

# 多価性・特異性を考慮した境界要素法による

## 磁性流体界面現象の時間発展解析

元 北海道大学工学部 水田 洋

Yo Mizuta

Faculty of Engineering, Hokkaido University

### 1 はじめに

磁性流体には Rosensweig 不安定性 [1] のような特有の界面現象があるが、その安定性解析・時間発展解析を行う場合、界面が速く複雑に変形するたびに磁場解析と流体解析の両方が必要になるため、界面が大きく変形したり印加磁場分布が任意でも適用可能な、正確かつ効率的な数値解析システムの構築が望まれる。ただし、界面量 (磁場・応力・流速など) を調べれば十分なことが多く、静磁場および非圧縮・非回転・非粘性流体を仮定すれば、境界要素法 (Boundary Element Method, BEM) を用いて、磁場解析では磁気ポテンシャル  $\phi$ ・法線磁束密度  $b_z$  を、流体解析では流速ポテンシャル  $\varphi$ ・法線流速  $v_n$  を境界に限って求めることができる [2]。

磁性流体の界面現象については、界面力学方程式 (Equation for Interface Motion, EIM) による流体解析 (2 節) と汎用磁場解析 (Magnetic Analysis for General Use, MAGU) による磁場解析を組み合わせた [3, 4, 5] 界面安定性の分岐 [4, 6, 7] や界面物理量の波数スペクトルの時間変化 [7, 8, 9]、あるいは、Rosenweig 不安定近傍で界面変形の成長減衰を振幅方程式により調べる非線形緩和力学 [10, 11] がある。これらと比較するため、本研究では、以前、**間接境界要素法**による磁場解析・流体解析により、一様鉛直磁場中の 2 層系の界面上で磁場・応力・流速を求め、Rosenweig 不安定性の安定性解析との関係を議論した [12]。

本論文では、より安定で正確な時間発展解析が可能となるよう、双極子モーメント密度を用いた間接境界要素法の代わりに、**直接境界要素法**に基づく磁場解析・流体解析について議論する (3 節) [13]。このとき、境界同士が交わる交線上の点で多価になる物理量の扱いを考慮しながら、離散化係数が対角項で持つ特異性を定ベクトル場条件を用いて回避する方法を考察する (3.2 節) [14]。また、磁場解析・流体解析それぞれについて、境界条件の選び方に注意する (4 節)。磁場解析の妥当性を検証した後 (5 節)、時間発展解析により [17]、印加磁場を強くすると早まる界面変動の不安定化について、界面変位・界面応力和・界面磁束密度・界面流速の関係を 6 節で調べる。

### 2 非線形磁化を考慮した界面力学方程式

非圧縮・非回転・非粘性の磁性流体界面の動的解析を界面形状の制限なく行うためには、Bernoulli 方程式と界面上の力学的条件から導かれる次の界面力学方程式 (EIM) を用いる [12, 15]。

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S = 0, \quad S \equiv G + C + T_N + D + p_0. \quad (1)$$

ここで、 $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $S$ ,  $G$ ,  $C$ ,  $T_N$ ,  $D$ ,  $p_0$  はそれぞれ、流体密度・流速ポテンシャル・界面応力和・重力ポテンシャル・表面張力・磁気応力差・動圧・大気圧である。(1) の時間積分から求めた  $\varphi$  は、流体解析の BEM で Dirichlet 条件を与え、対になる法線流速  $v_n$  が決まれば、合わせて界面流速  $\boldsymbol{v}$  が得られる。これにより、次の時間ステップの界面変位を求めることができる。なお、界面の動きが充分遅くまた大気圧が一様として、以後、 $S$  中の  $D$  と  $p_0$  は無視する。

磁気応力差  $T_N$  は界面磁場から決まり、磁場から流体への作用を表す。磁性流体では、磁場の強さ  $H$  がある程度以上強くなると、飽和磁化のため、磁化  $M$  が  $H$  に比例しなくなる (非線形磁化)。

$$M(H) = M_S \left\{ \coth(\gamma H) - \frac{1}{\gamma H} \right\} \cdot \begin{pmatrix} \chi_0 : \text{初期帯磁率} \\ M_S : \text{飽和磁化} \\ \gamma \equiv 3\chi_0 / M_S \end{pmatrix} \quad (2)$$

このとき磁気応力差は、両領域に共通な界面磁場、すなわち接線磁場  $h_{X,Y}$  と法線磁束密度  $b_Z$  から次のように決まる [16].

$$T_N = -\frac{\mu_0}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_0} \right) b_Z \right\}^2 - \mu_0 \frac{M_S}{\gamma} \ln \left( \frac{\sinh \gamma H}{\gamma H} \right), \quad (3)$$

$$H = \sqrt{h_X^2 + h_Y^2 + \left( \frac{b_Z}{\mu_1} \right)^2}.$$

流体の透磁率  $\mu_1$  は、線形磁化の場合や真空透磁率  $\mu_0$  とは違い、 $H$  に応じて変化する ( $B_1$ : 流体側の磁束密度,  $H_1$ : 流体側の磁場). その結果、 $\mu_1$  は領域内で一様にならず、 $H$  を通して座標  $\mathbf{r}'$  に依存するようになる (非一様透磁率).

$$\mu_1 \equiv \frac{B_1}{H_1} = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{M_S}{H} \left( \coth(\gamma H) - \frac{1}{\gamma H} \right) \right\} = \mu(H(\mathbf{r}')) = \mu(\mathbf{r}'). \quad (4)$$

### 3 直接境界要素法 (DBEM) による磁場解析と流体解析

#### 3.1 直接境界要素法 (DBEM) の基礎式と定ベクトル場条件

任意の界面形状と印加磁場分布の下で、流体・真空各領域内部での調和性と界面上での連続条件を満たす界面磁場  $h_{X,Y}$  と法線磁束密度  $b_Z$  は、境界要素法を利用して求められる [12].

$\mathbf{h}' = \nabla' \phi'$ ,  $\mathbf{b}' = \mu' \mathbf{h}'$  のように磁場と磁束密度を導き Gauss の法則  $\nabla' \cdot \mathbf{b}' = \nabla' \cdot (\mu' \nabla' \phi') = 0$  を満たす磁気ポテンシャルを  $\phi'$  とするとき、直接境界要素法の基礎式は Green の定理から導かれる. ただし、非一様透磁率のため、透磁率  $\mu(\mathbf{r}') = \mu'$  が場所の関数となることを考慮し、Green の定理を Gauss の定理で次のように拡張する [15].

$$\iiint_V dV' \{ \phi' \nabla' \cdot (\mu' \nabla' \psi) - \psi \nabla' \cdot (\mu' \nabla' \phi') \} = \oint_S dS' \cdot \{ \phi' (\mu' \nabla' \psi) - \psi (\mu' \nabla' \phi') \}. \quad (5)$$

ここでは、 $S, V$  を閉曲面とその内部領域、 $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  を観測点とソース点とし、ソース点だけの関数や微分を  $l$  で表している. また、 $\psi$  は  $\nabla' \cdot (\mu' \nabla' \psi) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  を満たす Green 関数である.

Fig. 1(a) のような、流体領域 ( $J=1$ )・真空領域 ( $J=0$ ) から成る 2 層系を考え、各領域の境界  $S_J$  上の接線単位ベクトル  $\mathbf{t}_{XJ,YJ}$ , 法線単位ベクトル  $\mathbf{t}_{ZJ}$  をまとめて  $\mathbf{t}_{IJ}$  ( $I=X, Y, Z$ ) と表す. 各領域の (5) からは、 $S_J$  上の磁気ポテンシャル  $\phi_J$  と法線磁束密度  $b'_{ZJ} \equiv \mu'_J (\mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \nabla') \phi'_J$  あるいは磁束密度成分  $b_{IJ} = \mu_J (\mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla) \phi_J$  ( $I=X, Y, Z$ ) に対する直接境界要素法の基礎式が、(6) 第 1 式のように導かれる.

$$\begin{cases} \alpha \phi_J = \oint_{S_J} dS' (q_J \phi'_J - \psi_J b'_{ZJ}), \\ \alpha \frac{b_{IJ}}{\mu_J} = \oint_{S_J} dS' (q_{IJ} \phi'_J - \psi_{IJ} b'_{ZJ}), \end{cases} \quad \begin{cases} (q_J \equiv \mu'_J (\mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \nabla') \psi_J, \\ \psi_{IJ} = (\mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla) \psi_J, \\ q_{IJ} = (\mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla) q_J. \end{cases} \quad (6)$$

第 2 式は、第 1 式の観測点  $\mathbf{r}$  に関する  $I$  方向偏微分にあたる.  $\alpha$  は、 $\mathbf{r}$  が  $S_J$  の内部・境界上・外部いずれにあるかに応じて 1, 1/2, 0 である. また、 $\psi_J$  は 3 次元 Poisson 方程式  $\nabla' (\mu_J \nabla' \psi_J) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  の解で、 $J$  によらず  $\nabla' \cdot (\nabla' \psi) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  を満たす  $\psi = -1/4\pi R$  ( $R \equiv |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ ) と  $\mu_J \nabla' \psi_J = \nabla' \psi$  のように関係する.

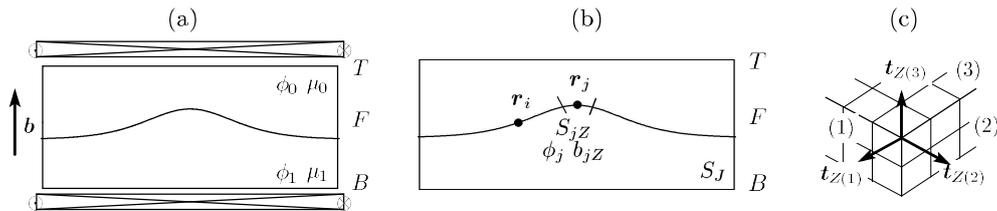


Fig.1: (a) Two-layered system under homogeneous vertical magnetic field. (b) Discretization of boundaries. (c) Multiple normal vectors on corner where boundaries cross.

境界要素法は、 $\nabla' \cdot (\nabla' \phi') = 0$  を満たす流速ポテンシャル  $\phi$  による非圧縮・非回転・非粘性流体の解析にも適用される。

$\mathbf{h}_0, \phi_0$  を定ベクトル・定数とするとき、

$$\begin{cases} \phi_J = \mathbf{h}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \phi_0, & b_{IJ} = \mu_J \mathbf{t}_{IJ} \cdot \mathbf{h}_0, \\ \phi'_J = \mathbf{h}_0 \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) + \phi_0, & b'_{ZJ} = \mu'_J \mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \mathbf{h}_0 \end{cases} \quad (7)$$

もやはり調和場  $\phi_J, b_{ZJ}$  であり、基礎式 (6) を満たす。  $\mathbf{h}_0, \phi_0$  を任意として、これより導かれる定ベクトル場条件

$$\begin{cases} \alpha = \oint_{S_J} dS' q_J, & \alpha \mathbf{r} = \oint_{S_J} dS' (q_J \mathbf{r}' - \mu'_J \psi_J \mathbf{t}'_{ZJ}), \\ 0 = \oint_{S_J} dS' q_{IJ}, & \alpha \mathbf{t}_{IJ} = \oint_{S_J} dS' (q_{IJ} \mathbf{r}' - \mu'_J \psi_{IJ} \mathbf{t}'_{ZJ}) \end{cases} \quad (8)$$

は、次節において、離散化係数の間の総和則を導くために利用する。

### 3.2 基礎式と定ベクトル場条件の離散化

(6) の面積分  $S_J$  を  $N_J$  個の微小な面要素 (FE) の和で置き換える (Fig. 1(b)).  $\mathbf{r}_i$  を観測点座標,  $\mathbf{r}_j$  を  $j$  番目の面要素  $S_{jZ}$  の代表座標とする。  $S_{jZ}$  内で  $\phi'_j$  と  $b'_{Zj}$  は一定とし,  $\phi_j \equiv \phi'_j(\mathbf{r}_j)$ ,  $b_{jZ} \equiv b'_{Zj}(\mathbf{r}_j)$ ,  $\mu_j \equiv \mu'(\mathbf{r}_j)$ ,  $\phi_i \equiv \phi_J(\mathbf{r}_i)$ ,  $b_{iI} \equiv b_{IJ}(\mathbf{r}_i)$ ,  $\mu_i \equiv \mu(\mathbf{r}_i)$  と置けば、基礎式 (6) に対する離散式が (9) のように得られる。

$$\begin{cases} \alpha \phi_i = \sum_{j=1}^{N_J} (Q_{ij} \phi_j + P_{ij} b_j) = \sum_{j=1}^{N_J} \sum_{Z \in j} (Q_{ijZ} S_{jZ} \phi_j + P_{ij} S_{jZ} b_{jZ}), \\ \alpha \frac{b_{iI}}{\mu_i} = \sum_{j=1}^{N_J} (Q_{ij}^I \phi_j + P_{ij}^I b_j) = \sum_{j=1}^{N_J} \sum_{Z \in j} (Q_{ijZ}^I S_{jZ} \phi_j + P_{ij}^I S_{jZ} b_{jZ}). \end{cases} \quad (9)$$

ここでは以下のように、矢印左側のような離散面要素  $S_{jZ}$  上にわたる積分を、  $P_{ij}, P_{ij}^I$  や  $Q_{ijZ}, Q_{ijZ}^I, b_{jZ}$  から定義した  $Q_{ij}, Q_{ij}^I, b_j$  を用いて矢印右側のように置き換えている。

$$\begin{aligned} \sum_{Z \in j} \left( \iint_{S_{jZ}} dS' q_J \phi'_J \right)_{ijZ} &\rightarrow Q_{ij} \phi_j \equiv \sum_{Z \in j} Q_{ijZ} S_{jZ} \phi_j, \\ \sum_{Z \in j} \left( - \iint_{S_{jZ}} dS' \psi_J b'_{ZJ} \right)_{ijZ} &\rightarrow P_{ij} b_j \equiv \sum_{Z \in j} P_{ij} S_{jZ} b_{jZ}, \\ \sum_{Z \in j} \left( \iint_{S_{jZ}} dS' q_{IJ} \phi'_J \right)_{ijZ} &\rightarrow Q_{ij}^I \phi_j \equiv \sum_{Z \in j} Q_{ijZ}^I S_{jZ} \phi_j, \\ \sum_{Z \in j} \left( - \iint_{S_{jZ}} dS' \psi_{IJ} b'_{ZJ} \right)_{ijZ} &\rightarrow P_{ij}^I b_j \equiv \sum_{Z \in j} P_{ij}^I S_{jZ} b_{jZ}, \\ Q_{ijZ} &= \frac{\zeta_{R,jZ}}{4\pi R^2}, \quad P_{ij} \simeq \frac{1}{4\pi R \mu_j}, \quad Q_{ijZ}^I = \frac{3\zeta_{iI-R} \zeta_{R,jZ} - \zeta_{iI-jZ}}{4\pi R^3}, \quad P_{ij}^I = \frac{\zeta_{iI-R}}{4\pi R^2 \mu_j}, \\ b_j &\equiv \sum_{Z \in j} S_{jZ} b_{jZ}, \quad \mathbf{S}_j \equiv \sum_{Z \in j} S_{jZ} \mathbf{t}_{jZ}, \\ \mathbf{R} &\equiv \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, \quad R \equiv |\mathbf{R}|, \quad \mathbf{t}_R \equiv \mathbf{R}/R, \\ \zeta_{R,jZ} &\equiv \mathbf{t}_R \cdot \mathbf{t}_{jZ}, \quad \zeta_{iI-R} \equiv \mathbf{t}_{iI} \cdot \mathbf{t}_R, \quad \zeta_{iI-jZ} \equiv \mathbf{t}_{iI} \cdot \mathbf{t}_{jZ}. \end{aligned} \quad (10)$$

なおここでは、Fig. 1(c) のように、座標  $\mathbf{r}_j$  が同じでも法線方向  $\mathbf{t}_{jZ}$  が複数あることによる多価性を考慮している。この場合、磁気ポテンシャル  $\phi_j$  および  $P_{ij}, P_{ij}^I$  は  $\mathbf{r}_j$  と同様法線方向  $Z$  によらず共通であるが、磁束密度成分  $b_{jZ}$  および  $Q_{ijZ}, Q_{ijZ}^I$  は  $\mathbf{t}_{jZ}$  に応じて多価となる。(9) の  $\sum_{Z \in j}$  は、同じ  $j$  に属する複数の方向  $Z$  の和を表している。

観測点  $\mathbf{r}$  が境界上にあるとき、  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$  で Green 関数  $q_J, q_{IJ}, \psi_J, \psi_{IJ}$  は発散する。対角

項  $j = i$  における  $Q_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}^I, P_{ij}^I$  では、このような特異性を持つ Green 関数の面積分を求めなければならないが、ここでは、分点数を増やして数値的な精度を上げる代わりに方法を考える。

定ベクトル場条件 (8) を (6) と同様に離散化する。このとき、非対角項和

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} Q_{ij}, \quad C_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} \{Q_{ij}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + \mu_j P_{ij} \mathbf{S}_j\}, \\ A_i^I \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} Q_{ij}^I, \quad C_i^I \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} \{Q_{ij}^I(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + \mu_j P_{ij}^I \mathbf{S}_j\} \end{array} \right. \quad (11)$$

を定義すれば、離散化された定ベクトル場条件 (8) は、次の (12),(13) のような離散化係数  $Q_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}^I, P_{ij}^I$  の総和則になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{j=1}^{N_J} Q_{ij} - \alpha = A_i + Q_{ii} - \alpha, \\ 0 = \sum_{j=1}^{N_J} Q_{ij}^I = A_i^I + Q_{ii}^I, \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} = \sum_{j=1}^{N_J} (Q_{ij} \mathbf{r}_j + \mu_j P_{ij} \mathbf{S}_j) - \alpha \mathbf{r}_i = \mathbf{C}_i + \sum_{Z \in i} \mu_i P_{ii} S_{iZ} \mathbf{t}_{iZ}, \\ \mathbf{0} = \sum_{j=1}^{N_J} (Q_{ij}^I \mathbf{r}_j + \mu_j P_{ij}^I \mathbf{S}_j) - \alpha \mathbf{t}_{iI} = \mathbf{C}_i^I + \sum_{Z \in i} \mu_i P_{ii}^I S_{iZ} \mathbf{t}_{iZ} - \alpha \mathbf{t}_{iI}. \end{array} \right. \quad (13)$$

ここで  $\mathbf{r}_i$  において、互いに独立だが必ずしも直交しない 3 本のベクトル  $\mathbf{t}_{iZ-1}, \mathbf{t}_{iZ}, \mathbf{t}_{iZ+1}$  から構成される  $\widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \equiv (\mathbf{t}_{iZ+1} \times \mathbf{t}_{iZ-1}) / [\mathbf{t}_{iZ-1} \mathbf{t}_{iZ} \mathbf{t}_{iZ+1}]$  が  $\widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \cdot \mathbf{t}_{iI} = \delta_{ZI}$  を満たすことを用いて、 $\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_i^I$  を  $\mathbf{t}_{iZ-1}, \mathbf{t}_{iZ}, \mathbf{t}_{iZ+1}$  の各方向に分解したときの成分  $c_{iZ} = \widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \cdot \mathbf{C}_i, c_{iZ}^I = \widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \cdot \mathbf{C}_i^I$  を求める。これにより、対角項係数を非対角項係数和から決めるための (14) が導かれる [14]。

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{ij} = -A_i + \alpha, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_i P_{ii} S_{iZ} = \widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \cdot (-\mathbf{C}_i) \equiv -c_{iZ}, \\ \mu_i P_{ii}^I S_{iZ} = \widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \cdot (-\mathbf{C}_i^I + \alpha \mathbf{t}_{iI}) \equiv -c_{iZ}^I + \alpha \delta_{ZI}, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (14)$$

(9) において対角項を分離し、(14) を用いれば、

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} (Q_{ij} \phi_j + P_{ij} b_j) - A_i \phi_i - \sum_{Z \in i} c_{iZ} \frac{b_{iZ}}{\mu_i}, \\ 0 = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} (Q_{ij}^I \phi_j + P_{ij}^I b_j) - A_i^I \phi_i - \sum_{Z \in i} c_{iZ}^I \frac{b_{iZ}}{\mu_i}. \end{array} \right. \quad (15)$$

(15) は、特異性の懸念がある対角項係数や意味が曖昧になりがちな  $\alpha$  を含まず、定義が明確な非対角項係数和だけで構成されている。また、第 2 式がある点で、[2] で指摘されている一様ポテンシャル条件の拡張となっている。

#### 4 境界条件の選択

境界要素法により、磁場解析では磁気ポテンシャル  $\phi_J$  と法線磁束密度  $b_{ZJ}$  が、流体解析では流速ポテンシャル  $\varphi$  と法線流速  $v_n$  が各境界で得られるが、方程式を解く際に既知あるいは未知とされる量に応じて、境界条件を次のように分類する。

- $$\begin{cases} (1) & \phi_J \text{ が既知, } b_{ZJ} \text{ が未知,} & (\text{Dirichlet 条件}) \\ (2) & b_{ZJ} \text{ が既知, } \phi_J \text{ が未知,} & (\text{Neumann 条件}) \\ (3) & \phi_1 = \phi_0 = \phi, b_{Z1} = -b_{Z0} = b_Z. & (\text{界面条件}) \end{cases}$$

Fig. 1(a) のような一様鉛直磁場中の 2 層系の解析を想定して, 磁場解析では真空領域上方  $T$  と流体領域下方  $B$  で同じ大きさの鉛直一様磁場を逆符号で与え, 側方境界では  $b_{ZJ}=0$  とする (Fig. 2(a)). また流体解析では,  $B$  および側方境界では法線流速  $v_n=0$  とし,  $F$  では, 界面力学方程式 (1) に基づいて,  $\varphi$  に  $-\int_0^t dt S/\rho$  を Dirichlet 条件として与える (Fig. 2(b)).

全ての境界が Neumann 境界になると  $\phi_J$  が不定になる. このため磁場解析では, 境界  $F$  の中央で, ポテンシャルの基準値を与えている.

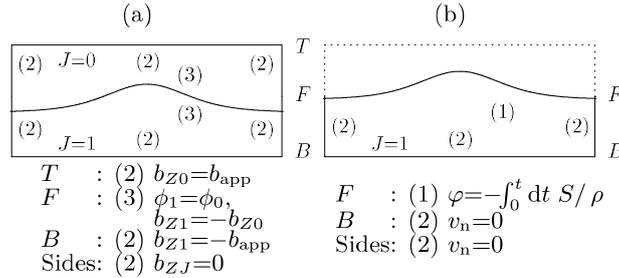


Fig.2: Boundary conditions for (a) magnetic analysis and (b) fluid analysis. (\*) denotes category number of boundary conditions in §4

## 5 磁場解析の検証

Table 1 の条件で Fig. 1(a) の界面  $F$  における界面磁場を求め, 作成した解析コードの検証を行った. 有限振幅の軸対称孤立波形状 (高さ:  $\zeta_{pro}$ , 幅:  $w_{pro}$ ) の界面変形と領域間の透磁率差がある場合 (Case C) に先立って, 界面が平面で領域間の透磁率差がない場合 (Case A) と, 有限振幅の界面変形があっても透磁率差がない場合 (Case B) を調べた. Case A,B では, 流体下面  $B$  と真空上面  $T$  に一様な磁束密度  $\mathbf{b}_0$  (強さ:  $b_{app}$ ) を印加すると, 界面にも同じ磁束密度が現れるはずである.

Table1: (a) Physical parameter values used for calculation in Fig. 3-6 (after [11]). (b) Numerical parameter values used for calculation in Fig. 3-6. (c) Definition of quantities.

(a)	$g$	$9.81 \text{ m s}^{-2}$
	$\rho$	$1.17 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
	$\sigma$	$3.09 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$ (表面張力係数)
	$M_S$	$2.32 \times 10^1 \text{ kAm}^{-1}$
	$\chi_0$	3.57
	$w_{pro}$	$1.03 \times 10^{-2} \text{ m}$ (臨界波長)
	$\zeta_{pro}$	$1.00 \times 10^{-3} \text{ m}$
	$b_{app}$	$2.40 \times 10^1 \text{ mT}$ (一様)
	$T_{per}$	$1.89 \times 10^{-1} \text{ s}$ (振動周期)
	(b)	$L_X$
$L_Y$		$1.80 \times 10^{-2} \text{ m}$ (各領域 10 分割)
$L_Z$		$2.00 \times 10^{-3} \text{ m}$ (各領域 2 分割)
$\Delta t$		$1.00 \times 10^{-3} \text{ s}$
(c)	$\zeta$	界面変位
	$S$	界面応力和
	$T_N$	磁気応力差
	$G$	重力ポテンシャル
	$C$	表面張力
	$\varphi$	流速ポテンシャル
	$\mathbf{b}$	界面磁束密度
	$\mathbf{v}$	界面流速
$b_n$	法線磁束密度	
$h_t$	接線磁場	
$\mathbf{v}_t$	接線流速	
$b_{app}$	印加磁束密度強度	

Case A では, 求めた界面磁束密度  $\mathbf{b} = \mu_J \nabla \phi_J \times \mathbf{t}_{ZJ} + b_{ZJ} \mathbf{t}_{ZJ}$  の分布は, 界面の縁に至るまで一様 (定ベクトル場) になる. 界面中心付近での  $\mathbf{b}_0$  との最大相対誤差は  $\delta \equiv \|\mathbf{b} - \mathbf{b}_0\| / \|\mathbf{b}\| = 4.00 \times 10^{-13}$  であった. Case B の結果を Fig. 3 に示す. 幾何学的条件が変わり  $\mathbf{b}_0$  との最大相対誤差は上昇するが,  $\delta = 6.19 \times 10^{-4}$  であった.

Case C では, 幾何学的条件だけで決まる定ベクトル場条件 (定ベクトル場が基礎式を満たすための条件) と離散化した基礎式の連立 1 次方程式系の誤差は Case B と変わらないが, 透

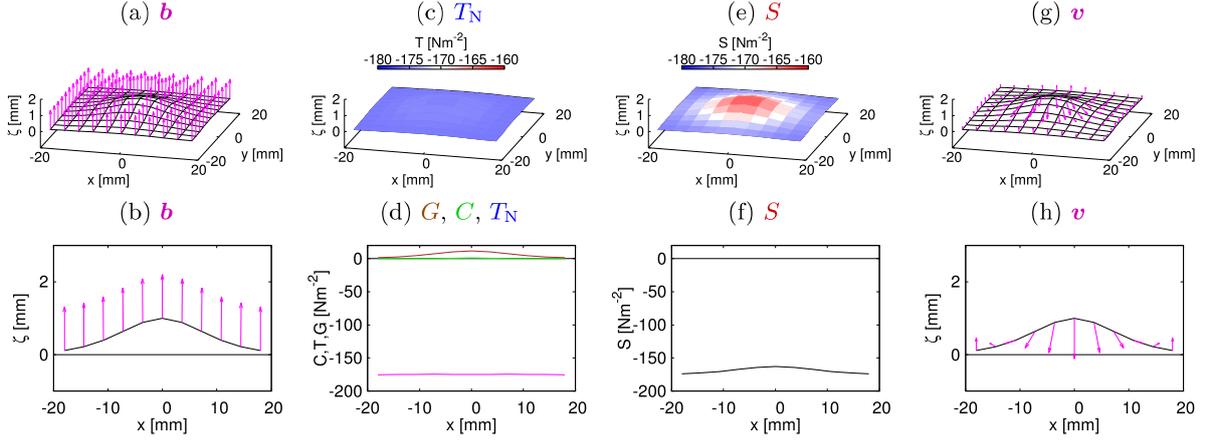


Fig.3: Calculated distribution of quantities on the interface (upper row) or within the cross section at  $y=0$  (lower row) in Case B (with interface elevation and without permeability difference).

磁率差は界面条件を通じて影響を与えるため、 $b$  は  $b_0$  から変化する。ただし、現条件でその変化はわずかである。

Case A,B,C いずれの場合も、離散化係数が定ベクトル場条件を、求めた  $\phi'_J, b'_{zJ}$  が基礎式・界面条件・対称性を十分に満たしていることを確認した。

$b$  は磁気応力差  $T_N$  に用いられ、他の応力  $G, C$  と合わせて界面応力  $S$  となる。界面力学方程式に基づく流体解析からは、 $S$  の非一様性が誘起する界面流速  $v$  が求められる。

## 6 時間発展解析

流体解析の境界要素法では、界面において、4節で述べたように Dirichlet 条件を課す。すなわち、流速ポテンシャル  $\varphi$  を与えて法線流速  $v_n$  を求める。これらから得られる界面流速  $\mathbf{v} = \nabla\varphi \times \mathbf{t}_Z + v_n \mathbf{t}_Z$  を時間積分すれば、時間ステップごとの界面形状 (界面上の点の座標)  $\mathbf{r}$  が決まる。一方  $\varphi$  は、界面力学方程式 (1) に基づけば、 $-S(\mathbf{r})/\rho$  を時間積分して求められるが、界面応力  $S$  自体が  $\mathbf{r}$  から決まる。このような  $\varphi$  と  $\mathbf{r}$  の時間積分は同時並行的に進める必要があり、これは次の連立時間発展方程式の形に表すことができる。

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -S(\mathbf{r})/\rho \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

ここでは、2次または4次のルンゲ・クッタ法を用いて、(16)の時間積分を行った。なお、時間ステップ幅  $\Delta t$  は充分小さくとり、数値的な安定性条件を確保している。

Fig. 4 は、 $b_{app}$  を変えながら、界面中央における  $\zeta$  および  $S$  の時間変化を示している。ここで、右軸と細い  $y=0$  横直線は  $\zeta$ 、左軸と太い  $y=0$  横直線は  $S$  のものである。

$b_{app}$  の増加と共に、 $S$  の振動の中心は正から負へと移る。これは、界面力学方程式  $\partial\varphi/\partial t = -S/\rho$ ,  $S \equiv T_N + G + C$  において、 $b_{app}$  の増加と共に、 $\mu_1 > \mu_0$  で負の  $T_N$  (線形磁場の場合  $T_N \simeq (1/\mu_1 - 1/\mu_0) \{ \mu_1 \mu_0 (h_x^2 + h_y^2) + b_z^2 \} / 2$ ) が  $G$  や  $C$  を凌駕するようになるためである。Fig. 5 は、流速ポテンシャル  $\varphi$  の時間変化を Fig. 4 と同様に示したものである。磁場がなければ、 $S > 0$  に応じて  $\varphi$  は振動しながら減少し、 $\varphi \simeq \{ \cosh k(z+d) / k \sinh kd \} (\partial\zeta/\partial t)$ ,  $G = \rho g \zeta$  ( $k$ : 波数,  $d$ : 水深) により、 $\zeta$  の安定な振動が示される。しかし、 $b_{app}$  の増加と共に  $\varphi$  は振動増加または単調増加へと転じる。

$b_{app} = 12.0, 16.0$  [mT] の場合、途中での計算の破綻が見られる。このような界面変動の不安定化は  $b_{app}$  が大きいほど早まるが、その直前では、負の  $S$  が急激に変化している。

Fig. 6 に、 $b_{app} = 12.0$  [mT] について、破綻 (710 [ms] 付近) 直前の  $\zeta, \mathbf{v}, \varphi, S, T_N, \mathbf{b}, b_n$  の (V) 界面分布を示す。なお図中の矢印は、 $\mathbf{b}$  以外、 $\mathbf{v}$  を表す。下に凸に変わった界面中央付近では、 $b_n$  が  $b_{app} = 12.0$  [mT] から局所的に強まる。これにより、 $S$  は (負の方向へ) 大きくなる ( $h_t$  の  $T_N$  への寄与と  $T_N$  以外の量の  $S$  への寄与は圧倒的に小さい)。界面力学方程式の接

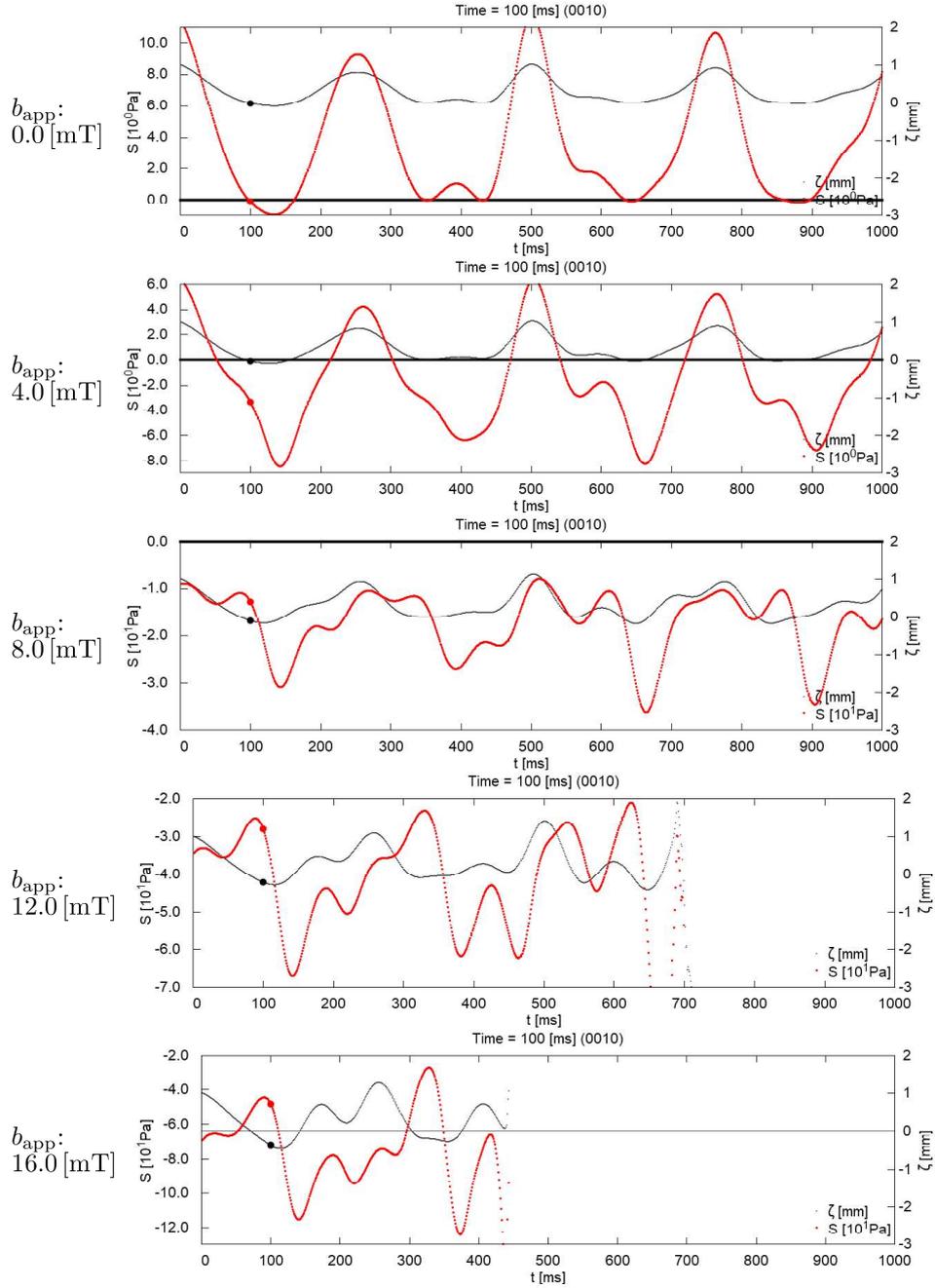


Fig.4: Time dependence of  $\zeta$  and  $S$  at the center of the interface.

線方向偏微分  $\rho \partial \mathbf{v}_t / \partial t|_{Z=\zeta} = -\nabla_t S$  ( $\mathbf{v}_t = \nabla_t \varphi$ : 接線流速) より,  $S$  の接線勾配が接線流速の起動力になる. ただし,  $\mathbf{v}_t$  がただちに生じるわけではなく, 起動力の蓄積で生じる  $\mathbf{v}_t$  が閉じた領域内で還流した後, 少し遅れて界面中央が急上昇し, これが界面の不安定化をもたらす.

## 7 まとめ

直接境界要素法に基づいて, 実時間実空間で磁性流体界面現象の安定性解析・時間発展解析を行う解析システムを構築した. 直接法では, 静磁場の磁気ポテンシャル  $\phi_J$ ・法線磁束密度  $b_{ZJ}$  または非圧縮・非回転・非粘性流体の法線流速  $\varphi$ ・流速ポテンシャル  $v_n$  の未知量が, 連立1次方程式の解として同時に求められる.

界面では, 磁場解析では  $\phi_J, b_{ZJ}$  の連続条件を課し, 流体解析では界面応力 and の時間積分で

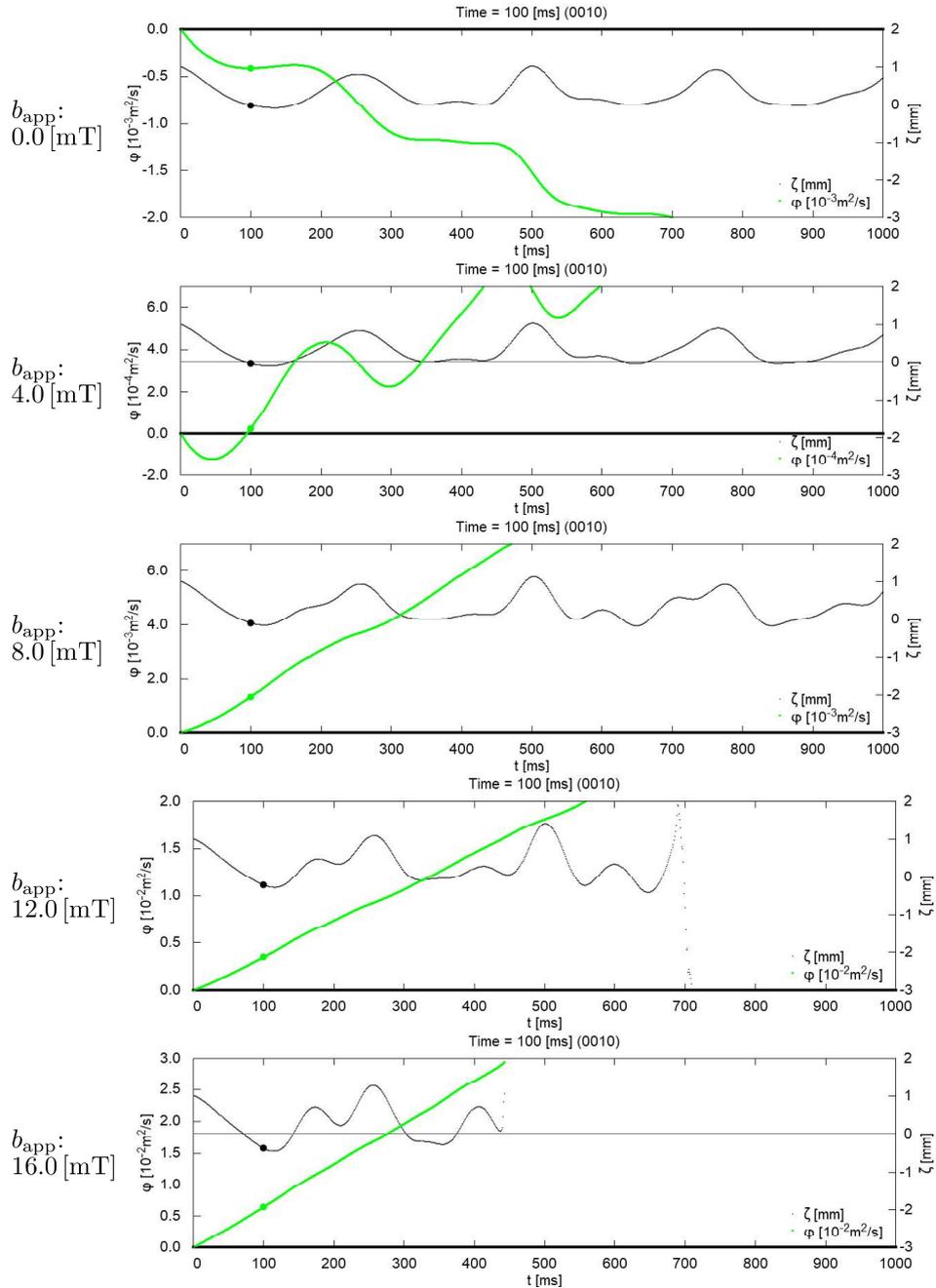


Fig.5: Time dependence of  $\zeta$  and  $\varphi$  at the center of the interface.

求めた  $\varphi$  を Dirichlet 条件として与え，得られた流体速度から界面形状変化を決める．なお，磁気応力差，非一様透磁率において非線形磁化を考慮した．

解析精度を向上させるため，尖った境界上の点に複数ある法線方向による物理量の多価性を考慮した．また，基礎式を離散化する際対角項の離散化係数が持つ特異性は，「定ベクトル場条件」から導いた「離散化係数の総和則」により回避した．領域間の透磁率差がない条件で行った数値解析では，流体領域下方と真空領域上方で与えた一様な磁束密度が，界面でその縁に至るまで再現された．

時間発展解析により，界面量の時間変化を見ながら，印加磁場強度と共に早まる界面変動の不安定化を解析した．界面応力和  $S$  について，界面磁束密度  $b$  から得られる界面分布と，それから引き起こされる界面流速  $v$  を調べた．

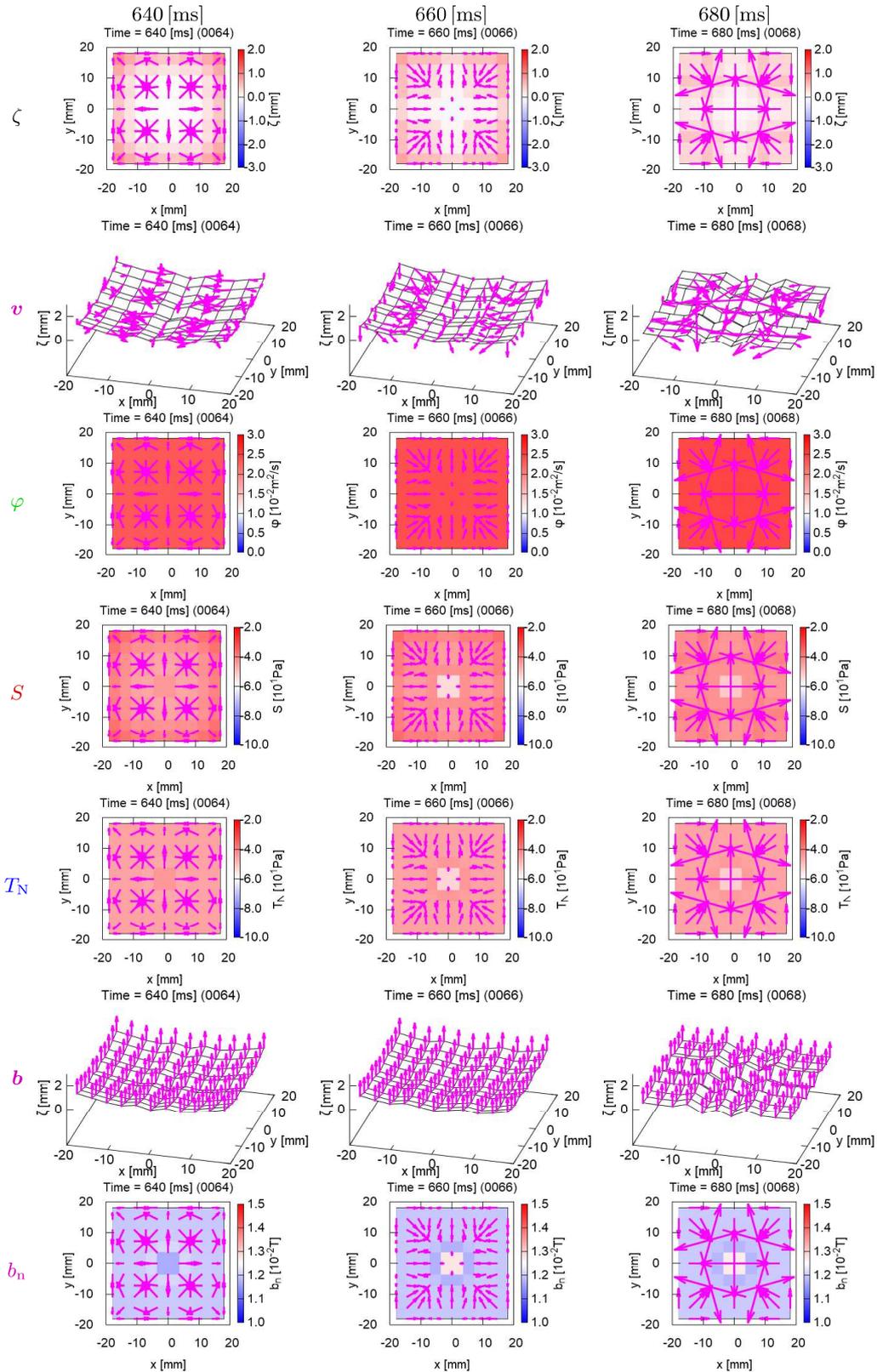


Fig.6: Distribution of  $\zeta$ ,  $v$ ,  $\varphi$ ,  $S$ ,  $T_N$ ,  $b$  and  $b_n$  on the interface for  $b_{app}=12.0$  [mT].

今後本解析を，Rosenzweig 不安定性近傍の安定性解析 [11, 10] など，従来の研究と比較しながら，更に進めていく。

## 参考文献

- [1] Rosensweig,R.E., *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985), Chap.4, Chap.5.
- [2] Brebbia,C.A., F,J.C. Telles and C,L. Wrobel, *Boundary Element Techniques Theory and Applications in Engineering*, Springer, (1984).
- [3] Mizuta,Y., *Magnetohydrodynamics*, **44-2** (2008), pp.155–165.
- [4] Mizuta,Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **323-10** (2011), pp.1354–1359.
- [5] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用」, **1847** (2013), pp.96–106.
- [6] Mizuta,Y., *Magnetohydrodynamics*, **49-2-4** (2013), pp.191–195.
- [7] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1890** (2014), pp.113–123.
- [8] Mizuta,Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **431** (2017), pp.209–213.
- [9] 水田 洋, 磁性流体連合講演会講演論文集, **26** (2013), pp.50–52.
- [10] Gollwitzer,C., Rehberg,I. and Richter,R., *New Journal of Physics*, **12-9** (2010), p.093037.
- [11] Lloyd,D.J.B., Gollwitzer,C., Rehberg,I. and Richter,R., *J. Fluid Mech.*, **783** (2015), pp.283–305.
- [12] Mizuta,Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **514** (2020), p.167118.
- [13] Brebbia,C.A. and Butterfield,R., *Applied Mathematical Modelling*, **2-2** (1978), pp.132–134.
- [14] Mizuta,Y., *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **167** (2024), p.105889.
- [15] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」, **2153** (2020), pp.81–95.
- [16] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2020 講演論文集 (2020) (CD-ROM).
- [17] 水田 洋, 磁性流体連合講演会講演論文集, **37** (2024), pp.20–23.