Antipodality of spherical designs with odd harmonic indices

三澤 竜太郎 *

1　序

Spherical design とは，球面上の「良い」有限部分集合として Delsarte [1] らによって導入された．これは球面上でのある次数までの多項式に対する積分値を，その有限個の点での平均として表すことができる，という性質をもった集合のことを指す．特に，次数 t までの多項式に対して成り立つ場合，この有限集合を spherical t-design と呼ぶ．spherical design は多くの問題意識から研究されてきた．定式化すると次のようになる．

定義 1.1. X を単位球面 $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ の空でない有限部分集合，t を正の整数とする．$\deg f \leq t$ なる任意の多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ に対して

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi)d\xi = \frac{1}{|X|}\sum_{\xi \in X} f(\xi) \tag{1}$$

が成り立つとき X を spherical t-design という．ここで，$|\mathbb{S}^{d-1}| = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\xi$.

Spherical t-design は t 次以下の任意の多項式で式 (1) を満たすため，その部分を一般化した harmonic index T の spherical design (spherical T-design) が Bannai [4] らによって定義された．集合 $T \subset \mathbb{N}$ を考えると，harmonic index T の spherical design は，spherical t-design の一般化であり，次のように定義できる．

定義 1.2. X を球面 $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ の空でない有限部分集合とする．$T \subset \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{\xi \in X} P(\xi) = 0 \quad (k \in T, \quad P \in \mathrm{Harm}_k)$$

が成り立つとき X を spherical design of harmonic index T (spherical T-design) という．ここで， Harm_k は k 次斉次調和多項式全体のなすベクトル空間である．

球面上の有限部分集合 X が **antipodal** であるとは，$X = -X$ がなりたつときをいう．また，spherical t-design は，harmonic index $\{1, 2, \ldots, t\}$ の spherical design であることがわかる．一般に，$t = \max\{t' \mid X$ は spherical t'-design$\}$ よりも $T = \{t' \mid X$ は spherical $\{t'\}$-design$\}$ のほうがより多くの情報を持つ．実際，spherical design の例として正 20 面体が挙げられる．これは spherical 5-design であり，harmonic index $\{1, 3, 5, \cdots\} \cup \{2, 4, 8, 14\}$ の spherical design でもある．そして，harmonic index の偶数成分については spherical design と同様に多くの研究がされてきた ([5, 6, 7] を参照).

一方で，harmonic index の奇数成分について，これまで具体的な研究がなされたことはない．本研究ではこの奇数からなる harmonic index を持つ spherical design と antipodal という性質の関係について調べた．

*東北大学情報科学研究科（〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6 番 3 号 09，E-mail: misawa.ryutaro.q2@dc.tohoku.ac.jp）

奇数からなる harmonic index についての研究がなされなかった理由は，antipodal 性と奇数からなる harmonic index が次のような関係を満たしていることが容易に示せるためである．

命題 1.3. T_∞ を正の奇数全体の集合とし，$X \subset \mathbb{S}^{d-1}$ を空でない有限集合とする．このとき，次の条件は同値である：

1. X は antipodal である．
2. X は spherical T_∞-design である．

実際，先ほど述べた正 20 面体は antipodal で，harmonic index $\{1,3,5,\cdots\} \cup \{2,4,8,14\}$，すなわち T_∞ をもつ．しかし，X が antipodal でないとき（**non−antipodal**），その harmonic index に奇数を持つような例も存在する．$\mathbb{S}^2$ を考えると，半正多面体の一つである，snubcube は 24 点からなる spherical $\{1,2,3,5,7,11\}$-design であり，truncated tetrahedron は 12 点からなる spherical $\{1,2,5\}$-design である．このように奇数 harmonic index を有限個含むような non-antipodal spherical design は多く存在する．よって奇数 harmonic index の構造によって，non-antipodal という性質が許容されるかという問いにたどり着いた．

問題 1.4. X を n 点からなる $\mathbb{S}^{d-1}$ 上 spherical T_m-design とする．このとき，X が必ず antipodal といえるための (m,n) に関する条件は何か？ ここで，$T_m = \{2k-1 \mid k \in [m]\}$.

この問題をほとんど解決したことが今回の主定理である．その手法は，spherical design の問題を interval design という類似な対象に落とし込み，spherical design に応用したことである．その結果，ある場合を除いて n, m の満たすある不等式から antipodal 性が導かれることを示した．また，その不等式が最良であることを例を構成することにより示した．

2 Interval design

Interval design は Bajnok [2] らによって導入された，区間 $[a,b]$ 上の有限集合で，数値解析や数値積分において重要な役割をもつ対象である．

定義 2.1. X を区間 $[-1,1]$ の空でない有限部分集合とする．集合 T_m に対して

$$\sum_{x\in X} x^k = 0 \quad (k \in T_m)$$

が成り立つとき X を interval design of index T_m (interval T_m-design) という．

また，区間 $[-1,1]$ 上の有限部分集合 X が **symmetric** であるとは，$X = -X$ がなりたつときをいう．

各非負整数 k に対して，変数 $x_1,\ldots,x_n$ に対する k 次の冪和多項式と k 次の基本対称式を，それぞれ $p_k(x_1,\ldots,x_n)$ および $e_k(x_1,\ldots,x_n)$ と表す．補題 2.2 は Newton の恒等式といい，以下の議論に役に立つ．

補題 2.2. 1. すべての整数 $n \geq k \geq 1$ に対して，次が成り立つ：

$$ke_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i}(x_1,\ldots,x_n) p_i(x_1,\ldots,x_n).$$

2. すべての整数 $k \geq n \geq 1$ に対して，次が成り立つ：

$$0 = \sum_{i=k-n}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i}(x_1,\ldots,x_n) p_i(x_1,\ldots,x_n).$$

命題 2.3 は interval T_m-design と k 次基本対称式を関係づけている．

命題 2.3. m および n を正の整数とし，$2m-1 \le n$ とする．また，$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ とする．このとき，次の条件は同値である：

1.
$$p_{2k-1}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad k \in \{1, \ldots, m\}$$

2.
$$e_{2k-1}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad k \in \{1, \ldots, m\}$$

問題 1.4 の interval design 版についての答えが定理 2.4，定理 2.5 である .

定理 2.4. 正の整数 m と n が $n \le 2m$ を満たすとする．実数 $x_1, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ が次の条件を満たしていると仮定する：

$$p_{2k-1}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{2}$$

ここで $k \in \{1, \ldots, m\}$ とする．このとき，多重集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ は symmetric である．特に，部分集合 $X \subset [-1, 1]$ が interval T_m-design であるならば，X は symmetric である．

Proof. まず，任意の正整数 k に対して (2) が成り立つことを k に関する帰納法で証明する．$k \le m$ の場合については仮定しているため，$k > m$ と仮定する．このとき，$2k-1 > n$ であり，したがって $j > 2m$ のとき $e_j(x_1, \ldots, x_n) = 0$ である．補題 2.2 2 より，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} p_{2k-1}(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{i=2k-1-n}^{2k-2} (-1)^i e_{2k-1-i}(x_1, \ldots, x_n) p_i(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{m} e_{2i-1}(x_1, \ldots, x_n) p_{2(k-i)}(x_1, \ldots, x_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{m} e_{2i}(x_1, \ldots, x_n) p_{2(k-i)-1}(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

命題 2.3 と (2) より，$1 \le i \le m$ のとき $e_{2i-1}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ であるため，第 1 項は 0 である．帰納法の仮定により，第 2 項も 0 である．したがって，任意の正整数 k に対して (2) が成り立つことを示した．

次に，n に関する帰納法で命題を証明する．$n = 1, 2$ の場合は明らかである．$Y = \{y_1, \ldots, y_{n'}\}$ を $x_1, \ldots, x_n$ のすべての異なる要素の集合とする．すなわち，$Y = \{x_1, \ldots, x_n\}$ かつ $|Y| = n' \le n$ とする．$A \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$ を

$$A_{i,j} = y_j^{2i-1} \quad (1 \le i, j \le n')$$

と定義する．列ベクトル $\mathbf{u}$ を，その j 番目の成分 u_j が

$$u_j = |\{i \mid 1 \le i \le n,\ x_i = y_j\}| \quad (1 \le j \le n')$$

で与えられるように定義する．すると，$A\mathbf{u}$ の k 番目の成分は

$$\sum_{j=1}^{n'} y_j^{2k-1} u_j = p_{2k-1}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

となる．ここで，任意の正整数 k に対して (2) が成り立つことを示したためである．したがって $A\mathbf{u}=0$ であり，従って

$$0=\det A=\prod_{j=1}^{n'} y_j \prod_{1\le i<j\le n'} (y_j^2-y_i^2)$$

となる．これにより，ある j に対して $y_i=0$ であるか，または $i<j$ で $y_i=-y_j$ となる i,j が存在することが分かる．後者の場合，一般性を失わずに $x_{n-1}=-x_n$ と仮定できる．任意の正整数 k に対して (2) が成り立つことを示したため，

$$p_{2k-1}(x_1,\dots,x_{n-2})=p_{2k-1}(x_1,\dots,x_n)=0$$

が任意の正整数 k について成り立つ．帰納法より，多重集合 $\{x_1,\dots,x_{n-2}\}$ は symmetric であり，$\{x_1,\dots,x_n\}$ も symmetric である．前者の場合も同様にして証明できる． □

$n>2m$ の場合について，non-symmetric T_m-design の存在を構成的に証明した．

定理 2.5. m を正の整数とする．このとき，正の整数 n が $n>2m$ をみたせば，interval T_m-design $X\subset[-1,1]$ が存在し，$|X|=n$ かつ $X\ne -X$ である．また，特に $2m+1$ が non-symmetric interval T_m-design の最小のサイズである．

Proof. $n=2m+1$ の場合を証明すれば十分である．実際，命題 2.4 より結論を満たす $|X|=2m+1$ の集合 X は，より強い性質 $X\cap(-X)=\emptyset$ を満たす必要がある．したがって，$n=2m+2$ の場合は X に 0 を加えることで得られる．$n>2m+2$ の場合は，$(-1,1)$ 内の symmetric な点のペアを $\left\lfloor\frac{n-2m}{2}\right\rfloor$ 個追加し，$|X|=2m+1$ または $2m+2$ となるようにして，T_m-デザインを構成できる．

ここで

$$A=\left\{\pm\frac{2k-1}{2m}\mid 1\le k\le m\right\}$$

とする．$f(x)$ を A を根に持つ次数 $2m$ のモニック多項式とする．微小な $\varepsilon>0$ を選ぶことで，多項式 $g(x)=f(x)+\varepsilon$ が $\left(-1+\frac{1}{2m},1-\frac{1}{2m}\right)\setminus\left\{\frac{1}{2m}\right\}$ 内に $2m$ 個の根を持つようにできる．A' を $g(x)$ の根の集合とすれば，

$$e_k(A)=e_k(A')\quad(0\le k\le 2m-1)$$

が成りたつ．補題 2.2 により k に関する帰納法を用いると，

$$p_k(A)=p_k(A')\quad(0\le k\le 2m-1) \tag{3}$$

が得られる．

$\left(A-\frac{1}{2m}\right)\cup\{1\}$ と A は symmetric であるため，

$$\begin{aligned}
0 &= p_{2k+1}\left(\left(A-\frac{1}{2m}\right)\cup\{1\}\right)\\
&= 1+\sum_{a\in A}\left(a-\frac{1}{2m}\right)^{2k+1}\\
&= 1+\sum_{a\in A}\sum_{\ell=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{\ell}a^{\ell}\left(-\frac{1}{2m}\right)^{2k+1-\ell}\\
&= 1+\sum_{\ell=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{\ell}\left(-\frac{1}{2m}\right)^{2k+1-\ell}p_{\ell}(A)\\
&= 1+\sum_{\ell=0}^{k}\binom{2k+1}{2\ell}\left(-\frac{1}{2m}\right)^{2(k-\ell)+1}p_{2\ell}(A)\\
&= 1-\sum_{\ell=0}^{k}\binom{2k+1}{2\ell}\frac{1}{(2m)^{2(k-\ell)+1}}p_{2\ell}(A)
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，(3) より

$$1-\sum_{\ell=0}^{k}\binom{2k+1}{2\ell}\frac{1}{(2m)^{2(k-\ell)+1}}p_{2\ell}(A')=0\quad(0\le k\le m-1)$$

が得られる．A' も symmetric であるため，上記の計算を A を A' に置き換えて逆から行うことができ，

$$p_{2k+1}\left(\left(A'-\frac{1}{2m}\right)\cup\{1\}\right)=0\quad(0\le k\le m-1)$$

が成り立つ．これにより，集合 $X=\left(A'-\frac{1}{2m}\right)\cup\{1\}$ は $|X|=2m+1$ を持つ interval T_m-design であることが示される．$1\in X$ で $-1\notin X$ であるため，$X\neq(-X)$ が成りたつ． □

3 Spherical design

補題 3.1. X を $\mathbb{S}^{d-1}$ の有限部分集合で，$X\cap(-X)=\emptyset$ を満たすとすれば，$A_a(X)\cap(-A_a(X))=\emptyset$ かつ $|X|=|A_a(X)|$ なる点 $a\in\mathbb{S}^{d-1}$ が存在する．ここで，$A_a(X)=\{\langle a,x\rangle\mid x\in X\}$．さらに X が spherical T_m-design ならば，$A_a(X)$ は interval T_m-design である．

補題 3.1 によって，non-antipodal spherical design から，non-symmetric interval design が得られ，定理 2.4 から次が成り立つ．

定理 3.2. X を n 点からなる spherical T_m-design とする．$n\le 2m$ ならば，X は antipodal である．

Proof. X が non-symmetric と仮定する．一般性を失わずに $X\cap(-X)=\emptyset$ であると仮定してよい．補題 3.1 より，ある点 $a\in\mathbb{S}^{d-1}$ が存在し，$A_a(X)$ が non-symmetric interval T_m-design であり，$|A_a(X)|=n$ となる．すると，定理 2.4 より $n>2m$ が成り立ち，矛盾が生じる． □

次に，$2m+1$ 点からなる non-antipodal spherical T_m-design の最小性を示す．spherical T_m-desgin について次が成り立つ．

補題 3.3. m を正の整数とする．$d' > d$ として，X を $\mathbb{S}^{d-1}$ 上 spherical T_m-design とするならば，X は $\mathbb{S}^{d'-1}$ 上 spherical T_m-design である．

Hong [3] によって $\mathbb{S}^1$ 上正 $(2m+1)$-角形は spherical $2m$-design であることが示されている．spherical $2m$-design は spherical T_m-design であるので，補題 3.3 によって次が示される．

定理 3.4. $n > 2m$ かつ n が奇数ならば，n 点からなる non-antipodal spherical T_m-design が存在する．特に，$2m+1$ は non-antipodal spherical T_m-design の最小サイズである．

Proof. X を $\mathbb{S}^1$ における正 $(2m+1)$-角形とする．このとき，X は spherical $2m$-design である（[3] を参照），従って spherical T_m-design でもある．$n > 2m+1$ かつ n が奇数のとき，X と交わらない $\mathbb{S}^1$ 上の $n-2m-1$ 組の antipodal な点を選ぶ．これらの点を X に加えると，n 個の点からなる望みの T_m-デザインが得られる．$|X|$ は奇数であるため，X は antipodal ではない．

さらに，補題 3.3 より，$\mathbb{S}^1$ 上の spherical T_m-design を $\mathbb{S}^{d-1}$ に埋め込んだときも，それは spherical T_m-design である．

最後の主張は定理 3.2 から従う． □

4 Weighted interval design

最後に重み付きの interval design を考える．

定義 4.1. m を正の整数とし，$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ を有限集合 $X \subset [-1,1]$ を台とする関数とする．全ての $s \in T_m$ に対して

$$\sum_{x\in X} x^s f(x) = 0$$

が成りたつとき関数 f を重み付き interval design of index T_m (weighted interval T_m-design) であるといい，関数 f の非ゼロの値を重みという．

また，区間 $[-1,1]$ 上の関数 f が **symmetric** であるとは，X の任意の $x \in X$ に対して，$f(x) = f(-x)$ なるときをいう．n 点からなる台をもつ重み付き interval design の index T_m と symmetric 性について次のような定理が成り立つ．

定理 4.2. n 点からなる台をもつ重み付き interval T_m-design f について，次が成り立つ．

1. $n \le m$ ならば，f は symmetric である．
2. $n > m$ ならば，non-symmetric T_m-design なるような f が存在する．

5 今後に向けて

本研究では spherical design の奇数からなる harmonic index と，antipodality の関係をほとんど調べあげた．しかし偶数点については未解決である．そして，定理 3.4 より，$2m+1$ 点の例はすでに構成できているため，それらが antipodal にならないように和集合をとれば，和集合をとる操作について harmonic index は保存されることを用いて，$4m+2$ 点以上の任意の点数において non-antipodal spherical T_m-design は構成できる．そこで次のような問題が考えられる．

問題 5.1. $m > 1$ を自然数とする．$4m+2 > n > 2m$ かつ n が偶数ならば，n 点 non-antipodal spherical T_m-design は存在するか．

この問題が解決されれば，問題 1.4 は完全な形で解答されたことになる．現時点において，n を偶数として n 点 non-antipodal spherical T_m-design では $n \leq 4m$ なる例は構成，発見できていない．また，問題 1.4 をより条件を弱くした場合の問題も考えられる．

問題 5.2. m を自然数，$T \subset \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$, $|T| = m$，X を n 点からなる $\mathbb{S}^{d-1}$ 上 spherical T-design とする．このとき，X が必ず antipodal といえるための (m, n) に関する条件は何か？

この問題は主定理と同様であるとは言えない．実際，n を奇数として X を正 n 角形とすれば，当然これは non-antipodal で，harmonic index は $\mathbb{N} \setminus n\mathbb{N}$ であることがわかっている．その為，問題 5.2 の $|T|$ はいくらでも大きくなることがわかる．つまり、m を大きくすれば、X の antipodal 性が従うという、定理 3.2 の類似は少なくとも $d = 2$ の場合において正しくないことがわかる．

さらに本研究では，interval design や重み付き interval design についても類似の結果が得られた．これらの結果はより広い対象で同様の結果が起きうることを示唆している．

問題 5.3. 重み付き spherical design や，euclidean design，バイハミングスキーム上の design において同様の結論が得られるか?

参考文献

[1] Delsarte, P., Goethals, J. M., and Seidel, J. J., "Spherical codes and designs," *Geometriae Dedicata*, vol. 6, no. 3, pp. 363–388, 1977.

[2] Bajnok, Bela, "Construction of designs on the 2-sphere," *European J. Combin.*, vol. 12, no. 5, pp. 377–382, 1991.

[3] Hong, Y., "On spherical t-designs in $\mathbf{R}^2$," *European J. Combin.*, vol. 3, no. 3, pp. 255–258, 1982.

[4] Eiichi Bannai, Takayuki Okuda, and Makoto Tagami, "Spherical designs of harmonic index t," *Journal of Approximation Theory*, vol. 195, pp. 1–18, 2015.

[5] Masatake Hirao, Hiroshi Nozaki, and Koji Tasaka, "Spherical designs and modular forms of the D_4 lattice," *Research in Number Theory*, vol. 9, no. 4, Paper No. 77, 18 pp., 2023.

[6] Yan Zhu, Eiichi Bannai, Etsuko Bannai, Kyoung-Tark Kim, and Wei-Hsuan Yu, "On spherical designs of some harmonic indices," *Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 24, no. 2, Paper No. 2.14, 28 pp., 2017.

[7] Takayuki Okuda and Wei-Hsuan Yu, "A new relative bound for equiangular lines and nonexistence of tight spherical designs of harmonic index 4," *European Journal of Combinatorics*, vol. 53, pp. 96–103, 2016.