原田予想 II と一般線型群

杉元 最大 (Masahiro Sugimoto)*
筑波大学 理工情報生命学術院 数理物質科学研究群
(Degree Programs in Pure and Applied Sciences,
Graduate School of Science and Technology,
University of Tsukuba)

1 序文

G を有限群, G の既約指標全体を $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \cdots, \chi_s\}$, G の共役類全体を $\mathrm{Cl}(G) = \{K_1, \cdots, K_s\}$ とする．有限群の通常表現に関する次の予想は原田予想 II と呼ばれている．

予想 1 ([3])**.** 有限群 G に関して,

$$h(G) = \prod_{i=1}^{s} \frac{|K_i|}{\deg \chi_i}$$

は整数である．

以下の場合については予想が成立することが確かめられている．

- ATLAS にある群 [3]
- 対称群と交代群 [4]
- G の全ての Sylow 部分群がアーベル群 [7]
- 冪零クラス 2 の群 [8]

また，$h(G)$ は G の交換子部分群の位数で割れるという，より強い予想もある．

予想 2 ([3])**.** 有限群 G について，G' を G の交換子部分群とすると,

$$h'(G) = \frac{h(G)}{|G'|}$$

は整数である．

例として，3 次対称群 S_3 の場合は以下のように予想が成立していることがわかる．

$$h(S_3) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 3,$$
$$h'(S_3) = \frac{3}{3} = 1.$$

本稿では原田予想 II を有限体上の一般線型群及びユニタリ群について考察し，その場合に予想が成立することを述べる．

*本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2124 の支援を受けたものである。

2 有限体上の一般線型群

$\mathrm{GL}_n(q)$ を q 元体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次一般線型群とする．$\mathcal{F}_q$ をモニックな $\mathbb{F}_q$ 係数既約多項式の全体から $f(t) = t$ だけ除いた集合とし，$\mathcal{P}$ を 0 を含めた整数の分割全体とする．整数 n の分割 λ を $\lambda = (\lambda_1, \cdots \lambda_l)$ のように整数の非増加列で表す．また，

$$
\begin{aligned}
m_i(\lambda) &= |\{j \mid \lambda_j = i\}|, \\
s(\lambda) &= \sum_{i \geq 1} \binom{m_i(\lambda)+1}{2}, \\
n(\lambda) &= \sum_{i=1}^{l} (i-1)\lambda_i
\end{aligned}
$$

とおく．λ が n の分割であることを，$\lambda \vdash n$ や $|\lambda| = n$ で表す．$\mathrm{GL}_n(q)$ の既約指標全体と共役類全体は以下の集合 $M_n(\mathcal{F}_q)$ との間に全単射があることが知られている [2].

$$
M_n(\mathcal{F}_q) = \{\nu : \mathcal{F}_q \to \mathcal{P} \mid \|\nu\| := \sum_{f \in \mathcal{F}_q} |\nu(f)| \deg(f) = n\}
$$

また，$M_n(\mathcal{F}_q)$ の元 ν に対応する共役類 K_ν の大きさと既約指標 χ_ν の次数は，それぞれ以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
|K_\nu| &= \frac{q^{\binom{n}{2}} \psi_n(q)}{\prod_{f \in \mathcal{F}_q} a_{\nu(f)}(q^{\deg(f)})} \\
\deg \chi_\nu &= \psi_n(q) \prod_{f \in \mathcal{F}_q} b_{\nu(f)}(q^{\deg(f)})
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
a_\lambda(t) &= t^{|\lambda| + 2n(\lambda) - s(\lambda)} \prod_{i \geq 1} \psi_{m_i(\lambda)}(t), \\
b_\lambda(t) &= t^{n(\lambda)} \prod_{i<j} (t^{\lambda_i - i - \lambda_j + j} - 1) \prod_{r=1}^{l} \psi_{\lambda_r - r + l}(t)^{-1}, \\
\psi_m(t) &= (t-1)(t^2-1)\cdots(t^m-1)
\end{aligned}
$$

である．

$n = 2, 3$ の場合は Table 1,2 のようになる．各行に注目すると，必ずしも行ごとに共役類の大きさが既約指標の次数で割り切れているとは限らないが，q と互いに素な部分だけなら割り切れていることがわかる．このことは一般の n について成り立つ．各 $\nu \in M_n(\mathcal{F}_q)$ について，

$$
\frac{|K_\nu|}{\deg \chi_\nu} = \frac{q^{\binom{n}{2}}}{\prod_{f \in \mathcal{F}_q} a_{\nu(f)}(q^{\deg(f)}) b_{\nu(f)}(q^{\deg(f)})}.
$$

である．分割の長さに関する帰納法から次の定理が証明される．

定理 3 ([9]). 任意の分割 λ について，

$$
(a_\lambda(t) b_\lambda(t))^{-1} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}].
$$

Table 1: $\mathrm{GL}_2(q)$ の共役類の大きさと既約指標の次数

$\|\nu\|$	共役類の大きさ	既約指標の次数
$\|(1,1)\|$	1	q
$\|(2)\|$	q^2-1	1
$\|(1)\|+\|(1)\|$	$q(q+1)$	$q+1$
$2\|(1)\|$	$q(q-1)$	$q-1$

Table 2: $\mathrm{GL}_3(q)$ の共役類の大きさと既約指標の次数

$\|\nu\|$	共役類の大きさ	既約指標の次数
$3\|(1)\|$	$q^3(q^2-1)(q-1)$	$(q-1)(q^2-1)$
$2\|(1)\|+\|(1)\|$	$q^3(q^3-1)$	(q^3-1)
$1\|(3)\|$	$q(q^2-1)(q^3-1)$	1
$1\|(2,1)\|$	$(q^3-1)(q+1)$	$q(q+1)$
$1\|(1,1,1)\|$	1	q^3
$1\|(2)\|+1\|(1)\|$	$q^2(q+1)(q^3-1)$	q^2+q+1
$1\|(1,1)\|+1\|(1)\|$	$q^2(q^2+q+1)$	$q(q^2+q+1)$
$1\|(1)\|+1\|(1)\|+1\|(1)\|$	$q^3(q+1)(q^2+q+1)$	$(q+1)(q^2+q+1)$

系 4. 任意の $n \geq 2$ と素数のべき q について，

$$h(\mathrm{GL}_n(q)) \in \mathbb{Z}[q^{-1}].$$

したがって，$h(\mathrm{GL}_n(q))$ が整数であるためには $h(\mathrm{GL}_n(q))$ の q べきの指数部分が正であれば十分である．加えて，$h'(\mathrm{GL}_n(q))$ が整数であることを示すには q べきの指数部分が $\binom{n}{2}$ 以上であることを示せばよい．

分割や多項式の個数に関する考察によって $n \geq 6$ のときに以下の不等式が成り立つことがわかる [5].

$$\begin{aligned} 3\sum_{\lambda \vdash n} n(\lambda) &\leq \binom{n+1}{2} p(n) \\ &\leq \binom{n}{2} p(n) + (n-1)2^{n-2} \\ &\leq \binom{n}{2}\left(p(n) + \frac{|\mathcal{F}_{q,n}|-1}{q-1}\right) \end{aligned}$$

ここで $\mathcal{F}_{q,n} = \{f \in \mathcal{F}_q \mid \deg(f) = n\}$，$p(n)$ は n の分割の総数である．これらの不等式を用いて計算することで次の定理を得る．

定理 5. 任意の $n \geq 2$ と素数のべき q について，

$$h'(\mathrm{GL}_n(q)) \in \mathbb{Z}.$$

注意. $\sum n(\lambda)$ の具体的な数値から次の不等式が成り立つと予想されるが未解決である．

$$3\sum_{\lambda \vdash n} n(\lambda) \leq \binom{n}{2} p(n) \ for\ n \geq 7.$$

3 ユニタリ群

$\mathrm{GU}_n(q) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(q^2) \mid (a_{ij})^{-1} = (a_{ji}^q)\}$ を（一般）ユニタリ群と呼ぶ．$\mathrm{GL}_n(q)$ と同様に，$\mathrm{GU}_n(q)$ の既約指標全体と共役類全体は以下の集合 $M_n(\mathcal{F}_q^U)$ との間に全単射があることが知られている [1, 6].

$$M_n(\mathcal{F}_q^U) = \{\nu : \mathcal{F}_q^U \to \mathcal{P} \mid \|\nu\| := \sum_{f \in \mathcal{F}_q^U} |\nu(f)| \deg(f) = n\}$$

ここで $\mathcal{F}_q^U$ は $\mathbb{F}_{q^2}$ 係数の “U-既約” 多項式の全体である．$M_n(\mathcal{F}_q)$ の元に対応する共役類の大きさと既約指標の次数から，$\mathrm{GL}_n(q)$ と同様の議論によってユニタリ群についても原田予想 II が成立することがわかる．

定理 6 ([5])**.** 任意の $n \geq 2$ と素数のべき q について，

$$h'(\mathrm{GU}_n(q)) \in \mathbb{Z}.$$

References

[1] V. Ennola, *On the characters of the finite unitary groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, 323 (1963)

[2] J. A. Green, *The Characters of the Finite General Linear Groups*, Transactions of the American Mathematical Society, 80(2), 402–447. (1955).

[3] K. Harada, *Revisiting character theory of finite groups*, Bulletin of the Inst. Math. Academia Sinica (New Series) 13 (2018) 383–395.

[4] A. Hida, *Harada's conjecture on character degrees and class sizes –symmetric and alternating groups–*, 数理解析研究所講究録 2086(2018), 144–153.

[5] A. Hida and M. Sugimoto, *The character degree product and the conjugacy length product for finite general linear groups*, arXiv:2501.035287, (2025).

[6] N. Kawanaka, *Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality, Algebraic groups and related topics* (Kyoto/Nagoya, 1983), Adv. Stud. Pure Math., North-Holland, Amsterdam, 1985 175–206.

[7] M. Kiyota, *Harada conjecture II and its block refinement*, 数理解析研究所講究録 2061(2018), 56–60.

[8] M. Miyamoto, 冪零クラス *2* の群と原田予想 *II*, 数理解析研究所講究録 2287(2023).

[9] M. Sugimoto, *Harada's conjecture II for finite general linear groups and unitary groups*, International Journal of Group Theory, to appear.