線形補双対符号の直交射影について

石塚慶太

March 31, 2025

Abstract

線形補双対符号（以下，LCD 符号）は共通鍵暗号や量子誤り訂正符号への応用が知られた 2010 年代後半以降，盛んに研究されている符号である．本稿では，LCD 偶符号とある種の単純グラフの間に同値関係を保つ全単射が存在することを示す．また，強正則グラフから構成される符号の最小重みの最小値の評価を行う．さらに応用として，強正則グラフから構成される符号の考察を行う．

1 序論

グラフの不変量と符号の不変量の関連が本研究のテーマである．符号とグラフの関連については，以下のようなことが知られている：行列 A の $\mathbb{F}_p$ 上での rank を p-rank という．強正則グラフの隣接行列の p-rank は隣接行列の固有値で特徴づけられることがわかっている [2]．Massey は LCD 符号を導入し，符号が直交射影を持つ必要十分条件は符号が LCD であることを示した [9]．直交射影は対称行列なので，単純グラフの隣接行列のいくつかは直交射影に一致する．このような観察に基づき，Rodrigues と Keys は LCD 符号とグラフの隣接行列の関連を調べた．そして，単純グラフの隣接行列が $\mathbb{F}_q$ 上の LCD 符号を生成する 2 つの条件を与えた．ここで，q は素数べきを表す．

本研究では特に $\mathbb{F}_2$ 上の LCD 符号に着目して，LCD 偶符号とある種の単純グラフとの間に同値関係を保つ全単射があることを示す．この「ある種の単純グラフ」には，強正則グラフの一部も含まれる．また，強正則グラフから構成される $\mathbb{F}_2$ 上の符号の最小重みの下限を与える．Haemers, Peeters, Rijckevorsel [6] は計算機を援用して，強正則グラフから $\mathbb{F}_2$ 上の符号を構成して観察した．その結果，あるパラメータを持つ強正則グラフでは，非同型なグラフの組は非同値な符号の組を与えることがわかった．本研究の結果の応用として，上の観察の説明を与える．

1.1 線形符号

q を素数べきとして，$\mathbb{F}_q$ で位数 q の有限体を表す．$[n,k]_q$ 符号とは，$\mathbb{F}_q^n$ の k 次元部分空間である．$[n,k]_q$ 符号は $\mathbb{F}_q$ 上の $[n,k]$ 符号とも呼ばれる．ここで，n および k はそれぞれ符号の長さおよび次元と呼ばれる．ベクトル $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{F}_q^n$ のサポートは $\mathrm{supp}(x)=\{1\le i\le n \mid x_i\ne 0\}$ であり，ハミング重みは $\mathrm{wt}(x)=|\mathrm{supp}(x)|$ である．ベクトル $x,y\in\mathbb{F}_q^n$ のハミング距離は，$d(x,y)=\mathrm{wt}(x-y)$ であ

る．符号 C に属する全てのベクトルの重みが偶数である時, C を偶符号という．そうでない場合は, C は奇付号と呼ばれる．符号 C の最小重みは $\mathrm{wt}(C) = \min\{\mathrm{wt}(x) \mid x \in C,\ x \neq 0\}$ である．符号 C の最小距離は $d(C) = \min\{d(x,y) \mid x, y \in C, x \neq y\}$ である．最小距離が d である $[n,k]_q$ 符号を，$[n,k,d]_q$ 符号と書く．以下の定理に基づいて，符号の最小距離と最小重みはしばしば同一視される．

定理 1.1. 符号 C について $d(C) = \mathrm{wt}(C)$ が成立する．

符号 C の双対符号は $C^{\perp} = \{x \in \mathbb{F}_q^n \mid (x,y) = 0 \text{ for all } y \in C\}$ である．ここで (x,y) は標準内積を表す．符号は基底を行ベクトルに並べた生成行列で表す．双対符号 $C^{\perp}$ の生成行列を符号 C のパリティ検査行列と呼び，H で表す．ベクトル $x \in \mathbb{F}_q^n$ が符号 C に属する必要十分条件は $xH^T = 0$ となることである．

定理 1.2. $[n,k]_q$ 符号 C のパリティ検査行列を H とし，H の第 i 列を l_i で表す．以下は同値である．

(i) 線形従属な列ベクトルの集合 $\{l_i\}_{i \in T}$ が存在する．

(ii) $\mathrm{supp}(x) = T$ なる符号語 $x \in C$ が存在する．

整数 n, k, q に対して，$[n,k]_q$ 符号は複数存在しうる．最も大きな最小重みをもつ $[n,k]_q$ 符号を最適な $[n,k]_q$ 符号という．ある観点で最大（または最小）であるような構造を構成することは組合せ論の多くの分野の基本的課題であるため，最適な符号の構成の理論的な意義は明らかである．加えて，最適な符号は情報通信への応用上も有用であることが知られている．そのために，最適な符号の構成は符号理論の基本的な問題の一つとなっている．Grassl の codetable は，既知の最適な $[n,k]_q$ 符号をまとめたデータベースである [4]．

符号 C, C' が単項同値であるとは，ある単項行列 M が存在して $C' = CM = \{cM \mid c \in C\}$ であることをいう．言い換えれば，一方に対して以下の 2 つの操作を行うことで他方に一致させることができる時，2 つの符号は同値であるという．(i) 座標を置換する (ii) 各座標に対して非ゼロなスカラーをかける．これらの操作はいずれもハミング距離についての等長写像になっていることは明らかである．ハミング距離（特に最小距離）は符号の誤り訂正能力を決定づける不変量なので，等長写像を同値の定義とするのは自然である．より強い同値の定義として置換同値がある．符号 C, C' が置換同値であるとは，ある置換行列 P が存在して $C' = CP = \{cP \mid c \in C\}$ であることをいう．$\mathbb{F}_2^n$ 上の符号については上述の 2 種の同値の定義は一致するが，それ以外の有限体上の符号では単項同値が置換同値よりも一般の概念である．しばしば，単項同値と置換同値を区別せずに単に同値という．文脈から，どの同値を考えているかが明らかである場合は多い．

1.2 LCD 符号とは

本節では LCD 符号の定義および基本的な特徴を述べる．

定義 1.3. $[n,k]_q$ 符号 C が $C \cap C^{\perp} = \{0\}$ を満たす時，C を LCD 符号と呼ぶ．

例 1.4. $C^{\perp}$ が補空間でない符号 C の例を挙げる．$C = \{(0,0),(1,1)\}$ は $[2,1]_2$ 符号である．$C^{\perp} = \{(0,0),(1,1)\}$ なので，$C = C^{\perp}$ である．

$C = C^{\perp}$ なる符号 C を self-dual 符号という．self-dual 符号は組合せ論の他の分野との関連において重要な古典的符号である．例えば，Mathieu 群を自己同型群に持つことで有名な Golay 符号は self-dual 符号である．また，Assmus–Mattson の定理により符号から組合せデザインと呼ばれる有益な構造が得られるのだが，この定理の主な用途が self-dual 符号から組合せデザインを構成することである．LCD 符号，self-dual 符号はそれぞれ，$C \cap C^{\perp}$ の次元が最小，最大の符号である．$C \cap C^{\perp}$ は符号の Hull と呼ばれ，$\mathrm{Hull}(C)$ で表記される．Hull に着目して LCD 符号と self-dual 符号を関連付ける研究として，[5] がある．

Massey [9] は LCD 符号を導入し以下の特徴づけを与えた．同論文では良い LCD 符号が漸近的に存在すること及びある種の通信路において LCD 符号が最も良い誤り訂正能力を有することも証明している．

定理 1.5. C を $[n,k]_q$ 符号とし，G をその生成行列とする．以下は同値である：

(i) C は LCD 符号である;

(ii) $C \oplus C^{\perp} = \mathbb{F}_q^n$;

(iii) $\det GG^T \neq 0$;

(iv) C に直交射影が Π_C が存在し，$\Pi_C = G^T(GG^T)^{-1}G$ と表される．

1.3 強正則グラフ

本節では，強正則グラフの定義と基本的な性質を述べる．より詳しい説明については，例えば [3] を参照されたい．グラフ $\Gamma = (V, E)$ は，有限な点の集合 V と辺の集合 $E \subset \binom{V}{2}$ からなる．本稿では，単純グラフ（すなわち無向かつループや多重辺のないグラフ）を対象とし，以降単に「グラフ」と呼ぶ．点 $x, y \in V$ について $\{x, y\} \in E$ である時，x, y が隣接しているといい $x \sim y$ で表す．集合 $N(x) = \{y \in V \mid x \sim y\}$ の濃度を $x \in V$ の次数という．$\Gamma = (V, E)$ の隣接行列 A は $|V| \times |V|$ 行列であって，行と列が $x, y \in V$ の点でラベルされており $x \sim y$ の時は $A_{x,y} = 1$，$x \not\sim y$ の時は $A_{x,y} = 0$ となるものである．Γ, Γ' はそれぞれ，隣接行列が A, A' であるグラフとする．これらが同型であるとは，ある置換行列 P が存在して $A' = P^T AP$ が成立することである．

全ての点が等しい次数 k を持つグラフは k-正則グラフと呼ばれる．グラフが (v, k, λ, μ)-強正則グラフであるというのは，点の個数が v，次数が k で，任意の 1 組の互いに隣接する点たちに同時に隣接する点の個数が λ 個，任意の 1 組の互いに隣接しない点たちに同時に隣接する点の個数が μ であることを言う．(v, k, λ, μ)-強正則グラフのことを $srg(v, k, \lambda, \mu)$ と書くこともある．強正則グラフについて，以下の定理が知られている [3]．なお，本稿を通して，I 及び J はそれぞれ，適切な位数の単位行列及び全ての成分が 1 である行列を表す．

定理 1.6. A を $srg(v, k, \lambda, \mu)$ の隣接行列として，$A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A)$ が成立する．

行列 A の $\mathbb{F}_p$ 上での rank を p-rank という．強正則グラフの隣接行列の p-rank は隣接行列の固有値で特徴づけられることがわかっている [2]．Haemers, Peeters, Rijckevorsel [6] は強正則グラフの隣接行列の行ベクトルの張る空間とし

て得られる $\mathbb{F}_2$ 上の符号を考察して，いくつかの計算機による観察を得た．Key と Rodrigues [7] は直交射影を用いて，強正則グラフの隣接行列から LCD 符号を構成した．さらに彼らは，グラフの隣接行列が $\mathbb{F}_q$ の LCD 符号を与える十分条件を求めた [7, Proposition 2].

2　LCD 符号とグラフとの関連

以降，LCD 符号かつ偶符号である符号を LCD 偶符号と呼ぶことにする．また，$C(A)$ で行列 A の行ベクトルで張られる $\mathbb{F}_2$ 上の符号を表すことにする．本節では，LCD 偶符号とある種のグラフの間に同値関係を保存する全単射が存在することを証明する．この際に用いられるのが直交射影である．$[n,k]_q$ 符号 C の直交射影 Π_C は，$\mathbb{F}_q^n$ から C への線形写像であって，以下の条件を満たすものである．

$$v\Pi_C = \begin{cases} v & \text{if } v \in C, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

任意の直交射影は行列 $A^T = A$ かつ $A^2 = A$ を満たす行列 A で表される．逆に，$A^T = A$ かつ $A^2 = A$ を満たす行列 A はある直交射影を表す．符号の直交射影については，例えば [1,9] を参照されたい．

　定理 1.5 にあるように，符号 C の直交射影は C が LCD 符号であるときかつその時に限り存在する．$\mathbb{F}_2$ 上の直交射影は対称な $(0,1)$-行列である．一方で，グラフの隣接行列は対角成分が全て 0 である対称な $(0,1)$-行列である．両者が一致する条件を調べることで主結果（定理 2.4）が得られる．本節の流れとして，まず $\mathbb{F}_q$ 上で成り立つ補題を証明する．その後，特に $\mathbb{F}_2$ に限って成り立つ補題を証明する．それらを合わせて定理 2.4 を証明する．

補題 2.1. C を $\mathbb{F}_q$ 上の LCD 符号, A をその直交射影とする．このとき, $C = C(A)$ が成り立つ．

証明．e_i を第 i 成分のみが 1 の単位ベクトルとし, r_i を A の第 i 行とする. $Ae_i = r_i$ が全ての $1 \le i \le n$ について成立する．よって，A の行ベクトルの張る空間は C の部分空間である．逆に，全ての $c \in C$ について $Ac = c$ が成立する．これは，c が A の行ベクトルの張る空間に属することを表している．よって，C は A の行ベクトルの張る空間の部分空間である．以上より，主張が従う． □

定理 2.2. C 及び C' を $\mathbb{F}_q$ 上の LCD 符号とする．さらに，A 及び A' をそれぞれ C 及び C' の直交射影とする．C と C' が同値である必要十分条件は，$A' = N^TAN$ を満たす単項行列 N が存在することである．

証明．G 及び G' をそれぞれ C 及び C' の生成行列とする．C と C' が同値ならば，単行行列 M 及び N が存在して $G' = MGN$ を満たす．以下の計算から，$A' = N^TAN$ が従う．

$$\begin{aligned} A' &= (MGN)^T((MGN)(MGN)^T)^{-1}(MGN) \\ &= N^TG^TM^T(MGG^TM^T)^{-1}(MGN) \\ &= N^TG^T(GG^T)^{-1}GN \\ &= N^TAN. \end{aligned}$$

逆に，単項行列 N が存在して $A' = N^T AN$ を満たすと仮定する．A の行ベクトルの張る空間は，座標の入れ替え及び各座標を非ゼロ倍する操作で不変である．特に，A と $N^T A$ の行ベクトルが張る空間は同じである．補題 2.1 より，A 及び A' の行ベクトルの張る空間が C 及び C' である．よって，$C' = CN$ が得られた．即ち，C と C' は単項同値である． □

補題 2.3. C を $\mathbb{F}_2$ 上の LCD 符号，A をその直交射影とする．A がグラフの隣接行列である必要十分条件は，C が偶符号であることである．

証明. A の第 i 行を r_i で表す．A がグラフの隣接行列であれば，A のあらゆる対角成分は 0 である．$A = A^2$ の第 i 対角成分は (r_i, r_i) であるから，これは A のあらゆる行の重みが偶数であることに等しい．補題 2.1 より，C は偶符号である．

逆に，C が偶符号であると仮定する．A は対称な $(0,1)$-行列であるので，A のあらゆる対角成分が 0 であることを示せば良い．C は偶符号なので，C に属するどのベクトルの重みも偶数である．これより，$(r_i, r_i) = 0$ が全ての $1 \leq i \leq n$ について成立する．$A = A^2$ の第 i 対角成分は (r_i, r_i) であるので，対角成分は全て 0 である．よって，主張が示された． □

定理 2.4. LCD 偶符号の直交射影 A は，あるグラフの隣接行列であって $A^2 = A$ を満たす．ここで，A は $\mathbb{F}_2$ 上の行列とみなす．逆に，$A^2 = A$ を満たすグラフの隣接行列は LCD 偶符号の直交射影である．さらに，2 つの LCD 偶符号が同値であるとき，かつその時に限り，対応するグラフは同型である．

証明. 前半の主張は補題 2.1 及び補題 2.3 より直ちに従う．後半の主張を示すため，Γ 及び Γ' を，隣接行列 A 及び A' を持つグラフとする．Γ と Γ' が同型であるとき，ある置換行列 P が存在して，$A' = P^T AP$ である．あらゆる置換行列は単項行列なので，定理 2.2 より主張が従う． □

以上により，LCD 偶符号とある種のグラフの間に同値関係を保つ全単射があることを示した．ここで，ある種のグラフというのは，$\mathbb{F}_2$ 上で $A^2 = A$ を満たす隣接行列を持つグラフのことである．このようなグラフは，以下の条件で特徴づけられることが定理 1.6 と同様の議論からわかる．

- 各点の次数は偶数である．
- x と y が隣接している場合，x と y の両方に隣接する点の個数は奇数である．
- x と y が隣接していない場合，x と y の両方に隣接する点の個数は偶数である．

このようなグラフの一例として，(v, k, λ, μ)-強正則グラフであって，$k, \mu \equiv 0 \pmod 2$ かつ $\lambda \equiv 1 \pmod 2$ を満たすものが挙げられる．

3　強正則グラフから構成される符号の最小重み

本節では，強正則グラフの隣接行列から構成される符号の最小重みについて考察する．

命題 3.1. A を $srg(v,k,\lambda,\mu)$ の隣接行列として，$C=C(A)$ とおく．このとき，$d(C^{\perp}) \geq 1+k/t$ ($t=\max\{\lambda,\mu\}$) が成立する．

証明．$d=d(C^{\perp})$ と仮定する．このとき，A には d 個の線型独立な列ベクトルが存在する．S を A の部分行列で，そのような列ベクトルからなるものとする．さらに，n_i で S に含まれる重みが i の行の個数を表す．S の各行ベクトルの成分の和は 0 なので，その重みは偶数である．S に含まれる 1 の個数及び 1 の組を 2 通りに数え上げることで，以下の不等式を得る．

$$\sum_i (2i)n_{2i} = dk,$$

$$\sum_i (2i)(2i-1)n_{2i} \leq d(d-1)t.$$

これより，$0 \leq \sum_i 2i(2i-2) \leq d((d-1)m-k)$ すなわち $d \geq 1+k/m$ が従う． □

命題 3.2. A を $srg(v,k,\lambda,\mu)$ の隣接行列として，$C=C(A+I)$ とおく．このとき，$d(C^{\perp}) \geq 1+(k+1)/(t+1)$ ($t=\max\{\lambda,\mu\}$) が成立する．

証明．命題 3.1 の証明と同様の記法において，S に含まれる 1 の個数及び 1 の組を 2 通りに数え上げることで，以下の不等式を得る．

$$\sum_i (2i)n_{2i} = d(k+1),$$

$$\sum_i (2i)(2i-1)n_{2i} \leq d(d-1)(t+1).$$

これより $d \geq 1+(k+1)/(t+1)$ が従う． □

系 3.3. A を $srg(v,k,\lambda,\mu)$ の隣接行列として，$C=C(A)$ とおく．k が奇数ならば，$d(C^{\perp})$ は偶数である．

証明．命題 3.1 の証明と同様の記法において，S に含まれる 1 の個数を 2 通りに数え上げることで，以下の不等式を得る．

$$\sum_i (2i)n_{2i} = dk.$$

ここで d を奇数であると仮定すれば，左辺は偶数で右辺は奇数である．これは矛盾であるので，結果が従う． □

4 強正則グラフから構成される LCD 符号

Haemers, Peeters, Rijckevorsel は計算機を用いて，強正則グラフの隣接行列の行ベクトルが張る空間として $\mathbb{F}_2$ 上の符号を構成しその性質を観察した．その結果，以下の興味深い観察を得た [6].

(i) $srg(25,12,5,6)$ 及び $srg(41,20,9,10)$ については，任意の非同型なグラフの組は非同値な符号の組を与える．

(ii) $srg(25,12,5,6)$ 及び $srg(41,20,9,10)$ から構成される符号のうち，Paley グラフから得られる符号が最も最小重みの大きい符号を与える．

本節では，先述の LCD 符号とグラフの関連を用いて，以下のことを証明する．なお，$srg(25,12,5,6)$ 及び $srg(41,20,9,10)$ から得られる $\mathbb{F}_2$ 上の符号の次元は，それぞれ 12 及び 20 であることに注意されたい [2].

(i) 前者の条件が一般の $srg(q,(q-1)/2,(q-5)/4,(q-1)/4)$ for $q \equiv 1 \pmod 8$ で成立すること．

(ii) 後者の条件が $srg(41,20,9,10)$ で成立すること．

本節では，まず前者の条件が一般の $(q,(q-1)/2,(q-5)/4,(q-1)/4)$ for $q \equiv 1 \pmod 8$ で成立することを示す. その後, 後半の条件が $srg(41,20,9,10)$ で成立することを示す．どちらも主結果の簡単な系として導くことができる．$srg(25,12,5,6)$ の分類は完了しており，$srg(25,12,5,6)$ は 15 個の非同型のグラフが存在する [10]. さらに，これらのグラフのうち Paley グラフが最小重み最大の符号を与えることが計算機を用いて示されている [6, Section 6.1]．このため，$srg(25,12,5,6)$ について後半の主張はすでに解決済みである．一方で $srg(41,20,9,10)$ の分類はまだ完了していないため，同様の方法で証明することはできない.

系 4.1. $srg(q,(q-1)/2,(q-5)/4,(q-1)/4)$ $(q \equiv 1 \pmod 8)$ に属する任意の非同型なグラフの組は非同値な符号の組を与え，同型なグラフの組は同値な符号の組を与える．

証明．A を $srg(q,(q-1)/2,(q-5)/4,(q-1)/4)$ $(q \equiv 1 \pmod 8)$ の隣接行列とする．定理 1.6 より，$A^2 = \frac{q-1}{2}I + \frac{q-5}{4}A + \frac{q-1}{4}(J-I-A)$ が成立する．$q \equiv 1 \pmod 8$ より，$A^2 = A$ が $\mathbb{F}_2$ 上で成立する．このことと定理 2.4 より，$C(A)$ は LCD 偶符号である．これより，結果が従う． □

系 4.2. グラフ Γ の隣接行列が $\mathbb{F}_2$ 上で生成する空間を，Γ の生成する符号と呼ぶ．$srg(41,20,9,10)$ の生成する符号のうち，位数 41 の Paley グラフが最大の最小重みを持つ符号を与える．

証明．$srg(41,20,9,10)$ の生成する符号は次元が 20 であることが [2] より従う．Griesmer bound により $[41,20]$ 符号の最小重みは高々 11 である．系 4.1 によれば，$srg(41,20,9,10)$ の生成する符号は偶符号なので，最小重みは高々 10 である．Paley グラフは $[41,20,10]$ 符号を生成することが，計算機を用いて簡単に確かめられる．これより主張が従う． □

注意 4.3. [8] によれば，現在知られている非同型な $srg(41,20,9,10)$ は 7152 個である．計算機を援用してこれら 7152 個のグラフから LCD 偶符号を構成し，以下のことを確かめた.

(i) 最大の最小重みを与えるグラフは Paley グラフのみである．

(ii) これらのグラフから構成される符号の最小重みの最小値は 4 である．

系 4.2 において Paley グラフ以外に最大の最小重みを与えるグラフの存在は否定されていないことに注意されたい．しかし，上の計算より，現在見つかっているグラフのうちにそのようなものは存在しないことがわかる．また，最小重みについては，前節で得られた下限はこの場合には tight であることがわかる．というのも，$srg(41, 20, 9, 10)$ から構成される符号の最小重みは命題 3.2 より $d \geq 1 + (k+1)/(\min\{\lambda, \mu\} + 1) = 3$ である．さらに定理 2.4 より偶符号であるので最小重みの下限は 4 である．

5 まとめ

本稿ではグラフの不変量と符号の不変量の関連というテーマで研究を行った．その結果，LCD 偶符号とある種のグラフの間に同値関係を保つ全単射があることを示した．応用として，特定のパラメータを持つ強正則グラフについて，同値なグラフから同値な符号が構成されるという Haemer たちの観察に説明を与えた [6]．また，位数 41 の Paley グラフが，同様のパラメータを有する強正則グラフのうちで最も最小重みの大きい符号を構成することの簡潔な証明も得られた．有限体に基づいて構成される対称性の高い Paley グラフが，同じパラメータを持つ強正則グラフと比較して最大の最小重みを持つ符号を生成するというのは興味深い．これに関連する未解決の問題として，$srg(q, (q-1)/2, (q-5)/4, (q-1)/4)$ $(q > 41, q \equiv 1 \pmod 8)$ から構成される符号のうち，Paley グラフから構成されるものが最大の最小重みを持つか，というものがある．さらに，Paley グラフ以外に最大の最小重みを持つ LCD 符号を構成するような強正則グラフが存在するかも興味深い問いである．

References

[1] M. Bardet, A. Otmani, and M. Saeed-Taha, *Permutation code equivalence is not harder than graph isomorphism when hulls are trivial*, 2019 ieee international symposium on information theory (isit), 2019, pp. 2464–2468.

[2] A. E. Brouwer and C. A. Van Eijl, *On the p-rank of the adjacency matrices of strongly regular graphs*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), no. 4, 329–346.

[3] P. J. Cameron, J. H. Van Lint, and P. J Cameron, *Designs, graphs, codes and their links*, Vol. 3, Cambridge University Press Cambridge, 1991.

[4] M. Grassl, *Bounds on the minimum distance of linear codes and quantum codes.* Available online at `http://www.codetables.de`, Accessed on 2024-07-22.

[5] K. Guenda, S. Jitman, and T. A. Gulliver, *Constructions of good entanglement-assisted quantum error correcting codes*, Des. Codes Cryptogr. **86** (2018), no. 1, 121–136.

[6] W. H. Haemers, R. Peeters, and J. M. van Rijckevorsel, *Binary codes of strongly regular graphs*, Des. Codes Cryptogr. **17** (1999), no. 1, 187–209.

[7] J. D. Key and B. G. Rodrigues, *LCD codes from adjacency matrices of graphs*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **29** (2018), no. 3, 227–244.

[8] M. Maksimović and S. Rukavina, *New regular two-graphs on* 38 *and* 42 *vertices*, Math. Commun. **27** (2022), no. 2, 151–161.

[9] J. L. Massey, *Linear codes with complementary duals*, Discrete Math. **106/107** (1992), 337–342.

[10] A. J. L. Paulus, *Conference matrices and graphs of order* 26, Technische Hogeschool Eidhoven, report WSK (1983), 89 pp.