸線に打ち寄せる波が、砕けても砕けても、次第に岩壁を削り、最後には打ち砕くように。

以上を念頭に置いて、次節では "土台 of 土台"（土台の中の土台）に関することに、さまざまな角度から洞察光を当てて、その跳ね返りを探りつつ、「群論の幾何化」に関する背景や私の考察を俯瞰的に述べる。なお、以下で論ずる「群論の幾何化」は、幾何的群論とは無関係である。後者は主として離散群を研究対象とするが[4]、われわれは群に制約をつけない。

2　群の "幾何化" への道を探る—洞察光の跳ね返りを見極めつつ

まずは、かつての私の次の問いかけから始める。

代数学の「片翼性」—可換環は幾何化されているのに、群はなぜ幾何化されていないのか？

このことは、学生時代に気になって以来、繰り返し考えてきたが、根源的には次のような理由に根ざしているのではないかと考えている。可換環は、もともと空間上の関数全体がプロトタイプである。一方、群は空間の対称性（対称変換）全体がプロトタイプである。両者とも空間に attach した概念であるが、その attach の仕方は本質的に異なっている。関数の場合は、空間の位相や距

[3] この事情は、将棋のワザを磨きぬいた「将棋のプロ」と「将棋というゲームを創った人」がまったく別者であるのと同じである。

[4] 離散群に対しては、位相よりも強く「距離」が入る—離散群のケーレーグラフの頂点集合は、離散群と同一視できるので、グラフの距離（2 点を結ぶ最短経路の辺の個数）が、離散群の距離を与える。この距離を通じて離散群を研究するのが幾何的群論である。ただしこの理論は、（可換環論の幾何化である）スキーム論の "群論的対応物" ではない。まず、離散群に限られ、すべての群を扱っていない（一方、スキーム論はすべての可換環を扱う）。また、ケーレーグラフを定める際に、離散群の生成系を指定する「人為」が加わっている（可換環のザリスキ位相を定める際、生成系を指定する必要なし）。さらに、スキーム論の構造層にあたるような「上部構造」がない。

離が効いている (たとえば、ε-δ 論法)。対称変換の場合、空間における「遠・近」は（関数の場合のような）意味をもたない。実際、対称変換（たとえば鏡映）により、遠くの点が近くの点にうつったり、近くの点が遠くの点にうつったりする。

空間上の関数（可換環の元）	空間の対称変換（群の元）
遠近を意識 (たとえば、ε-δ 論法)	遠近を意識しない (遠点が近点にうつり、逆に、 近点が遠点にうつることも)

直観的な言い方をすれば、関数は、空間に堅く縛りつけられている（“固着的”）。もっと言うと、空間上の関数のなす可換環は、空間と一体化している—実際、可換環から空間を復元できる（ゲルファント・ナイマルク (Gelfand–Naimark) の定理)。一方、対称変換は、関数のように空間に縛りつけられてはおらず、それとは真逆に、空間を動かしまわる存在である（“駆動的”）。ただし、「まず空間ありき、しかるのちに対称変換ありき」なので、対称変換群は、（可換環と違って）空間を復元しない。そうかと言って、二義的な存在で重要度が低いというわけではない。そもそも群と可換環では、空間に対するスタンスが違うのである：

> **可換環が「空間と一体化している」のに対し、群は空間から一歩引いて「空間を冷徹に俯瞰し、動かす」というスタンスである—その “黒幕性” ゆえ、群の概念の発見・定式化には時間を要したのであろう。**

$$\begin{cases} \text{可換環} = \text{固着的（静）、空間の化身—incarnation,} \\ \text{群} = \text{駆動的（動）、空間を操る（操作する）黒幕—mastermind.} \end{cases}$$

以上のような違いが、可換環と群の「幾何」のありようの違いを生じさせていると考えられる。したがって、それらの記述の仕方は原理的に異ならざるを得ないと推測される。

対称性の「座標」としての群

時代を遡って古典的な地点から、別の観点で「群」を眺めてみる—デカルトから始まり多項式の零点集合を研究する “古典的な”[5]代数幾何へ至る流れと対比させ、「群」をわれわれの観点で見直していく。デカルトにより先鞭を付けられた、「図形に『目盛り』を入れて計量化する」という考え方は人間にとって普遍的で強力な思考支援ツールであり、なにも図形自体の計量化にとどまる必然性はない。誤解を恐れずに言うと、

図形の「対称性」に目盛りを入れたものが、群である。

アプリオリには、図形の「対称性」は漠とした代物で、数学的な扱いにはなじまないが、群という「目盛り」を入れることによって数学的に扱えるようになるのである—無明を突き破る。しかも、この “計量化” は、単に「数学的に扱える」ことをもたらすだけではなく、その後の発展のポテンシャルになっている。空間の計量化と対称性の計量化を、この観点からもう少し見てみる。

[5]スキーム論以前の代数幾何。古典的な代数幾何では多項式環しか扱わないが、スキーム論は可換環全般を扱う。

空間の計量化　“原っぱ”（平面）にはもともと目盛り（座標）はないが、人為的に座標を入れることにより、位置情報が「計量化」され、式的思考を後押しする。そして、多項式の零点集合として、さまざまな図形が考察の対象となり、幾何の裾野を広げていく。ここから「代数幾何」という分野が起ち上がる。そこからは一本調子で、古典的な代数幾何の発展が続く—ただし、“議論のあいまいさ” が壁となって立ちはだかるまでではあるが[6]。古典的な解析学の厳密化がある時点で必然となったように、古典的な代数幾何でも、厳密な議論が必要となる段階に達し、新たな「知」の導入が不可欠となった。そこで可換環論が登場する—これを取り込んでいく初期の段階が過ぎたあと、幾何的な思考法が可換環論へ「逆輸入」され、可換環論の幾何化が強力に押し進められた（グロタンディークら）。

空間の対称性の計量化　まず、強調しておきたいのは、

> 図形の「対称性」には、原っぱのごとく何ら目盛りのようなものが入っていない。そのままでは、数学的な対象にはなりえない。

しかし、「対称性」に目盛りを入れたもの—群—は数学的に扱えるようになる。たとえば、正五角形の「対称性」の場合、下の図 1 (2) の二つの対称変換 a と b ($2\pi/5$ 回転と対称軸に関する折り返し) により、任意の対称変換は a^ib^j の形に表せる (i, j は整数で、$0 \leq i \leq 4$, $j = 0$ or 1)。したがって、a と b は「対称性」の “目盛り” とみなせて、

> 正五角形の「対称性」は「a と b で生成される群」として数学的に扱うことができる。

ここで、a と b は関係式 $b^{-1}ab = a^{-1}$, $a^5 = 1$, $b^2 = 1$ をみたす。**このように、「対称性」が群として “式化” され、式的思考を後押しする。**

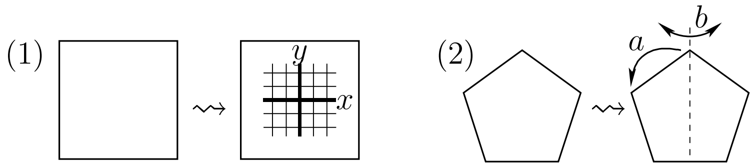

図 1: (1): 原っぱに目盛り (座標) を入れると、任意の点は (x, y) の形に表せる。(2): 正五角形の「対称性」に目盛りを入れると、任意の対称変換は a^ib^j の形に表せる (i, j は整数で、$0 \leq i \leq 4$, $j = 0$ or 1)。注：(i, j) が (x, y) に相当する。

補足 2.1. 正確に言うと、「空間の対称性に “目盛り” を入れる」は「群の “生成系” を取る」である。そして、これは「ベクトル空間の “基底” を取る」に相当する。

振り返ってみると、「目盛りを入れる」というのは、人間にとって、強力な思考支援ツールではあるが、**「空間に直接目盛りを入れる代数幾何」と「空間の対称性に目盛りを入れる群論」とでは空間とのかかわり方が異なる—後者では、ワンクッション置いている。**この違いが可換環の幾何である代数幾何と群の幾何との “様式” の違いを生み出す。

[6]たとえば、ベズーの定理の “厳密な” 証明が求められるようになった。これには、代数多様体の（幾何的な直感によらない）交点理論を確立することが必要であった。代数多様体上の “現代的な” 交点理論は、可換環論のみならず、代数多様体の上部構造である「層」を駆使する（代数曲面の場合は比較 2.5 参照）。**奇しくも、高次群論においても、「ベズー型定理」を定式化し示すためには、上部構造 “シナジー” の導入が不可欠であった。**[Ta10] 参照。

観察　デカルト、ガロアの両者とも、直観的対象の「計量化」（あるいは「式化」と言ってもよい）を行っている—前者は「平面」の、後者は「対称性」の計量化で、これらにより、人間の認識の地平が大幅に広がった：

- 平面座標が導入されたことにより、人間が "数学的に" 扱える図形が限りなく増えた。それまでは、直線や平面などまっすぐな図形以外は、円、楕円、双曲線、放物線など、円錐曲線たちに限られていたが、こういった一次、二次の図形を越えて一般の n 次式で定められる図形も俎上（そじょう）に上るようになった。

- 図形の「対称性」の計量化により、多種多様な群を生み出すことになった（図形ごとに）。ただし、座標平面がタブラ・ラサとも言うべき真っ白なキャンバス（"容れ物"）で、いろいろな図形が後天的に式の零点として描かれるのに対し、群の場合は、「座標（生成系）」のみならず、関係式も先天的に与えられている。また、タブラ・ラサ的 "容れ物" が群たちにあるわけではなく、個々の群は独立している存在である—と言っても、群たちは準同型により「つながっている」ので、個々の群が孤立しているわけではない（圏論的なネットワークが "容れ物" になっている）。

平面に目盛りを入れて「計量化」（座標） —デカルト	図形の対称性に目盛りを入れて「計量化」（群） —ガロア
平面上に、式によって図形が自由に定まる。	群は、関係式によって束縛されている。
式によって定まる図形の研究（古典的な代数幾何）	さまざまな群の研究（古典的な群論）
可換環論の幾何（スキーム論）	高次群論とその幾何 ??

群のナイーブな幾何化に欠けているもの—マクロな情報

平面に目盛り (x, y) を入れた場合と違い、群にはアプリオリに、関係式という "代数幾何的なもの"（図形の定義式のアナロジー）が入っている（たとえば、上の図 1 (2) の正五角形の対称変換群の例では、関係式 $b^{-1}ab = a^{-1}$, $a^5 = 1$, $b^2 = 1$）。このとき、

【素朴なアプローチ】　群の関係式という "代数幾何的なもの" に着目して幾何を展開できないか？

を考えるのはごく自然である。しかしながら、こういう素朴なアプローチで「群の代数幾何」みたいなものを展開しようとしても、あまりに素朴過ぎて、少なくとも本家の代数幾何のような壮大な理論体系は望むべくもない[7]。

何が違うのであろうか？

それはマクロな情報においてである。可換環の場合、イデアルの積 IJ は再びイデアルになる（つまり、イデアルの世界は積で閉じている）。一方、群の場合、部分群の積 $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ は一般に部分群にはなっておらず、群の世界からハミ出している（つまり、部分群の世界は積で閉じてい

[7] 離散群に対しては、群の関係式に基づいた「幾何」が展開できるが（[Ol's] 参照）、群全般に対してではない。一方、代数幾何のスキーム論は、可換環全般を扱う。

ない)。より一般に、n 個の部分群たちの積 $H_1H_2\cdots H_n=\{h_1h_2\cdots h_n : h_i\in H_i\ (i=1,2,\ldots,n)\}$ は、n が大きくなるにつれ、一般に群の世界から激しくハミ出していく—古典的な群論の対象である部分群やコセットからはほど遠い存在になる。**こういった “ハミ出しもの” を、上の【素朴なアプローチ】では考慮していない—それゆえ群の性質を十分に引き出せない。**一方、高次群論はこれら “ハミ出しもの” もひっくるめて「定性的かつ幾何的に」記述する。

補足 2.2. HK が部分群になる必要十分条件は、$HK=KH$ が成り立つことである。これは “マクロな可換性” である。この条件はベクトル場の「可積分条件」$[X,Y]=0$、つまり $XY-YX=0$ に類似している。この観点からは、$HK=KH$ は「可部分群条件」である。

この節のまとめ

われわれが “群のマクロな構造 (高次構造)” にスポットライトを照てるのは、一義的には次の観察に基づいている：

可換環と（非可換）群の質的な違いがあらわになるのは、マクロにおいてである。

両者は（マクロの）低次部分ですら大きく異なる—群においては（マクロで）一次のものは部分群以外にコセットがあるが、可換環においては（マクロで）一次のものはイデアルしかない。実際、コセット aH は、$a\notin H$ のときは部分群ではなく、$aH\neq H$ であるが、イデアルのスカラー倍 rI は、$rI=I$ ゆえ、イデアルのままである。さらに、群においては両側コセット HaK （これは二次）が重要な役割を果たすが（マッキー関手、バーンサイド環など)、可換環にはこれに相当するものが存在しない。実際、可換環の部分集合 IrJ (I,J: イデアル、r: 可換環の元) はイデアルなので、一次のままである。一次と一次を掛け合わせても二次にはならず、一次のままなのである。このため、**可換環には（マクロで）“二次 (以上)” のものが存在しない。**対比表を挙げておこう：

可換環（マクロ的には一次）	非可換群（マクロ的には高次）
スカラー倍イデアル rI（一次）は イデアル（I に一致）	コセット aH（一次）は 一般に部分群ではない（H とは異なる）
IrJ はイデアル（一次）	HaK は両側コセット（二次）
スカラー倍イデアルの積 $r_1I_1r_2I_2\cdots r_nI_n$ は イデアル（一次）	コセットの積 $a_1H_1a_2H_2\cdots a_nH_n$ は クラン（n 次）

念のため、次の対比も挙げておく：

可換環（マクロ的には一次）	非可換群（マクロ的には高次）
イデアル I（一次）	部分群 H（一次）
イデアルの積 $I_1I_2\cdots I_n$ は イデアル（一次）	部分群の積 $H_1H_2\cdots H_n$ は セクト（n 次）

補足 2.3. 「非可換」環の意義については、梅田亨氏が次のように述べておられる。

> 可換環は「幾何学的」な対象と直接結びつく代数的な構造物と看做せる。より一般的な非可換環は、その解釈から言えば、幾何学的な点の「運動」を取り込んだ代数的な構造物となる。
>
> 梅田亨『代数の考え方』p.146（放送大学教育振興会）

われわれが、群のマクロな構造（高次構造）を考える哲学的な理由は次の通り：人間社会では個々の人がランダムにふるまっても、集団としてみると（不思議なことに）行動に規則性がみられ、特有の「法則」が成り立つ。これは社会学的視点だが、非生物的な粒子でも同様である。**ミクロ（粒子）はランダムにふるまうが、マクロ（気体）としてみると、規則性が生じ、マクロ特有の「法則」が成り立つ**（統計力学)。群の場合にもこういった現象が起こっているのではないかと考えたのである—ミクロ（群の元の積）だけを見ている限りでは見えてこない「法則」や「幾何」が、マクロ（部分群の積、コセットの積など）を見ることにより浮かび上がってくるのではないか、と。

> メロディーは単なる音の寄せ集めではなく、音のつながり方が大切である。文学作品も然りで、単に文字の集まりではなく、文字のつながり方が大切である。幾何も同様で、空間は開集合のつながり具合—くだけた言い方をすれば「近い・遠い」—が重要である。では、「近い・遠い」なしで幾何が展開できないだろうか。この疑問は群の幾何学を構想する際に真っ先にぶつかった。「近い・遠い」に取って代わるものは何だろうか、と。試行錯誤の末に見えてきたのが「ミクロ・マクロ」である。

曲を聴いているときや小説を読んでいるとき、あたかも “立体的に” 起伏があるように感じられることがある—幾何がないのに、“幾何的なもの” を感じてしまう。思うに、人間にとって、幾何というのは二通りあって、通常の意味の “空間的な幾何” と、メロディーのつらなりや文字のつらなりなどから立ち現れる “幾何めいたもの”。可換環論の幾何（代数幾何、スキーム論）は前者であり、高次群論の幾何は、敢えて言えば後者である。と書いたものの、それにもかかわらず両者には、類似の定理や現象がある。これは不思議である。立ち止まって考察してみよう。

代数幾何の教科書では、ベズーの定理に続いて、「曲線束」（ペンシルとも言う）がしばしば導入される。たとえば、複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の中の 2 つの二次曲線 C と D は、ベズーの定理より（重複も込めて）4 点で交わるが、この 4 点を通る曲線族は $\lambda C + \mu D$ （ここで、λ, μ はパラメータ) で与えられる。次に、$\mathbb{CP}^2$ をこの 4 点でブローアップすると、互いに交わらない代数曲線の族ができる。この描像を写像を使って定式化すると次のようになる。ブローアップしてできた代数曲面を S とすると、パラメータ空間への射影 $\pi : S \to T$ が「代数曲線の族」である—各ファイバーが（二次の）代数曲線である。つまり、代数幾何では、ベズーの定理から代数曲線の族へとつながる流れである。一方、高次群論では、逆の流れである。ベズー型定理は、族（シナジー）から産み落とされる。

比較 2.4. まとめておくと、

> **高次群論の辿る道筋は、代数幾何とは真逆である。高次群論では、「族（シナジー）」から出発し、しかるのちに「ベズー型定理」が示される。一方、代数幾何では、「ベズーの定理」を示した後に、「代数曲線の族（ペンシル）」が導入される。**

これは一種の “主客転倒” である（その他の “主客転倒” 現象は、補足 1.2 参照)。

交点理論と上部構造のかかわりについても比較しておく。

比較 2.5. われわれの “交点公式” (相乗的位数公式 (1.4)) は、上部構造（シナジー）を使って定式化され示された。一方、現代的な代数幾何の交点理論でも上部構造を使う。たとえば、代数曲面 S 上の代数曲線 C と D の交点数 $C \cdot D$ は、直線束の次数（チャーン数）により与えることができる。まず、D を S 上の因子 (divisor) とみて、D が定める S 上の直線束を L とする。これの C への制限 $L|_C$ は C 上の直線束である—その次数（チャーン数）が、C と D の交点数 $C \cdot D$ に一致する（[上野] p.51 参照）： $C \cdot D = \deg(L|_C)$. L の代わりに、C が定める S 上の直線束 M を取っても同様である： $C \cdot D = \deg(M|_D)$. **このように現代的な視点で見ると、交点数は “特性類” と関係しているのである。**

3 「群論版双曲線の族」から高次群論へ

見えたる光いまだ消えざるうちに言い留むべし

芭蕉（三冊子）

ここからは話がガラッと変わって、具体的な話に移る。高次群論とその幾何学の一端を、研究の産地から直接、鮮度を保って届けたい（“産直数学”）。どういう素材から始めると面白さが伝わるか考えてみたところ、「群論版の双曲線」を導入して、それに基づいて幾何的に（代数幾何と比べながら）説明するのがよいと思う。まず、前振りとして $\mathbb{R}^2$ の中の双曲線 $xy = r$ $(r \geq 0)$ を考える。r をパラメータとみて動かすと、$r \neq 0$ のときは双曲線だが、$r = 0$ のときは十字架 (x 軸と y 軸の和) につぶれる—原点が特異点になっている。

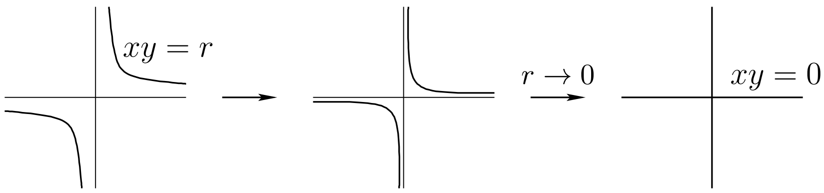

図 2: 双曲線 $xy = r$ の変形族 ($r \in \mathbb{R}$ はパラメータ).

上の描像を複素化する。$\mathbb{C}^2$ の中の “複素双曲線” $zw = t$ (ここで、$(z, w) \in \mathbb{C}^2$, $t \in \mathbb{C}$) は、“実双曲線”$xy = r$ $(r := |t|)$ を「グルっと回して」できた図形になっている[8] 。ただし、$t = 0$ のときは十字架をグルッと回したもの。これらはリーマン面（代数曲線）で、$t \to 0$ のとき、図 3 のようにつぶれていく。

[8]極座標表示 $z = xe^{\mathrm{i}\alpha}, w = ye^{\mathrm{i}\beta}, t = re^{\mathrm{i}\theta}$ を取ると (θ は固定)、$zw = t$ の実部、虚部はそれぞれ $xy = r$, $e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = e^{\mathrm{i}\theta}$. 前者は実双曲線。また、後者より $\alpha+\beta \equiv \theta \bmod 2\pi$, つまり $\beta \equiv -\alpha+\theta \bmod 2\pi$. したがって、$(z, w) = (xe^{\mathrm{i}\alpha}, ye^{\mathrm{i}(-\alpha+\theta)})$. ここで、回転パラメータは α のみ（θ は固定されている）。α を 0 から 2π まで動かすと、実双曲線 $xy = r$ が「グルッと回って」複素双曲線 $zw = t$ になる。

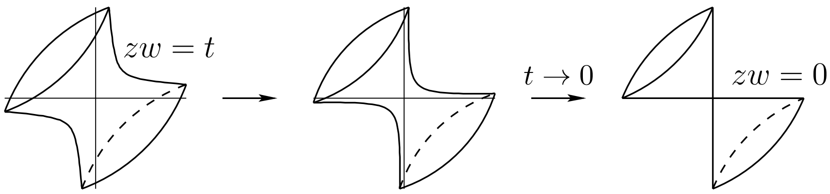

図 3: 複素双曲線 $zw = t$ の変形族 ($t \in \mathbb{C}$ はパラメータ). この図の "実断面" が図 2。

図 3 の描写を、写像を使って定式化し直す。まず、写像 $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を $\pi(z, w) = zw$ で定める。すると、ファイバー $\pi^{-1}(t)$ は $\mathbb{C}^2$ の中の図形 $zw = t$ である。ここで、$t \neq 0$ のとき、複素双曲線 $\pi^{-1}(t)$ は**なめらかファイバー** (or **一般ファイバー**)、複素十字架 $\pi^{-1}(0)$ は**特異ファイバー**である。

「群論版の双曲線」とその族 (1-parameter family)

次に、"群論版の双曲線" を導入する。まず、群 G の部分群 H と K の、次のような "積" を考える（用心：一般に直積ではない）:

$$HK := \{hk : h \in H, k \in K\}. \tag{3.1}$$

これは、G の（部分群とは限らない）部分集合である。

定義 3.1. $t \in HK$ に対し、$hk = t$ をみたす $(h, k) \in H \times K$ たちの集合

$$C_t := \{(h, k) \in H \times K : hk = t\} \tag{3.2}$$

を**群論版の双曲線**という。

$t \in HK$ をパラメータとみて動かすと、群論版双曲線 C_t の「族」が得られる。これを（代数幾何の場合のように）写像を使って定式化する。まず、写像 $\pi : H \times K \to HK$ を $\pi(h, k) = hk$ で定める。このとき、各 $t \in HK$ に対し、ファイバー $\pi^{-1}(t)$ が群論版双曲線 C_t: $hk = t$ である。対照表を与えておく。

	代数幾何	群論
双曲線	$zw = t$ in $\mathbb{C}^2$	$hk = t$ in $H \times K$
パラメータ空間	$\mathbb{C}$	HK
写像	$\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ $(z, w) \mapsto zw$	$\pi : H \times K \to HK$ $(h, k) \mapsto hk$

以上は "幾何的描像" であるが、群論版双曲線は "代数的描像" も持つ。まず、各 $t \in HK$ は、（定義より）少なくとも一通りは $t = hk$ ($(h, k) \in H \times K$) の形に表されることに注意する。これを t の**表示**という。このとき、

$t \in HK$ の表示全体の集合が、群論版双曲線 $C_t = \{(h, k) \in H \times K : hk = t\}$ である。

群論版双曲線は、このような代数的解釈を持つので、t の表示問題は、群論版双曲線を経由して幾何的な問題に翻訳される。**これは、群の元の表示問題（"純" 群論的）を「定性的に幾何的に記述する」という視点を生む。**

また、動的な問題として、$t \in HK$ をパラメータとみて動かしたとき、t の表示全体の集合がどのように変化するか、という「動」代数的問題を考えることができる。これは、ファイバー $\pi^{-1}(t)$ がどのように変化するか、という「動」幾何的な問題に翻訳される（パラメータ族の記述問題)。

問 1　$t \in HK$ をパラメータとみて動かしたとき、$\pi : H \times K \to HK$ のファイバー $\pi^{-1}(t)$ はどのように変化するか？

また、複素双曲線族 $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ (z,w) \mapsto zw$ が、原点 $0 \in \mathbb{C}$ 上に特異ファイバー $\pi^{-1}(0)$ を持つことを念頭に置くと、自然に次の疑問が湧く：

問 2　$\pi : H \times K \to HK,\ (h,k) \mapsto hk$ に対し、単位元 $e \in HK$ 上のファイバー $\pi^{-1}(e)$ は "特異ファイバー" か？ (注：HK は e を含む。実際 $e = ee \in HK$.)

実は、写像 $\pi : H \times K \to HK$, $\pi(h,k) = hk$ は、図 3 のような代数幾何の場合の描像とはかなり異なった描像をもつ—単なるパラメータ族ではなく、「等質ファイバー束」になっている。このことをみるために、まず次に注意する。

観察　各 $hk \in HK$ $(h \in H,\ k \in K)$ に対し、

$$\pi^{-1}(hk) = \bigl\{(h\gamma^{-1}, \gamma k) \,:\, \gamma \in H \cap K\bigr\}. \tag{3.3}$$

ここで、$(h', k') \in \pi^{-1}(hk)$ に対し、$(h', k') = (h\gamma^{-1}, \gamma k)$ を満たす $\gamma \in H \cap K$ がただ一つ存在する。したがって、対応 $(h', k') \in \pi^{-1}(hk) \longleftrightarrow \gamma \in H \cap K$ により、$\pi^{-1}(hk)$ $(hk \in HK)$ は群 $H \cap K$ に "集合として"bijective であることがわかる（ただし、一般には "群として"isomorphic ではない；そもそも $\pi^{-1}(hk)$ には一般に群構造が入っていない)。

(3.3) を念頭に置いて、群 $H \cap K$ を $H \times K$ に次のように作用させる（これは左作用）： 各 $\gamma \in H \cap K$ に対し、

$$(h,k) \in H \times K \longmapsto (h\gamma^{-1}, \gamma k) \in H \times K. \tag{3.4}$$

写像 $\pi : H \times K \to HK$ の各ファイバーは、この群作用の軌道になっている ((3.3) より)。さらに、この写像は次の可換図式を通じて、商写像 $q : H \times K \to (H \times K)/(H \cap K)$ とみなせる（下の記号 $[h,k]$ は、$(h,k) \in H \times K$ の q による像を表す)：

$$\begin{tikzcd}
 & (h,k) \in H \times K \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
{[h,k]} \in (H \times K)/(H \cap K) \arrow[rr, "\cong"'] & & hk \in HK.
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

さて、写像 $\pi : H \times K \to HK$ についての上の議論では (H と K が群であるにもかかわらず) $H \times K$ を単に集合として扱ってきた。以下では、次の積で $H \times K$ に群構造を入れておく (単位元は (e,e)):

$$(h', k'), (h,k) \in H \times K \text{ に対し、} (h', k') \cdot (h,k) := (hh', k'k). \tag{3.6}$$

このとき $H \cap K$ は、単射準同型

$$H \cap K \hookrightarrow H \times K, \quad \gamma \mapsto (\gamma^{-1}, \gamma) \tag{3.7}$$

により、群 $H \times K$ の部分群とみなすことができる。このとき $H \cap K$ 作用 (3.4) は、部分群 $H \cap K$ の群 $H \times K$ への（左からの）かけ算になっている。よって、商写像 $q : H \times K \to (H \times K)/(H \cap K)$ は、剰余写像 (residue map)—「等質ファイバー束」—である（用語については下の補足 3.3 参照)。以上をまとめておく：

命題 3.2. $\pi : H \times K \to HK$ は商写像 $q : H \times K \to (H \times K)/(H \cap K)$ と同一視できる。また、後者は剰余写像 (residue map)—「等質ファイバー束」—である。

補足 3.3. 本稿では、用語（“商写像” と “剰余写像”）を次のように使い分ける：

(i) ある群 H が集合あるいは空間 X に作用しているとき、**商写像** (quotient map) $q : X \to X/H$ が定まる。

(ii) (i) において、X が群 G であり, H が G の部分群、H の G への作用が（左または右からの）かけ算である場合、商写像 $q : G \to G/H$ を、とくに**剰余写像** (residue map) と言う。

(ii)′ 剰余写像を（広い意味の）**等質ファイバー束** (homogeneous fiber bundle) とも言う (G がリー群、H がその閉部分群のとき、G/H は等質空間、$q : G \to G/H$ は等質ファイバー束であることを踏まえて)。

観察　群作用 (3.4) はフリーなので、すべての軌道（つまりファイバー）は $H \cap K$ に同型である（等質 $H \cap K$ 束)。したがって、ファイバーの退化は起こっていない—**特異ファイバー (singular fiber) は無い。ただし、単位元 $e \in HK$ 上のファイバー $\pi^{-1}(e)$ は特殊ファイバー (special fiber) である。**実際、他の元の上のファイバー $\pi^{-1}(t)$ $(t \in HK \setminus \{e\})$ は $H \times K$ の部分群ではなく、単に部分集合で、集合として $H \cap K$ に bijective になっているだけだが、e 上のファイバー $\pi^{-1}(e)$ については次が成り立つ：

補題 3.4. $\pi^{-1}(e)$ は $H \times K$ の部分群になっており、$H \cap K$ に群として isomorphic である。

証明. 実際、$\pi^{-1}(e)$ は単射準同型 (3.7) $\gamma \in H \cap K \mapsto (\gamma^{-1}, \gamma) \in H \times K$ の像になっている。これは次のようにわかる。まず、(3.3) において、$h = k = e$ のとき $\pi^{-1}(ee) = \{(e\gamma^{-1}, \gamma e) : \gamma \in H \cap K\}$. つまり、

$$\pi^{-1}(e) = \{(\gamma^{-1}, \gamma) : \gamma \in H \cap K\}. \tag{3.8}$$

右辺は、単射準同型 $\gamma \in H \cap K \mapsto (\gamma^{-1}, \gamma) \in H \times K$ の像にほかならない。 □

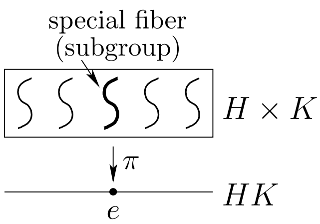

図 4: $\pi : H \times K \to HK$, $\pi(h, k) = hk$ は、$\pi^{-1}(e)$ が特 “殊” ファイバー。

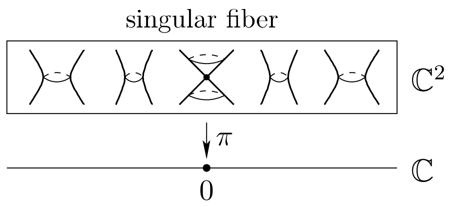

図 5: $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\pi(z, w) = zw$ は、$\pi^{-1}(0)$ が特 "異" ファイバー。

ファイバーの特殊性を込めた対照表を与えておく。

	代数幾何	群論
双曲線	$zw = t$ in $\mathbb{C}^2$	$hk = t$ in $H \times K$
パラメータ空間	$\mathbb{C}$	HK
写像	$\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ $(z, w) \mapsto zw$	$\pi : H \times K \to HK$ $(h, k) \mapsto hk$
特別なファイバー	$\pi^{-1}(0)$: 特異ファイバー ($(0, 0) \in \pi^{-1}(0)$ は特異点)	$\pi^{-1}(e)$: 特殊ファイバー (他のファイバーと違って、$\pi^{-1}(e)$ は群 $H \times K$ の部分群)

上の写像 $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto zw$ は二次の多項式写像である。これに倣(なら)って言うと、

> **写像** $\pi : H \times K \to HK$**,** $(h, k) \mapsto hk$ **は高次群論における二次の写像である（なお、**HK **は高次群論では二次）。**

この写像を一般化した次の 3 つの写像は高次群論で基本的な役割を果たす（以下、$a, b_1, b_2, \ldots, b_l, c, d$ は群 G の元）：

(I) **両側コセット・シナジー** (synergy[9])
$\sigma :\ H \times \{a\} \times K \longrightarrow HaK,\ (h, a, k) \longmapsto hak.$
これは剰余写像（等質ファイバー束）とみなせる—ここで、「みなせる」というのは、図 (3.5) のような可換図式を通じてである（以下、同じ）。σ の任意のファイバーは $H \cap K^a$ に bijective である。

(II) **両側コセット・テルファー** (telfer[10])
$\tau :\ H \times \{(b_1, b_2, \ldots, b_l)\} \times K \longrightarrow Hb_1b_2 \cdots b_lK,\ \big(h, (b_1, b_2, \ldots, b_l), k\big) \longmapsto hb_1b_2 \cdots b_lk.$
これは剰余写像（等質ファイバー束）とみなせる。τ の任意のファイバーは $H \cap K^b$ ($b := b_1b_2 \cdots b_l$) に bijective である。

(III) **両側コセット・テラジー** (telergy[11])
$\mu :\ Hc \times \{(b_1, b_2, \ldots, b_l)\} \times dK \longrightarrow Hcb_1b_2 \cdots b_ldK,\ \big(hc, (b_1, b_2, \ldots, b_l), dk\big) \mapsto hcb_1b_2 \cdots b_ldk.$
これは一般に剰余写像とはみなせないが、商写像とみなせる。実際、$Hc \times \{(b_1, b_2, \ldots, b_l)\} \times$

[9] 相乗効果・相乗作用：syn + elergy（共に + 働く）
[10] 吊り上げてケーブルに沿って運ぶ装置：tele + pherein（遠隔 + 運ぶ）ここでは、$\{(b_1, b_2, \ldots, b_l)\}$ をケーブルに見立てている。
[11] 遠隔作用：tele + elergy（遠隔 + 働く）

dK への群 $H^{c^{-1}} \cap K^{bd}$ $(b := b_1 b_2 \cdots b_l)$ の作用による商写像とみなせる。μ の任意のファイバーは $H^{c^{-1}} \cap K^{bd}$ に bijective である。

われわれがシナジーのファイバーにこだわる理由

一言で言うと、**それが（群についての）新しい組み合わせ的公式の導出につながる**からである。簡単な例で言えば、両側コセット・シナジー $\sigma\colon H \times \{a\} \times K \longrightarrow HaK$ から両側コセット HaK の古典的な位数公式が導かれる。実際、σ の任意のファイバーが $H \cap K^a$ に bijective であることから、$H \times \{a\} \times K$ の元の個数は、$H \cap K^a$ の元の個数と HaK の元の個数の積に等しい。つまり、次の関係式が成り立つ（ただし、H と K は有限とする—このとき $H \times \{a\} \times K$, HaK, $H \cap K^a$ も有限）：

$$|H \times \{a\} \times K| = |HaK||H \cap K^a|. \tag{3.9}$$

すなわち $|H||K| = |HaK||H \cap K^a|$. よって $|HaK| = |H||K|/|H \cap K^a|$. これは、両側コセット HaK の古典的な位数公式にほかならない。**このような数え上げ議論 (counting argument[12]) により、高次群論では、シナジーから新しい組み合わせ的公式がザクザク得られる。**

4 ‘高次元化’

動中の静　静中の動

概して、人間は「静止」が苦手である。身体的にも、座禅のような長時間の静止行為は苦痛を伴う。思考的にも、静よりも動の方が認識しやすい。実際、物理学の発展も、まずは静よりも動の中に基本原理を見出してきた。群に対する我々のアプローチも、

“動きの中で” 群の特性を把握する

というものである。これは、なにも前節で行った場合に限らない。もっと一般の設定へも拡張される。この節では、前節の構成を「高次元化」する。

まずは代数幾何サイドから始める。$\mathbb{C}^{n+1}$ の中で、式 $z_1 z_2 \cdots z_n = t$ で定義される次の図形（代数多様体）を考える：

$$V := \left\{(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) \in \mathbb{C}^{n+1} : z_1 z_2 \cdots z_n = t\right\}. \tag{4.1}$$

この代数多様体 V をそのまま見ていても幾何的意味ははっきりしない。しかし、一旦 t を止めて V の部分空間 $W_t\colon z_1 z_2 \cdots z_n = t$ を考え、次に t をパラメータとして W_t を動かしてみると、幾何的な意味がはっきりする。前節で見たように、$n = 2$ のときは図 6 のようになっている。

[12] Counting argument means counting the same thing in two different ways.

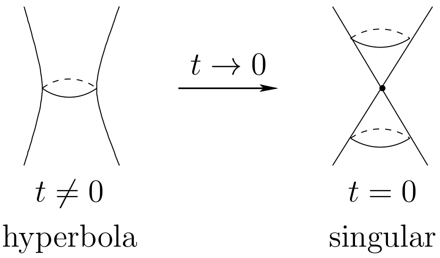

図 6: 族 $z_1 z_2 = t$ $(t \in \mathbb{C})$.

写像を使って、上の "族" を定式化する。写像 $\pi : V \to \mathbb{C}$ を射影 $(z_1, z_2, \ldots, z_n, t) \mapsto t$ で定める。各 $t \in \mathbb{C}$ に対し、ファイバー $\pi^{-1}(t)$ は $z_1 z_2 \cdots z_n = t$ をみたす（V の）部分空間 W_t である。そして、パラメータ $t \in \mathbb{C}$ を動かすにつれ、ファイバー $\pi^{-1}(t)$ も動き、$t = 0$ では $\pi^{-1}(0)$ に "退化" する。つまり、$\pi^{-1}(0)$ は**特異ファイバー**、$\pi^{-1}(t)$ $(t \neq 0)$ は**なめらかファイバー** (or **一般ファイバー**) である。

次に、群に対しても、前節の族（つまり $\pi : H \times K \to HK$）を「高次元化」する。

高次群論においても、「高次元化」とはとどのつまり "変数" を増やすこと。

まず、$H_1, H_2, \ldots, H_n$ を群 G の部分群として、その積（**セクト**）を考える：

$$H_1 H_2 \cdots H_n := \{h_1 h_2 \cdots h_n \,:\, h_i \in H_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}. \tag{4.2}$$

これは G の部分集合である（一般に部分群ではなく、それよりもはるかに複雑な部分集合）。次に、写像

$$\begin{aligned} \pi :\ H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n &\longrightarrow H_1 H_2 \cdots H_n, \\ (h_1, h_2, \ldots, h_n) &\longmapsto h_1 h_2 \cdots h_n \end{aligned} \tag{4.3}$$

をセクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ の **(普遍) シナジー**という（注：これ以外のタイプのシナジーもあるが、ここでは立ち入らない）。$n = 2$ のときはシナジーは等質ファイバー束になっているが（命題 3.2)、$n \geq 3$ のときは一般にはそうではなく非常に複雑である。しかしそれにもかかわらず、「シナジーの構造定理」（定理 6.1）により、明快な幾何的描像を与えることができる (p.23 の図 7 (1) 参照)。

	代数幾何	群論
高次元双曲線	$z_1 z_2 \cdots z_n = t$ in $\mathbb{C}^n$	$h_1 h_2 \cdots h_n = t$ in $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$
パラメータ空間	$\mathbb{C}$	$H_1 H_2 \cdots H_n$
写像	$\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto z_1 z_2 \cdots z_n$	$\pi : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \to H_1 H_2 \cdots H_n$ $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \mapsto h_1 h_2 \cdots h_n$

フルに一般化

上の構成では、群 G の部分群 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ を取り、それらの積（セクト）$H_1 H_2 \cdots H_n$ を考えた。以下では、これよりもずっと一般的な積を考える。すなわち、G の任意の部分集合 $S_1, S_2, \ldots, S_n$

を取り、それらの積 (**フロック** (flock)) を考える：

$$S_1S_2\cdots S_n = \{s_1s_2\cdots s_n : s_i \in S_i\ (i=1,2,\ldots,n)\}. \tag{4.4}$$

これは G の（一般に非常に複雑な）部分集合である。$S_1S_2\cdots S_n$ の定義より、各 $t \in S_1S_2\cdots S_n$ は（少なくとも一通りは）$t = s_1s_2\cdots s_n\ (s_i \in S_i)$ の形に表される。これを t の**表示**と言う。

> **問題**　$t \in S_1S_2\cdots S_n$ をパラメータとみて動かしたとき、「t の表示全体（の集合）」がどのように変化するか。

この問題を写像を使って定式化する。まず、次の写像（**シナジー**）を考える：

$$\begin{aligned}\pi : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n &\longrightarrow S_1S_2\cdots S_n,\\ (s_1,s_2,\ldots,s_n) &\longmapsto s_1s_2\cdots s_n.\end{aligned} \tag{4.5}$$

点 $t \in S_1S_2\cdots S_n$ に対し、そのファイバー $\pi^{-1}(t)$ は表示 $t = s_1s_2\cdots s_n$ をみたす $(s_1,s_2,\ldots,s_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ 全体からなる。つまり、

シナジーのファイバー $\pi^{-1}(t)$ には「t の表示全体」という群論的な意味がある。

ファイバー $\pi^{-1}(t)$ はパラメータ $t \in S_1S_2\cdots S_n$ とともに変化する "幾何的なもの" であるが（代数多様体の族のアナロジー）、"群論的な意味" も持っているのである。それゆえ、次の 2 つの問題は等価である：

【幾何的問題】　t を動かしたとき、ファイバー $\pi^{-1}(t)$ がどのように変化するか。　(4.6)

【群論的問題】　t を動かしたとき、「t の表示全体」がどのように変化するか。　(4.7)

比較 4.1. 代数多様体の族に対しては、【幾何的問題】しか考えることができないが、シナジーと違って、一般ファイバーが定義される。これらの違いが示唆するように、シナジーの描像と代数多様体の族の描像はかなり異なる (p.23 の図 7 参照)。

さて、層は代数多様体の「上部構造」、シナジーはフロックの「上部構造」という共通点があるが、層の定義に比べて、シナジー (4.5) の定義はいたってシンプルである—しかし、見掛けによらずたいへん複雑な代物である。シナジー $\pi : S_1\times S_2\times\cdots\times S_n \to S_1S_2\cdots S_n$ において、$S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$ は直積なので、一見すると簡単に見える。「多様体 M 上の自明束 $p : M\times\mathbb{R}^n \to M$ のようなものか」と思ってしまうかもしれないが、全く違う。自明束の写像 p は単なる射影 $(m,v) \in M\times\mathbb{R}^n \mapsto m \in M$ であり、各ファイバー $p^{-1}(m)$ は $\mathbb{R}^n$ であるのに対し、シナジーの写像 π はとても複雑で、ファイバー $\pi^{-1}(t)$ $(t \in S_1S_2\cdots S_n)$ を決定しようとするとたいへん複雑な計算を要し、ファイバーにはなんら規則性がないように見える。しかしながら、その中に実は「規則性」が潜んでいる（後述する**シナジーの第一・第二構造定理**）。

一般のシナジー

(4.5) で導入したシナジー $\pi : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to S_1S_2\cdots S_n$ は、正確には**普遍シナジー**である。$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ を、$S_1S_2\cdots S_n$ の**普遍プラズマ**—バラバラになった状態—と言う。普遍プ

ラズマを次々に “縮約” していくと、**シナジー図式**ができる。たとえば、$n=4$ のとき

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4 \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
S_1S_2 \times S_3 \times S_4 \arrow[d] \arrow[drr] & & S_1 \times S_2S_3 \times S_4 \arrow[dll] \arrow[drr] & & S_1 \times S_2 \times S_3S_4 \arrow[dll] \arrow[d] \\
S_1S_2S_3 \times S_4 \arrow[drr] & & S_1S_2 \times S_3S_4 \arrow[d] & & S_1 \times S_2S_3S_4 \arrow[dll] \\
 & & S_1S_2S_3S_4. & &
\end{tikzcd}
\tag{4.8}
$$

一般のシナジーは、シナジー図式の “連続する「矢」の合成” で与えられる（単独の「矢」でもよい）。たとえば、$S_1 \times S_2S_3 \times S_4 \to S_1 \times S_2S_3S_4$ や $S_1 \times S_2S_3 \times S_4 \to S_1S_2S_3S_4$ はシナジーである。

高次群論は、上の設定のもとで、「幾何」や「組み合わせ論」を展開する。

メカニズムとしては、代数幾何において、代数多様体そのものだけを調べるのではなく、「上部構造」である層を介在させて、その不変量（コホモロジーやオイラー数など）を導く、と同じ思想圏に属する。ただし層が、空間の「局所データ」と「大局的データ」を結びつける（**局所・大局対応**）のに対し、シナジーは、群の「ミクロ積」（群の元たちの積）と「マクロ積」（群の部分集合たちの積）を結びつける（**ミクロ・マクロの相互作用**）という点で大きく異なっている。

観察 4.2. シナジー図式は、フロックの上のシナジーたちのなす圏（カテゴリー）とも思える。これは、空間上のすべての層のなすカテゴリーである “トポス” と相通じるものがある。なお、代数幾何やスキーム論は、もともとは「近い・遠い」（ザリスキ位相）に立脚していたが、スキーム論の立役者のグロタンディークは（トポスを意識して）次のように述べている：

> **位相空間において本当に考慮すべきなのは、その「点」や点からなる部分集合や点の間の近さなどの関係ではまったくなく、この空間の上の層と、これらがつくるカテゴリーであるということです。**
>
> グロタンディーク『収穫と蒔いた種と』1 巻 p.61 （現代数学社）

5 ギルド： “良い境界” を持つフロック

思い出しておくと、群 G の（任意の）部分集合 $S_1, S_2, \ldots, S_m$ に対して、それらの積 $S_1S_2 \cdots S_m = \{s_1s_2 \cdots s_m : s_i \in S_i\ (i=1,2,\ldots,m)\}$ をフロックという（これは G の部分集合）。

定義 5.1. 群 G のフロック $S_1S_2 \cdots S_m$ のうち、“良い境界” を持つもの、つまり S_1 と S_m が G の部分群であるものを**ギルド** (guild) と言う。

以下では、ギルドを $HA_1A_2 \cdots A_nK$ と表す。ここで、H と K は G の部分群で、$A_1, A_2, \ldots, A_n$ は G の部分集合。

用心 5.2. 上のギルドの定義は [Ta11] のものである。これに先立つ [Ta10] では、$n=1$ の場合、つまり HA_1K だけを扱っており、それのみをギルドと呼んでいる。

あとで使うギルドの性質を述べておく。ギルド $HA_1A_2\cdots A_nK$ は、その形から両側作用を持つ—左から H を掛けることができ、右から K を掛けることができる：

$$H \curvearrowright HA_1A_2\cdots A_nK \curvearrowleft K. \tag{5.1}$$

つまり、$u \in H, v \in K$ に対し、

$$ha_1a_2\cdots a_nk \in HA_1A_2\cdots A_nK \longmapsto (uh)a_1a_2\cdots a_n(kv) \in HA_1A_2\cdots A_nK. \tag{5.2}$$

この作用に関する軌道分解は、$HA_1A_2\cdots A_nK$ の両側コセット分解を与える：

$$HA_1A_2\cdots A_nK = \coprod_{i\in I} H\alpha^{(i)}K, \quad (\alpha^{(i)} \in A_1A_2\cdots A_n \text{ は代表元}). \tag{5.3}$$

われわれは、ギルド上の任意のシナジーに対して、そのファイバーの記述問題、つまり【幾何的問題】(4.6) を完全に解決した。結果を一言で言えば、**局所的な等ファイバー性** (locally equi-fiber) である (p.23 定理 6.1)。微分トポロジー的に言うと、

シナジーは、局所的には沈めこみ "的"[13]**(locally submersive) である** (p.23 図 7 (1) 参照)。

【幾何的問題】(4.6) の解決に伴い、これと等価な【群論的問題】(4.7) も解決した。結果を一言で言えば、**局所的な等表示性** (locally equi-expression) である（これは「局所的な等ファイバー性」の言い換え)。具体的には、$HA_1A_2\cdots A_nK$ の両側コセット分解 (5.3) の各両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ に対し、次が成り立つ [Ta11]：

定理 5.3 (等表示定理). $t \in H\alpha^{(i)}K$ に対し、その表示集合

$$E_t := \{(h, a_1, a_2, \ldots, a_n, k) \in H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K \,:\, ha_1a_2\cdots a_nk = t\} \tag{5.4}$$

は t に "よらない"。つまり、任意の $t, t' \in H\alpha^{(i)}K$ に対し、E_t と $E_{t'}$ は集合として bijective である。

以下では、シナジーのうち、最もシンプルな「普遍」シナジーの構造を描写する（一般のシナジーの描写は、[Ta11] 参照)。ここで、ギルド $HA_1A_2\cdots A_nK$ 上の普遍シナジーは

$$\begin{aligned} \pi\colon H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K &\longrightarrow HA_1A_2\cdots A_nK, \\ (h, a_1, a_2, \ldots, a_n, k) &\longmapsto ha_1a_2\cdots a_nk. \end{aligned} \tag{5.5}$$

これの描写は次の 3 つのステップを踏む：

Step 1. 普遍シナジー π を次の二つのシナジーの合成 $\pi = \psi \circ \varphi$ として表す：

$$\begin{aligned} \varphi\colon H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K &\longrightarrow H \times A_1A_2\cdots A_n \times K, \\ (h, a_1, a_2, \ldots, a_n, k) &\longmapsto (h, a_1a_2\cdots a_n, k), \\ \psi\colon H \times A_1A_2\cdots A_n \times K &\longrightarrow HA_1A_2\cdots A_nK, \\ (h, a_1a_2\cdots a_n, k) &\longmapsto ha_1a_2\cdots a_nk. \end{aligned} \tag{5.6}$$

[13]沈めこみではなく、あくまで沈めこみ "的" である—位相すら入っていないことに注意。

Step 2. Step 1 の $H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K$, $H \times A_1 A_2 \cdots A_n \times K$ および $HA_1A_2 \cdots A_nK$ を次のように分解する (下の分解 (i), (ii) を **source 分解**と言う; 分解 (iii) は両側コセット分解)：

(i) $$H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K = \coprod_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n} H \times \{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\} \times K \quad \text{(source 分解)}.$$

ここで、各 $H \times \{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\} \times K$ を $H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K$ の **source 成分**と言う。

(ii) $$H \times A_1A_2\cdots A_n \times K = \coprod_{b\in A_1A_2\cdots A_n} H \times \{b\} \times K \quad \text{(source 分解)}.$$

ここで、各 $H \times \{b\} \times K$ を $H \times A_1A_2 \cdots A_n \times K$ の **source 成分**と言う。

(iii) $$HA_1A_2\cdots A_nK = \coprod_{i\in I} H\alpha^{(i)}K \quad \text{(両側コセット分解)}.$$

Step 3. $H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K$ の各 source 成分 $H \times \{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\} \times K$ への普遍シナジー π の制限は、両側コセット・テルファーである。したがって、普遍シナジー π の記述は局所的には、両側コセット・テルファーの記述に帰着される（得られた結果は次節参照）。なお、この両側コセット・テルファーの記述は、φ と ψ の次の性質を使って行う：

- $H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K$ の各 source 成分 $H \times \{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\} \times K$ への φ の制限は、bijection である。したがって、φ は local bijection—**エタール写像**[14]—である。
- $H \times A_1A_2 \cdots A_n \times K$ の各 source 成分 $H \times \{b\} \times K$ への ψ の制限は、両側コセット・シナジーである。したがって、この制限の任意のファイバーは $H \cap K^b$ に bijective である。

先に進む前に用語を準備しておく。

定義 5.4. $\pi : H\times A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\times K \to HA_1A_2\cdots A_nK$ を普遍シナジーとし、$HA_1A_2\cdots A_nK = \coprod_{i\in I} H\alpha^{(i)}K$ を両側コセット分解、

$$H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K = \coprod_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n} H \times \{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\} \times K$$

を source 分解とする。このとき、

(1) $H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K$ の source 成分 $H \times \{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\} \times K$ が両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ の**上にある**とは、$\pi(H \times \{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\} \times K) = H\alpha^{(i)}K$ となるとき。

(2) 各両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ に対し、その上にある source 成分の個数を $H\alpha^{(i)}K$ の**サテライト指数**と言い、$w^{(i)}$ と書く（注：$w^{(i)}$ は無限大のこともある）。

(3) 各両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ に対し、$m^{(i)} := w^{(i)}|H\alpha^{(i)}K|$ を $H\alpha^{(i)}K$ の**重複度**という（注：$m^{(i)}$ は無限大のこともある）。

[14] 位相空間論のエタール写像 (local homeomorphism) に因(ちな)んで、このように呼ぶ。ただし、われわれの場合は位相が入っていないが。

6　シナジーの第一・第二構造定理

高次群論の主定理であるシナジーの構造定理を述べる。ここで、シナジーは任意でよい—普遍シナジーとは限らず、一般のシナジーでよい。それに伴い、以下の「サテライト指数」は一般のシナジーに対するものである（[Ta11] 参照)。これは、普遍シナジーに対するサテライト指数 (本稿の定義 5.4 (2)) の一般化になっている。

定理 6.1 ([Ta11] **シナジーの第一構造定理).**
ギルド $\mathcal{Q} := HA_1A_2\cdots A_nK$ の両側コセット分解を $\mathcal{Q} = \coprod_{i\in I} H\alpha^{(i)}K$ とする。このとき、$\mathcal{Q}$ 上の任意のシナジー $\eta : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$（$\mathcal{P}$ はプラズマ）に対し、次が成り立つ。各両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ 上で、すべてのファイバー $\eta^{-1}(x)$ $(x \in H\alpha^{(i)}K)$ は（集合として）bijective である（等ファイバー性)。実際、$H\alpha^{(i)}K$ の (η に関する) サテライト指数を $w^{(i)}$ とすると、$\eta^{-1}(x)$ は $w^{(i)}$ 個の $H\cap K^{\alpha^{(i)}}$ の非交和に bijective である（注：$w^{(i)}$ は無限のこともある)。ここで $K^{\alpha^{(i)}} := \alpha^{(i)}K{\alpha^{(i)}}^{-1}$.

強調しておくと、**シナジーは（代数多様体の族と違って）一般ファイバーを持たない。かと言って、すべてのファイバーが特異ファイバーかと言うと、そうではない**—各両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ 上ではファイバーの退化は起こっていない（図 7 (1) のように、局所的には沈めこみ (submersion) のようになっている)。

シナジーの描像は、代数多様体の族の描像とは本質的に異なる。

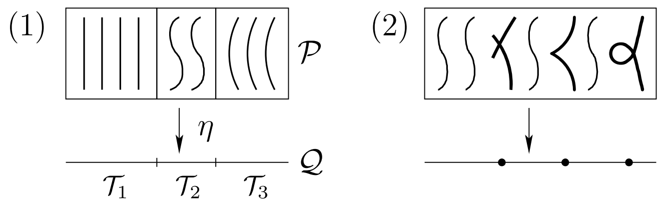

図 7: (1) シナジーのファイバーの描像 (局所沈めこみ的—locally submersive)。ここで、$\mathcal{T}_i := H\alpha^{(i)}K$ とおいた。(2) 代数多様体の族のファイバーの描像。

補足 6.2. 図 7 (1) のキャプションで、位相が入っていないのに “局所” という言葉が出てきた。通常の幾何では、まず空間に位相が与えられていて—つまり “局所” が定まっていて—、しかるのちに写像を考える（そして、その連続・不連続を論ずる)。しかし、高次群論では、まず写像（シナジー）ありきで、しかるのちに “局所”（正確には、“局所もどき” だが）が定まる。位相空間論とは逆の道筋になっている。これが高次群論の幾何学の異色なところである。

観察 6.3. シナジーの描像は、リーマン面のタイヒミュラー空間上の普遍族を彷彿とさせる。後者は、equi-symmetric locus への分解、つまり、対称性（自己同型群）が等しいリーマン面たちからなる locus への分解を持つ。これはシナジーの equi-fiber locus（ファイバーが等しい locus—各両側コセット $H\alpha^{(i)}K$ 上のファイバーはすべて同型）への分解 (図 7 (1)) との類似性を感じさせる。

シナジーの第一構造定理（定理 6.1）は、シナジーの “底空間” がギルドの場合である。この場合、シナジーは局所沈めこみ的 (locally submersive) であった (図 7 (1))。一方、“底空間” が非ギルドの場合、シナジーはエタール (locally bijective) になっている（**シナジーの第二構造定理** [Ta11])。

例 6.4. (5.6) の φ はエタール、ψ は局所沈めこみ的である。

また、次の図式で、é と l.s. はそれぞれ “étale” シナジーと “locally submersive” シナジーである（これは、HAK がギルドで、それ以外は非ギルドゆえ）。

$$\begin{tikzcd}
& H \times A \times K \arrow[dl, "\text{é}"'] \arrow[dr, "\text{é}"] \arrow[dd, "\text{l.s.}"] & \\
HA \times K \arrow[dr, "\text{l.s.}"'] & & H \times AK \arrow[dl, "\text{l.s.}"] \\
& HAK. &
\end{tikzcd}$$

シナジーからの組み合わせ公式の導出

シナジーの第一構造定理 6.1 により、ギルド $\mathcal{Q}$ 上の任意のシナジー $\eta : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ に対し、そのファイバーは完全に決定される。このことを使うと、（$\mathcal{P}$ が有限なとき）$\mathcal{P}$ の元の個数を、η のファイバーの元の個数の足し上げとしてカウントすることができる。こうして組み合わせ公式が得られる。たとえば、普遍シナジーの場合に適用すると、相乗的位数公式 (1.4) が得られる。

観察 6.5. 上の組み合わせ公式の導出では、いわゆる数え上げ議論を使っている—同じものを二通りに数え上げて、左辺 $=$ 右辺として公式を導出する。物理学における基本方程式の導出でもスピリットは同様である—同じものの二通りの側面を等置する（これは、物理法則を書き下すことにほかならない）。たとえば、ニュートン力学の基本方程式 $F = m\dfrac{d^2r}{dt^2}$ では、「力」と「質量 $\times$ 加速度」が等置されている（力学の第二法則）。

数学： 等置することにより、公式を表出させる。

物理学： 等置することにより、基本方程式（物理法則）を表出させる。

なお、数学における「良い公式」は物理学の「基本方程式（物理法則）」に相当するものなので、「良い公式」の探求は重要である。数学は、一般に「問題や予想を解くもの」と受け取られがちであるが、**新しい分野の起ち上げに際しては、むしろ「良い公式」の探求と確立が決定的に重要である。**

さまざまな「上部構造」の対比

本稿では、シナジーや層など、数学における「上部構造」の重要性を力説してきた。物理学においても「上部構造」は重要である。その雛形は「相空間」である。これは、物体が運動している空間 ($\mathbb{R}^n$ とする) に運動量を付加して拡げた空間 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ である。つまり、

$$\text{物体の位置} \in \mathbb{R}^n, \qquad (\text{物体の位置}, \text{物体の運動量}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

ここで、$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ は「$\mathbb{R}^n$ を拡げた」ものであるが、射影の観点からは、「$\mathbb{R}^n$ の上部構造」とみなせる：

$$\text{射影：}\ (\text{物体の位置}, \text{物体の運動量}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \text{物体の位置} \in \mathbb{R}^n.$$

これは、数学的には「自明束」である—その一般化である「ベクトル束」はゲージ理論などさまざまな物理分野で活躍する。

比較 6.6. 層、ベクトル束およびシナジーは「上部構造」であるが、その意義は異なっている。

> **層とベクトル束が物理的には「相空間」であるのに対し、シナジーはそうではなく、「相互作用」を表している。**

たとえば、普遍シナジー

$$\pi : H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K \longrightarrow HA_1A_2 \cdots A_nK$$

は、「$H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K$ の因子 $H, A_1, A_2, \ldots, A_n, K$ が "相互作用して" $HA_1A_2 \cdots A_nK$ になる」ことを表している。

- $H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K$: 「相互作用する前」のバラバラの状態（プラズマ）。
- $HA_1A_2 \cdots A_nK$: 「相互作用した後」の凝縮状態（ギルド）。

ベクトル束とシナジーの "写像としての" 意義の違いをワンフレーズでまとめておくと、

ベクトル束の射影： 情報を落とす写像.

シナジー： 相互作用を表す写像.

7 結び

【幽玄な種子を見定め、磨き、育てる】
「全体像」を何度も何度も書き直しながら、
自ら寄せ波となり、困難を摩滅させていく。
すべてが昇華され、糧（かて）となるまで。

ダイナミックな動きのある研究テーマや分野は、研究者を惹きつける。ただし、どんな大がかりな理論でも、最初は一人あるいはごく少数の研究者の脳裏にうっすらとした形があるだけで、ダイナミズムとはほど遠い—水源地は大河ではない。それが「いつ動き出すか」は、"うねりを生じさせる" 概念が取り入れられた瞬間である（静から動への移行）。

> 歴史小説では、ある人物を描くことによって、その時代の主要な人物をあまねく描き切る、という構成を取ることがある。このような人物は、キー・パーソンと言うより、その作品の中で "うねりを生じさせる" 人物と言ったほうがしっくりくる。数学においても、"うねりを生じさせる" 概念は、分野の結節点的に、さまざまな事柄を結び付け記述する動的かなめのような存在である。たとえば、ホモロジーやコホモロジーがそうである。また、われわれの高次群論においては、シナジーがそうである。

"うねりを生じさせる" 概念は、ごく単純なものであることが多い—ゴチャゴチャして複雑すぎる概念、あるいは使い勝手の悪い条件に基づく概念は、その「煩雑性の重み」のために飛翔力に乏しい—往々にして場当たり的な使い方しかできず、汎用性に欠けてしまう。一方、単純で素朴な概念はさまざまな仕方で "調理" できるので、飛翔力があり、ポテンシャルが高い—多視点を許容し、多方面への展開力を秘めている。われわれの導入したシナジーも定義が非常に単純であり、

さまざまな見方ができる。実際、層的な側面、代数多様体の族的な側面、などに加えて、モース関数と似た側面をも持つ[15]。

$$\text{シナジーのさまざまな側面}:\begin{cases}\text{層的 (上部構造、不変量\&公式を産出)},\\ \text{代数多様体の族的 (ファイバーの変形)},\\ \text{モース関数的 (二次項の活躍)}.\end{cases}$$

今後の研究では、シナジーの生息域・活動域をさらに広げていく。これについては、稿を改めて論じたい。

参考文献

[EiHa] D. Eisenbud, and J. Harris, *The Geometry of Schemes,* Springer-Verlag (1999)

[Ful] W. Fulton, *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry,* AMS. (1984)

[HiSaTa] R. Hirakawa, K. Sasaki, and S. Takamura, *Poset-blowdowns of generalized quaternion groups,* Int. J. Group Theory 13 (2) (2024), 133–160

[HiTa1] R. Hirakawa, and S. Takamura, *Linear quotient families and stabilizer posets,* to appear in Kodai Mathematical Journal

[HiTa2] ———, *Quotient families of elliptic curves associated with representations of dihedral groups,* Publ. RIMS. **55** no.2 (2019), 319–367

[HiTa3] ———, *Degenerations of Riemann surfaces associated with the regular polyhedra and the soccer ball,* J. Math. Soc. Japan **69** No.3 (2017), 1213–1233

[Isa] I. Isaacs, *Finite Group Theory,* AMS. (2008)

[Ol's] A. Ol'shanskii, *Geometry of Defining Relations in Groups,* Kluwer Academic Publishers (1991)

[高村 1] 高村茂, *Representations of finite groups, quotient families, and regular polyhedra* (in Japanese), Symposium on topology of manifolds (2014), 7 ページ
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kiyonok/ym2014/takamura.pdf`

[高村 2] ———, "商族の幾何学 (有限群の作用と表現, ファイブレーション, モジュライ空間) ", 『第 14 回城崎新人セミナー』(2017 年 2 月), 13 ページ
`https://drive.google.com/file/d/1ieFR4Cof5Rb69nUutaRxYoxUEHIAB8hC/view`

[高村 3] ———, "群の高次構造とその同伴ファイブレーション—高次群論とその幾何学事始め", 研究集会『変換群の幾何とトポロジー』 (2023 年 6 月), 数理研講究録 2276 (2024), pp.94–117
`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2276-11.pdf`

[高村 4] ———, "高次群論とその幾何学", 研究集会 『有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究』 (2023 年 12 月), 数理研講究録 2287 (2024), pp.105–119
`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2287-14.pdf`

[15] モース理論において、モース関数の二次の部分（ヘッセ行列）は、なめらかな多様体の位相型を決定する、という重要な役割を果たすが、高次群論においても二次の部分（両側コセット）はシナジーの構造を決定する、という重要な役割を果たす。

[高村 5] ———, *On higher group theory and its geometry* (in Japanese), 松本幸夫先生 80 歳記念研究集会 『多様体のトポロジーの進展』 (2024 年 11 月), 10 ページ
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/progress/takamura.pdf`

[高村 6] ———, "群の高次構造とその幾何学", 研究集会 『有限群のコホモロジー論とその周辺』 (2024 年 2 月), 数理研講究録 2306 (2025), pp.86–101
`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2306-13.pdf`

[Ta1] Shigeru Takamura, *Towards the classification of atoms of degenerations, I,* (*Splitting criteria via configurations of singular fibers*)*,* J. Math. Soc. Japan **56** (1) (2004), 115–145

[Ta2] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, III,* (*Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves*)*,* Springer Lecture Notes in Math. **1886** (2006)

[Ta3] ———, *Linearization of quotient families,* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **26** (2019), 361–389

[Ta4] ———, *Classification of finite groups with birdcage-shaped Hasse diagrams,* Osaka J. Math. **58** (4) (2021), 885–897

[Ta5] ———, *Blowdown maps between subgroup posets,* Tokyo J. of Math. **45** (2) (2022), 467–499

[Ta6] ———, *Prime factorizations of finite groups, I,* Advances in Group Theory and Applications **19** (2024), 1–55

[Ta7] ———, *Prime factorizations of finite groups, II,* (2023), to appear in Advances in Group Theory and Applications

[Ta8] ———, *Prime factorizations of finite groups, III,* (2023), to appear in Advances in Group Theory and Applications

[Ta9] ———, *The orders of subgroup products and coset products,* Transactions on Combinatorics **14** (2025), 223–250

[Ta10] ———, *Bézout type theorem for higher order objects of groups,* (2024), to appear in Osaka J. Math.

[Ta11] ———, *Higher order structures on groups and their geometry,* (2025), Preprint

[Tha] M. Tharmalingam, *Poincaré-Hopf theorem and Morse theory,* Utrecht University Student Theses Repository (2020), `https://studenttheses.uu.nl/bitstream/handle/20.500.12932/38885/Poincare%3F-Hopf%20Theorem%20and%20Morse%20Theory.pdf?sequence=1`

[上野] 上野健爾, "曲面論入門", 数学の楽しみ『多様体と親しむ』2005 夏号（日本評論社）pp.43–58