sine-Gordon キンクのトラジェクトリー

元富山大・工　角畠　浩

1　はじめに

ソリトンは遠方にあっては互いに独立する波に見えるが近づくと非線形な相互作用をし，その後独立した波として分離してゆく。このときソリトンの軌道（トラジェクトリー）が変化するがその様子はあまり報告されていない。本稿では sine-Gordon 方程式 [1] を考察して，この方程式のソリトン（kink）解の厳密なトラジェクトリーとそこから見た相互作用の様子を報告する。

sine-Gordon 方程式はソリトン方程式の１つあり，様々な物理系に現れ，そのソリトン解はキンクと呼ばれる階段型の関数である。キンクの運動を追跡して，sine-Gordon キンクでソリトン相互作用の様子を調べる。

ソリトンが階段状のキンクであるために，ソリトンの「位置」が判然としない。そこで空間変数に関する導関数のピークをソリトンの位置として考える。

2　sine-Gordon 方程式のソリトン解

sine-Gordon 方程式は

$$\partial_\tau^2\varphi - \partial_\sigma^2\varphi + \sin\varphi = 0, \tag{1}$$

で与えられる。ここで τ を時間変数，σ を空間変数とする。双線形変換 [2]

$$\varphi = 2i\ln\frac{f^*}{f}, \tag{2}$$

により双線形方程式

$$\begin{aligned}(D_\tau^2 - D_\sigma^2)f^*\cdot f^* + \frac{1}{2}(f^{*2} - f^2) = 0,\\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2)f\cdot f + \frac{1}{2}(f^2 - f^{*2}) = 0,\end{aligned} \tag{3}$$

を得る。ここで D_τ と D_σ は双線形演算子である。１ソリトン解は

$$f = 1 + ie^\eta,\ f^* = 1 - ie^\eta,$$

であり，ここで位相と分散関係は，それぞれ，

$$\eta = k\sigma + \omega\tau + \delta,\ \omega^2 - k^2 = -1,$$

である。双線形変換 (2) により，φ は

$$\varphi = 4\tan^{-1} e^{\eta},$$

で与えられる。ここで位相速度を $v = -\omega/k$ とすれば，$k = \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ となる。このとき，位相 η はキンクでは

$$\eta = \gamma(\sigma + v\tau) + \delta,$$

η は反キンクでは

$$\eta = -\gamma(\sigma + v\tau) + \delta,$$

である。以下，本稿では反キンクについては触れない。

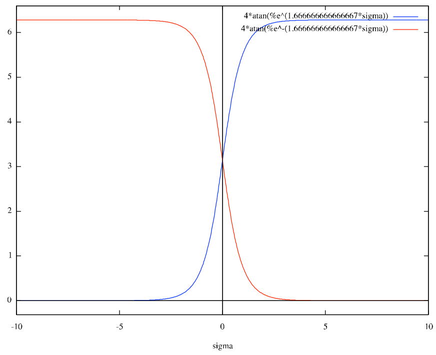

図 1　左が反キンク，右がキンク，$v = 0.5$

2 ソリトンに対する双線形方程式 (3) の解は

$$f = 1 + ie^{\eta_1} + ie^{\eta_2} + Ae^{\eta_1+\eta_2},$$
$$f^* = 1 - ie^{\eta_1} - ie^{\eta_2} + Ae^{\eta_1+\eta_2},$$

で与えられる。ここで，位相，分散関係および係数 A は，それぞれ

$$\begin{aligned}
&\eta_n = k_n\sigma + \omega_n + \delta_n,\\
&\omega_n^2 - k_n^2 = -1, (n = 1, 2),\\
&A = -\left(\frac{\omega_1 - k_1 - \omega_2 + k_2}{\omega_1 - k_1 + \omega_2 - k_2}\right)^2,
\end{aligned}$$

である。 双線形方程式 (3) の解は，双線形変換 (2) を用いて

$$f = \sqrt{-A}\sinh\frac{\eta_1+\eta_2}{2} + i\cosh\frac{\eta_1-\eta_2}{2},$$
$$f^* = \sqrt{-A}\sinh\frac{\eta_1+\eta_2}{2} - i\cosh\frac{\eta_1-\eta_2}{2},$$

と書くことができる。ここで，$k_n = \gamma_n, \omega_n = v_n\gamma, (\gamma_n = 1/\sqrt{1-v_n^2})$ として，φ の σ に関する導関数 $\partial_\sigma\varphi$ のピークを求めるため, 同じスピード v $(0 < v < 1)$ でのキンク同士の正面衝突を考える。このとき，波数は $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ となって，位相と係数は

$$\frac{\eta_1+\eta_2}{2} = \gamma\sigma, \quad \frac{\eta_1-\eta_2}{2} = -v\gamma\tau, \quad A = -v^2$$

となるので，双線形変換 (2) により，

$$f = v\sinh\gamma\sigma + i\cosh v\gamma\tau,$$
$$f^* = v\sinh\gamma\sigma - i\cosh v\gamma\tau,$$

を得るので，解は

$$\varphi = 2i\ln\frac{v\sinh\gamma\sigma + i\cosh v\gamma\tau}{v\sinh\gamma\sigma - i\cosh v\gamma\tau},$$

になる。なお，φ は $\tau \to -\tau$ で不変になる。

3 ソリトンのピーク

先にも述べたように キンク解は位置がわかりにくいので，φ の σ に関する偏導関数 $\partial_\sigma\varphi$

$$\partial_\sigma\varphi = \frac{4v\gamma\cosh\gamma\sigma\cosh v\gamma\tau}{v^2\sinh^2\gamma\sigma + \cosh^2 v\gamma\tau}, \tag{4}$$

のピークをソリトンの位置と考える。すなわち，偏導関数 $\partial_\sigma\varphi$ が極値となる σ をソリトンの位置とする。このピークは 2 階の偏微分同関数

$$\partial_\sigma^2\varphi = \frac{i}{(f^*f)^2}\left(f^2D_\sigma^2 f^*\cdot f^* - f^{*2}D_\sigma^2 f\cdot f\right) = 0,$$

から求めることができ，その方程式は

$$\begin{aligned} &f^2D_\sigma^2 f^*\cdot f^* - f^{*2}D_\sigma^2 f\cdot f \\ &\qquad = 4iv\gamma^2\sinh\gamma\sigma\cosh v\gamma\tau(v^2\sinh^2\gamma\sigma - \cosh^2 v\gamma\tau + 2v^2) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

である。この解は

$$\sinh\gamma\sigma = 0,$$

および

$$\sinh\gamma\sigma = \pm\frac{1}{v}\sqrt{\cosh^2 v\gamma\tau - 2v^2}, \tag{6}$$

である。次にこの解に従ってソリトンの相互作用を見てゆく。

4 ソリトン相互作用

ピークの位置 (7) では v の値によって，トラジェクトリーの挙動が異なる。$v < \frac{1}{\sqrt{2}}$ では $\sigma = 0$ は二つのピークの谷間であり，時間によって変化しない。また，常に 2 つのピーク

$$\sigma = \pm\frac{1}{\gamma}\sinh^{-1}\frac{1}{v}\sqrt{\cosh^2 v\gamma\tau - 2v^2}, \tag{7}$$

が存在する 2 ピーク体制にあり，トラジェクトリーは $\tau = 0$ で最も接近した後，交差せずにそれぞれ引き返す（図 2)。それぞれのソリトンは斥力を受けるかのごとく振る舞う。キンク同士が合体しないのであるから，2 段の階段状の解になっていることが予想される。$\tau = -6$ では 2 つのキンクは 2 段階段状になっいて，下段のものは左に上段のものは右に向かって動いてゆく。その導関数は 2 つの sech 状の波が左右から近づく（図 3)。$\tau = 0$ ではやや崩れているが確かに 2 段階段状になっており，導関数 $\partial_\sigma \varphi$ のピークも重なっていない。$\tau > 0$ では $\tau \to -\tau$ で解は不変であるから，例えば，$\tau > 0$ である $\tau = 6$ に対しては特に図は与えない。

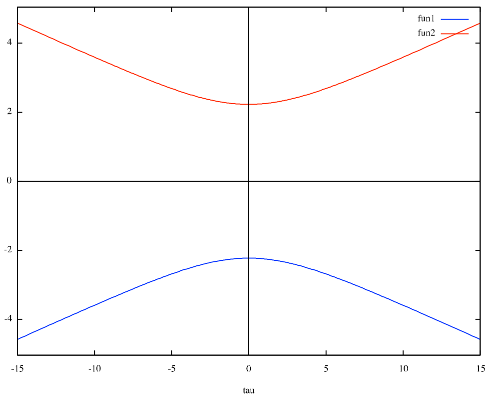

図 2　trajectory $v = 0.2$

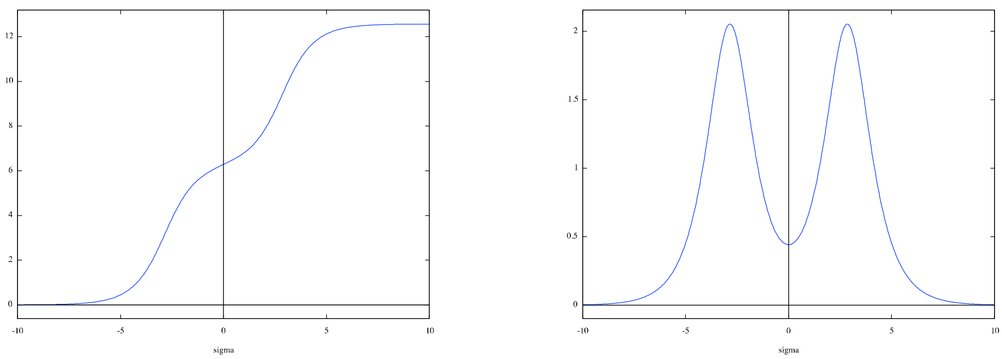

図 3　$v = 0.2,$　$\tau = -6$

$v = 0.5$ では $1/\sqrt{2}$ より小さく，トラジェクトリーはもちろん交差していない（図 5)。$\tau = -6$ では φ は 2 段になっているが，$\tau = 0$ では 2 段になっているかどうかははっきりとはわからないが，$\partial_\sigma \varphi$ では 2 つのピークが重なっていないことがはっきりわかる (図 7)。

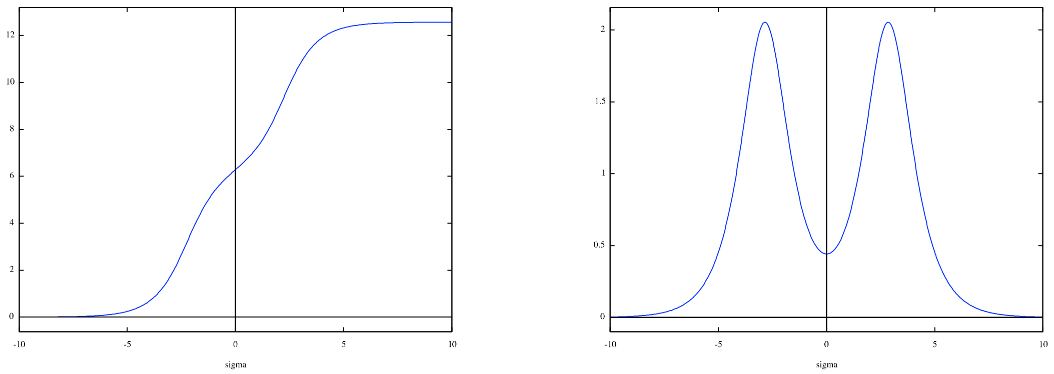

図 4　$v = 0.2,$　$\tau = 0$

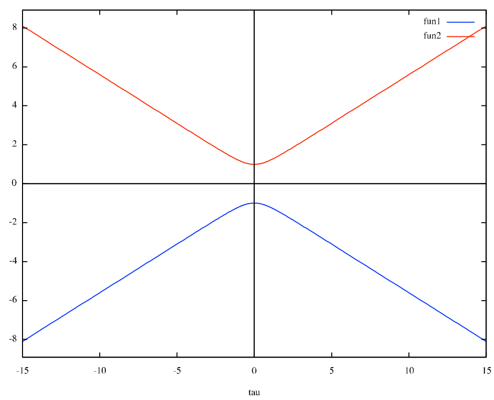

図 5　trajectory $v = 0.5$

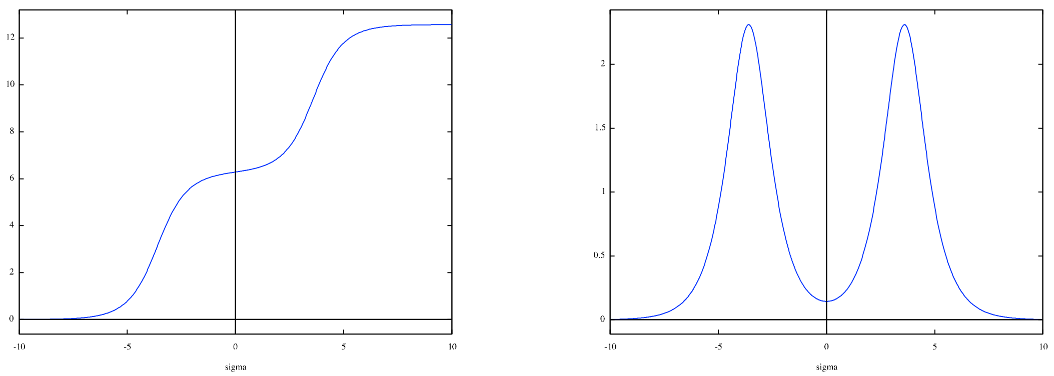

図 6　$v = 0.5,$　$\tau = -6$

$v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ では，$\tau < 0$ で 2 つのピークが互いに近づき，$\tau = 0$ で 2 つのピークと谷間が合体し，1 つのピークになり，$\tau > 0$ で 2 つのピークに分裂し，2 ピーク体制が回復する。すなわち，ピークに対する方程式 (5) の解，(6) と $\sigma = 0$ は $\tau = 0$ で縮退する。なお，1 つになったピークと谷間は鋭く尖ったりはしないで平らになる。

最後に $\frac{1}{\sqrt{2}} < v < 1$ の場合には，2 ピーク体制から $\tau = -\tau_0$ から $\tau = \tau_0$ まで，1 ピーク体制

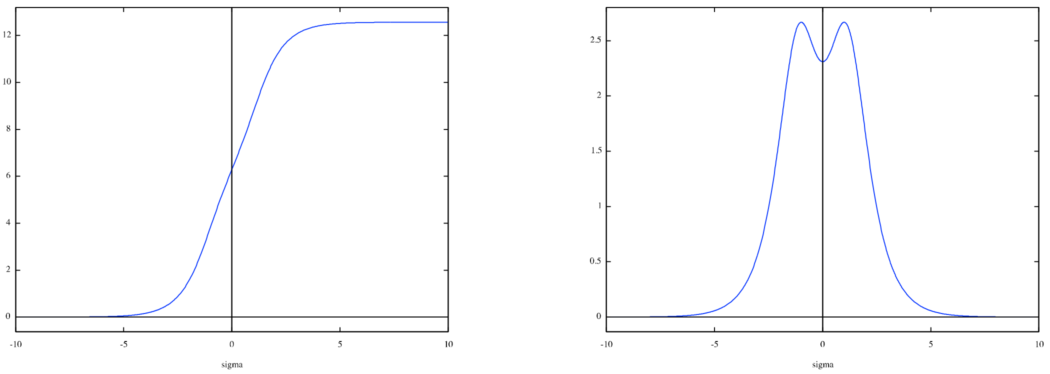

図 7　　$v = 0.5,$　　　$\tau = -6$

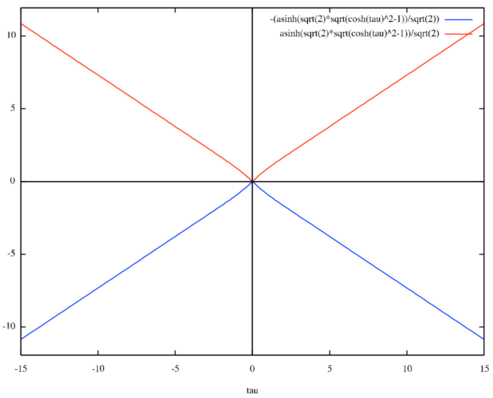

図 8　trajectory $v = 1/\sqrt{2}$

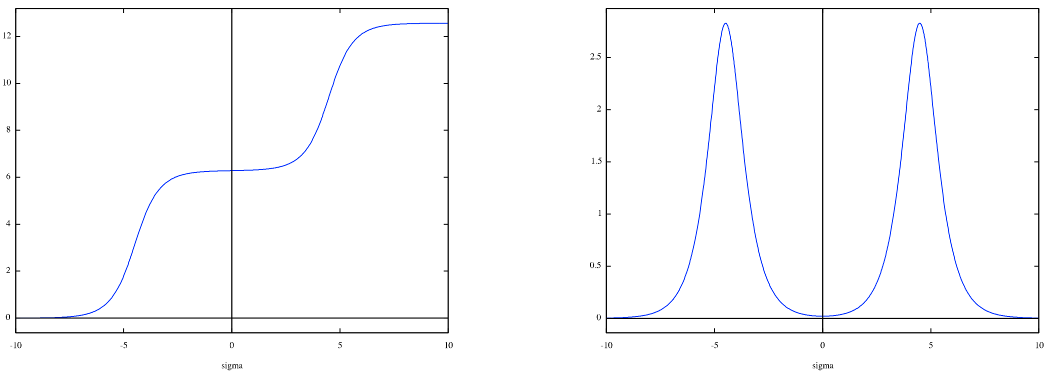

図 9　　$v = 1/\sqrt{2},$　　　$\tau = -6$

に移行する。ここで τ_0 は

$$\tau_0 = \frac{1}{v\gamma}\cosh^{-1}\sqrt{2}v, \quad (\frac{1}{\sqrt{2}} < v < 1)$$

である。この間にはピークの位置は $\sigma = 0$ にとどまって動かない (図 11)。図では “く” の字と “逆く” の字の間の水平の短い線がピークの位置である。$\partial_\sigma \varphi$ のピークの位置は移動しないが，ピークの高さは変化し，$\tau = 0$ で最も高くなる (図 15：１番上が $\tau = 0$ で，２番目が $\tau = -\tau_0$ でピー

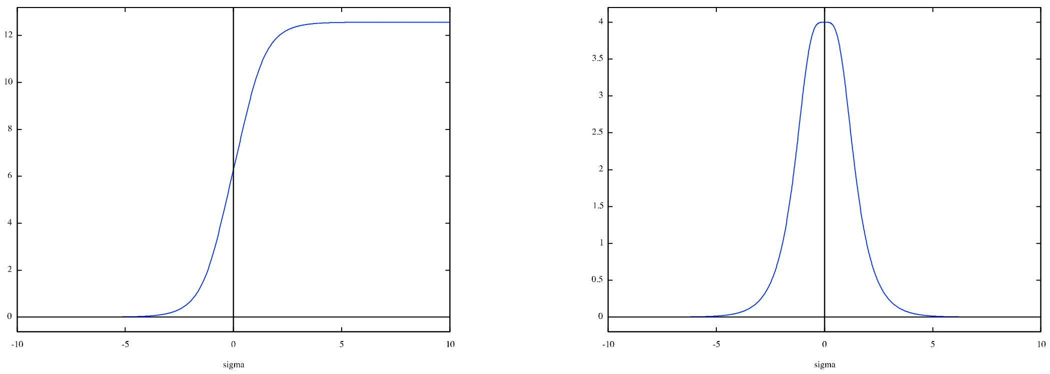

図 10　　$v = 1/\sqrt{2},$　　　$\tau = 0$

クが $\sigma = 0$ になったときの図で，１番下がピークが重なる少し前の図である。)。

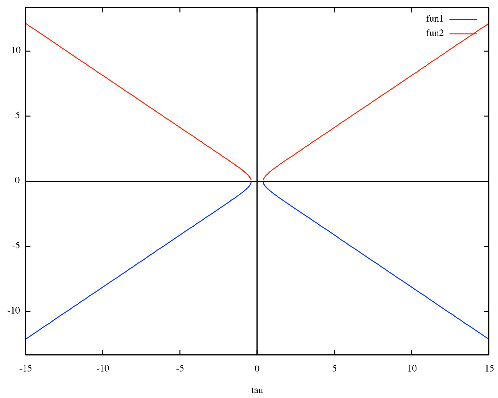

図 11　trajectory $v = 0.8$

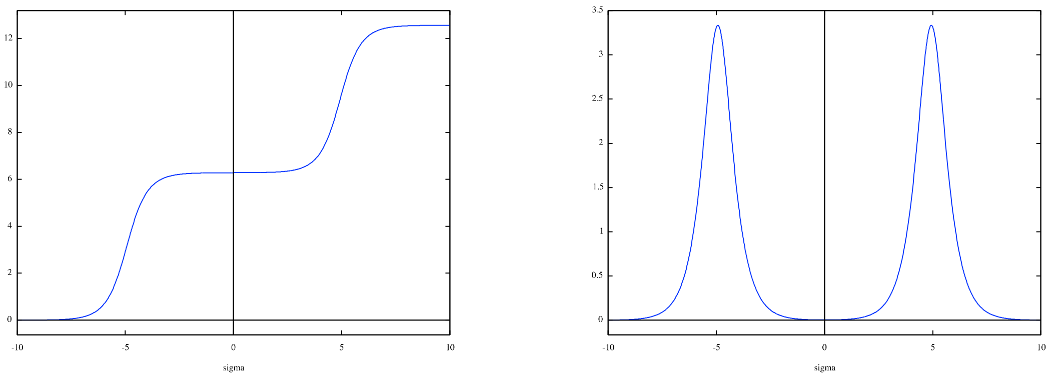

図 12　　$v = 0.8,$　　　$\tau = -6$

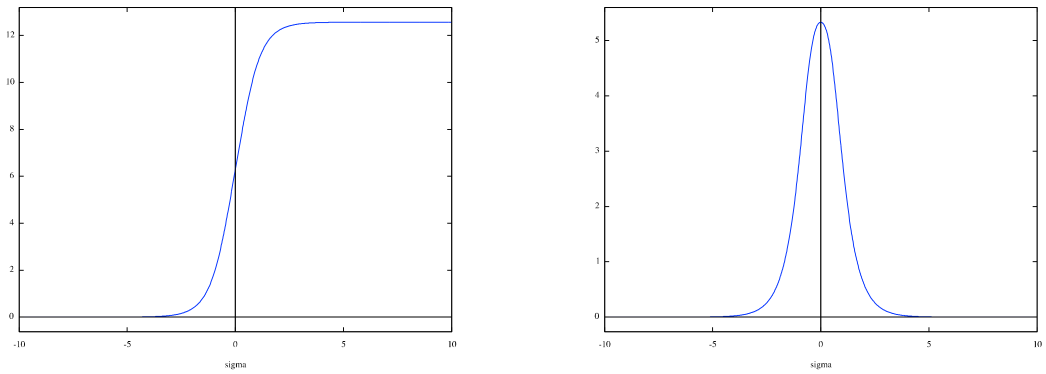

図 13　　$v = 0.8,$　　$\tau = 0$

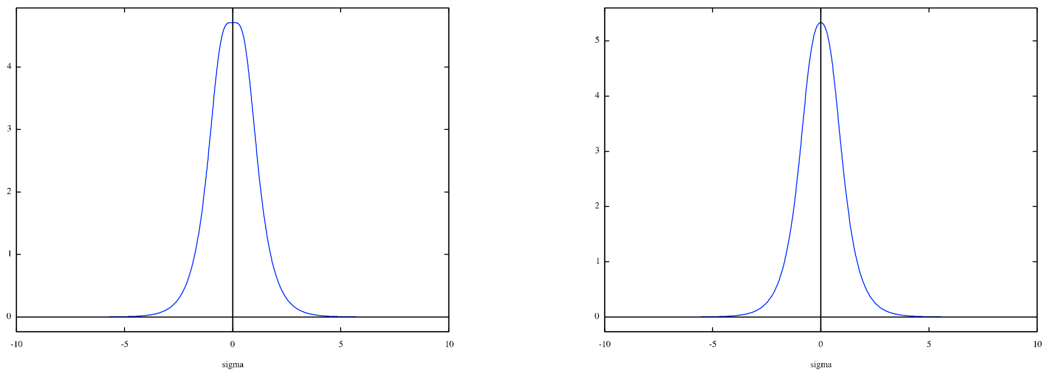

図 14　　$v = 0.8,$　　$\tau = -\tau_0 \simeq -0.38034,$　　$\tau = 0$

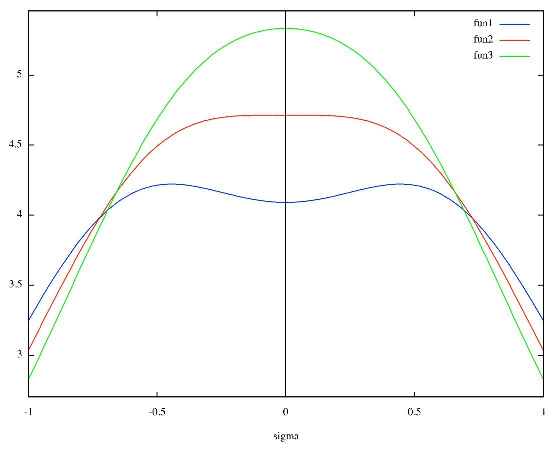

図 15　　$v = 0.8,$　　$\tau = -1.5\tau_0$　　$\tau = -\tau_0 \simeq -0.38034,$　　$\tau = 0$

5　Discussion

sine-Gordon 方程式の 2 キンク解の偏導関数 $\partial_\sigma \varphi$ を求めて，そのピーク $\partial_\sigma \varphi = 0$ をソリトンの位置として，sine-Gordon 方程式のキンクのトラジェクトリーを厳密に求めた。

キンク-キンク相互作用の v によるトラジェクトリーの分類パターンは３つある。$v < 1/\sqrt{2}$ の場合には常に２ピーク体制にあり，２つのピークが重なることはなく，むしろトラジェクトリーは斥力が働く粒子同士が弾いているかのように見える。線形波動では必ず合体が起きるので線形波動とは異なる。$v \geq 1/\sqrt{2}$ の場合に $\tau = 2$ でのみつのピークが重なる。１つになったピークと谷間 は鋭く尖ったりはしないで平らになる。$v > 1/\sqrt{2}$ の場合には２ピーク体制から $\tau = -\tau_0$ で１ピーク体制になり，有限の時間に１ピーク体制に移行する。１ピーク体制ではピークの位置は $\sigma = 0$ にとどまる。ピークの高さは変化するが，ピークの付近はほとんど平らになる。残念ながら１ピークの間のソリトンの相互作用だけでなく，ソリトン相互作用がどのようであるのかを理解するのは難しい。

本稿の方法は原理的に他のソリトン方程式に対しても適用できるものである。厳密なソリトントラジェクトリーを求めることができるソリトン方程式は数少ないと思われるが，この報告を理解の一助としたい。

参考文献

[1] 和達三樹 「非線形波動」 岩波講座　現代の物理学 14 (岩波書店 1992)

[2] 広田良吾 「直説法によるソリトンの数理」 ((岩波書店 1992)