

波動とシアー不安定～波相互作用と過剰反射

京都大学 数理解析研究所 竹広 真一

Shin-ichi Takehiro

Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1 はじめに

平行シアー流の線形不安定性の問題は、層流から乱流への遷移過程のトリガーとして重要であり、Rayleigh の一連の仕事に代表されるように古くは 1900 年代はじめ頃から研究されてきている。

平行シアー流が不安定であるかを調べる数学的手法は首尾一貫しており紛れがない。支配方程式の定常解である平行シアー流に対する線形擾乱方程式を構成し、時間とシアー流に平行な方向に関してフーリエ展開を行う。その方程式系に現れる複素成長率に関する固有値問題を与えられた境界条件の下で解くことで安定性が判定される。しかしながら、このような計算を行うことなく不安定になりそうか否かを予想することは難しい。

一方で、具体的な固有値を得ることなく、平行シアー流の不安定性に関する必要条件を示す定理がいくつか示されている (表 1)。これらの定理に基づくと、シアー流の安定性が、シアー流分布に加えて外力などの内部条件によっても安定性が変わってしまうことがわかる。例えば、非圧縮流体の線形シアー流は中立安定であるが (図 1 a), 単純な湾曲ぐらいでは不安定にならず (図 1 b), シアーと垂直方向のシアー流分布が変曲点を伴うように湾曲しないと不安定にならない。しかも湾曲の向きに安定性が依存している (図 1 c,d)。これに対して、安定成層や浅水系あるいは圧縮性流体では流れが湾曲するまでもなく線形シアー流が不安定となりうる (図 1 e,f)。

表 1 に代表されるシアー流の安定性に関する定理は、支配方程式を領域全体に渡る積分から示されるため、積分定理と呼ばれる。しかしながら、これらの定理の証明も算術的であり、不安定となる仕組みを理解することは容易ではない。例えば、2 次元非圧縮流体の場合、なぜ流れの変曲点が不安定となるために必要なのかは一見わからない。

非圧縮・外力なし	Rayleigh-Kuo の定理 (変曲点定理), Fjørtoft の定理, 半円定理
非圧縮・成層あり	Synge の定理, Miles-Howard の定理, 半円定理
浅水系	Ripa の定理, 半円定理

表 1: 平行シアー流の線形安定性に関する定理の例 (積分定理)。

このような平行シアー流の安定性の問題に対して、本論文では、「シアー流中の波の振舞い」を通じて、シアー流がなぜ不安定となる物理的な仕組みを理解できることを試みる。具体的には、波の過剰反射と波の共鳴という、シアー流中を伝播する擾乱が増幅する 2 つの現象に注目する。それらの増幅機構で重要な概念は「波の運動量」あるいは「波のエネルギー」の保存則である。さらには、これらの概念からいくつかの積分定理が導出されることを示す。

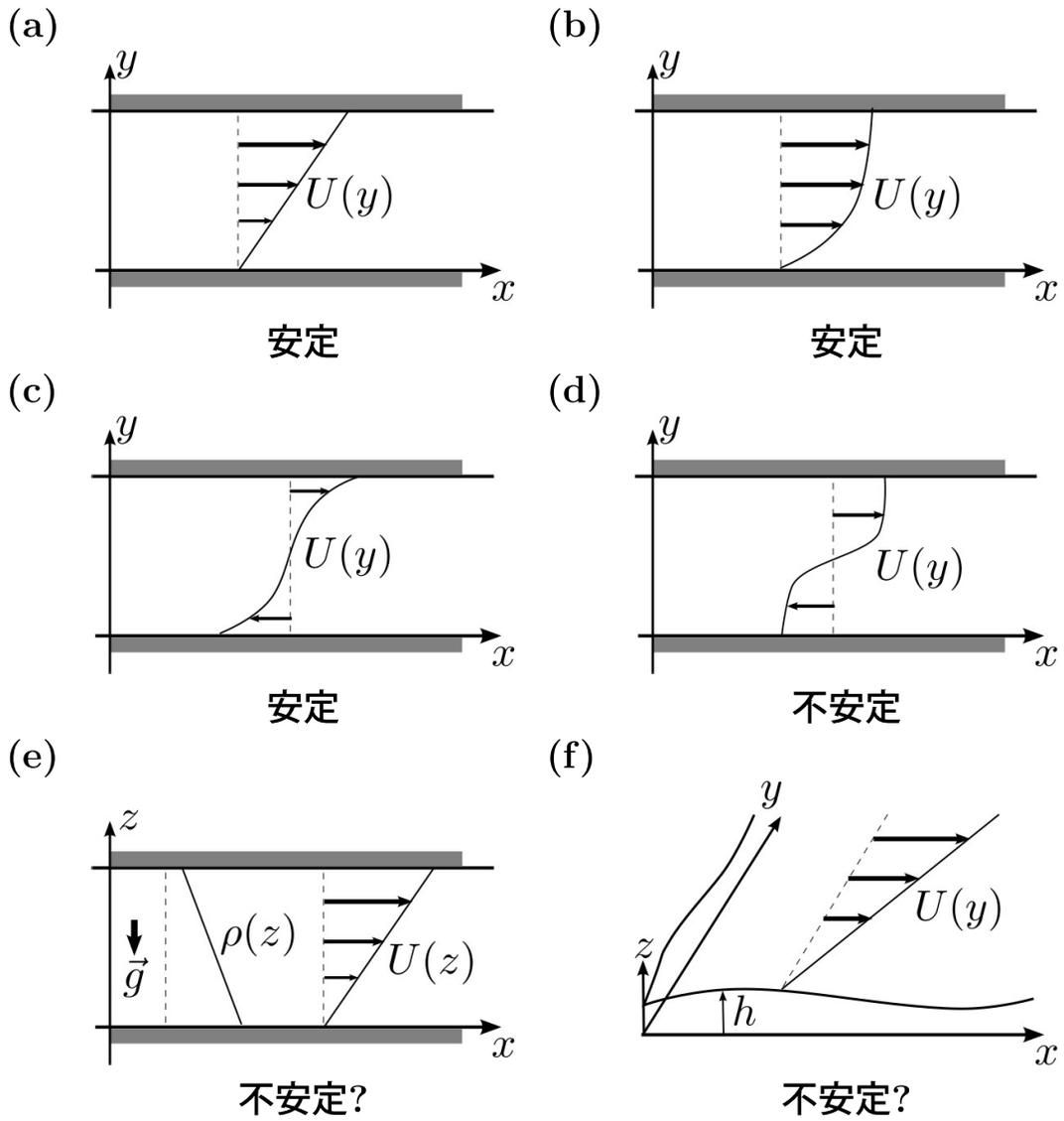


図 1: 様々な状況での平行シア一流の安定性に関する模式図. (a-d) 2次元非圧縮系 (e) 非圧縮安定成層系 (f) 浅水系.

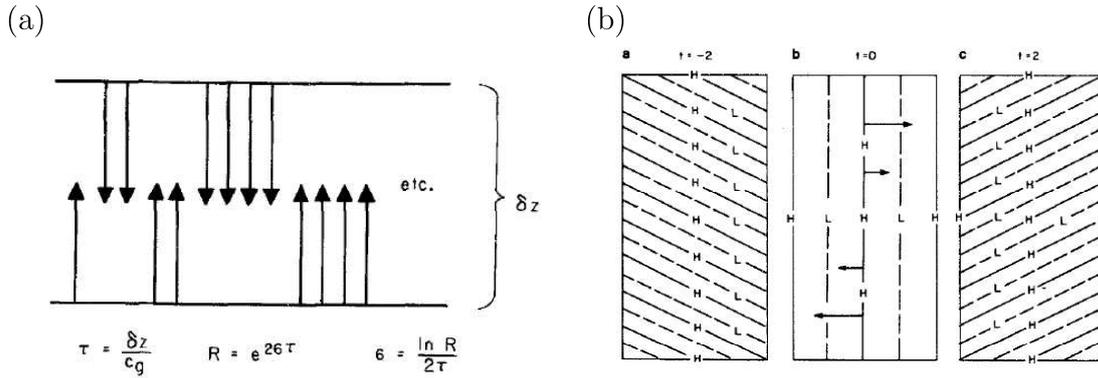


図 2: 過剰反射解によるシア不安定の解釈. (a) Laser formula の概念図 (b) Orr mechanism の概念図 (Lindzen, 1988).

2 波の過剰反射

一般に、ポテンシャル障壁に向かって波が入射するときの反射波と透過波の振舞いを調べる問題は散乱問題と呼ばれる。よく知られている例として、量子力学でのトンネル効果があげられる。通常は入射波に対する反射波の振幅の比である反射率 R が $|R| \leq 1$ となるが、特殊な状況において $|R| > 1$ となることがある。これを過剰反射という。

シア流中の波動の散乱問題において過剰反射が生じることを最初に報告したのは Ribner (1957) と Miles (1957) である。彼らは、速度の異なる 2 層の平行一様背景流において境界面に向かって音波を入射すると、背景流の速度差が超音速の場合に過剰反射が生じることを示した。

その後、Lindzen らの一連の仕事 (e.g. Lindzen, 1988) により、さまざまなシア流中の波動の散乱問題において、過剰反射が生じる状況とシア不安定の発生条件が似ていることを指摘した。例えば、2 次元非圧縮系でのシア流において過剰反射が生じるためには位相速度とシア流の速度が等しくなる臨界点が存在することが必要であり、かつ、背景流が変曲点を持つ必要があった。このことは、不安定のための必要要件である Rayleigh の定理の言うところと一致していた (Lindzen and Tung, 1978)。成層シア流中の波動が過剰反射となるには、リチャードソン数が $1/4$ 以下の領域が存在することが必要であり、このことは Miles-Howard の定理 (Miles, 1961; Howard, 1961) の主張と一致していた (Lindzen, 1988)。

さらに、Lindzen らは過剰反射解を用いて不安定モードを具体的に関係づけることを試みた。構成するためのアイデアはレーザーの増幅メカニズムのアナロジー (Laser formula) と量子化条件 (Quantization) である。入射波の後方に反射壁を置き、過剰反射波が壁で再度臨界点に入射していき、さらに増幅した反射波が帰ってくる過程を想定すると、その時の増幅率は $kc_i = \frac{\log |R|}{2\tau}$ と見積もられる (Laser formula, 図 2a)。ここで τ は臨界点と壁の間の波の伝播時間である。しかしながら、すべての過剰反射解がこのような増幅をしていくわけではなく、入射波の位相が一致する特定のものだけが選ばれて不安定モードにつながると考えた (Quantization)。

このような過剰反射解による解釈を通じて、線形シア流中の渦の時間変化を示した Orr の解 (Orr, 1907) に波動の基本的増幅メカニズムが由来すると彼らは主張した (Lindzen, 1988)。反射波が増幅するには波面がシアと逆向きのとき増幅フェーズに固定されることが重要であり (図 2b の Phase a)、これを Orr mechanism と彼らは名付けた。

Lindzen らはさまざまな系でのシアー不安定問題に対して過剰反射解による解釈を試みた。過剰反射解を用いて計算された分散関係と成長率は、定性的には不安定モードを説明できてはいたが、きれいにまとめられなかったようである。そもそも Laser formula と Quantization は数学的にきっちりと導出されたものではなく、気分を語った概念モデルとの位置づけでしかなかった。しかも Orr mechanism はロスビー波や内部重力波などの渦度波にのみ適用可能であり、浅水波や音波といった発散波には当てはまらなかった (Takehiro and Hayashi, 1992) ため、統一的な理解には結びつかなかった。そのためか、総合報告の Lindzen (1988) 以後、このような研究は衰退したようにみえる。

2.1 過剰反射と保存則

渦度波と発散波に関わらず、シアー流中の過剰反射現象は擾乱の振幅の 2 次の量の保存則を通じて理解することができる。

一般的に擾乱の振幅の 2 次の保存則は次のように表される。

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial F_m}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

ここで m は擾乱の振幅の 2 次の保存量, F_m はそのフラックスである。さらに, 境界においてフラックスが 0, すなわち $F_m = 0$ である条件の下で y について全領域積分すれば,

$$\frac{dM}{dt} = 0, \quad M = \int m dy, \quad \text{for } F_m = 0 \text{ at boundaries.} \quad (2)$$

が導かれる。よく用いられる保存量は x 方向の運動量やエネルギーである。

よくある状況は, 臨界点 ($y = y_c, U(y_c) - c = 0$) を挟んで m が逆符号となる場合である。すなわち,

$$m \sim (U - c)|\phi|^2. \quad (3)$$

このとき, 保存量から過剰反射が生じることを理解することができる。ここで ϕ は擾乱量であり, $\phi \sim \hat{\phi}(y)e^{ik(x-ct)}$ と表される。また, Hayes の定理 (Hayes, 1977) より, 2 次の保存量のフラックスは

$$F_m \sim m \cdot C_{gy}, \quad (4)$$

と書くことができる。ここで C_{gy} はシアーを横切る方向の波の群速度である。

定常散乱解について, 保存則による過剰反射の説明を図 3 (a) に示す。Hayes の定理 (4) より, 透過波のフラックスは $F_T \sim mC_{gy} < 0$ である。一方, 入射波及び反射波のフラックスはそれぞれ $F_I > 0, F_R < 0$ となる。定常の場合, (1) より保存量フラックス F_m が一定でなければならないので,

$$F_I + F_R = F_T \Rightarrow |F_R| > |F_I|, \quad (5)$$

すなわち, 過剰反射が生じることがわかる。

図 3 (b) は波束の場合の過剰反射の説明である。(2) より, 反射透過前後で全運動量が保存しなければならない。すなわち,

$$M_I = M_R + M_T, \quad (6)$$

ここで, M_I , M_R , M_T はそれぞれ入射波, 反射波, 透過波波束の保存量である. (3) より M_R と M_T が逆符号であるから $|M_R| > |M_I|$ が導かれ, 過剰反射が生じることがわかる.

図 3 が過剰反射の基本的な発生メカニズムの模式図である. しかしながら, 臨界点が擾乱の支配方程式の特異点となるために, 波束擾乱の振舞いが特異的になり, 必ずしも上記の基本的なメカニズムで説明が難しくなることがある. 例えば, シア一流中の内部重力波の例に見られるように臨界点が波伝播領域にむき出しになっていると, 臨界点に近づくにつれて群速度が 0 となり, 透過できない状況となる (波の吸収, Bretherton, 1966; Booker and Bretherton, 1967). このような場合には反射率が 0 となり過剰反射が生じない. あるいは後で見るように, 臨界点を透過できる場合であっても, 臨界点においてフラックスの「飛び」が生じて保存則による解釈が複雑になることがある.

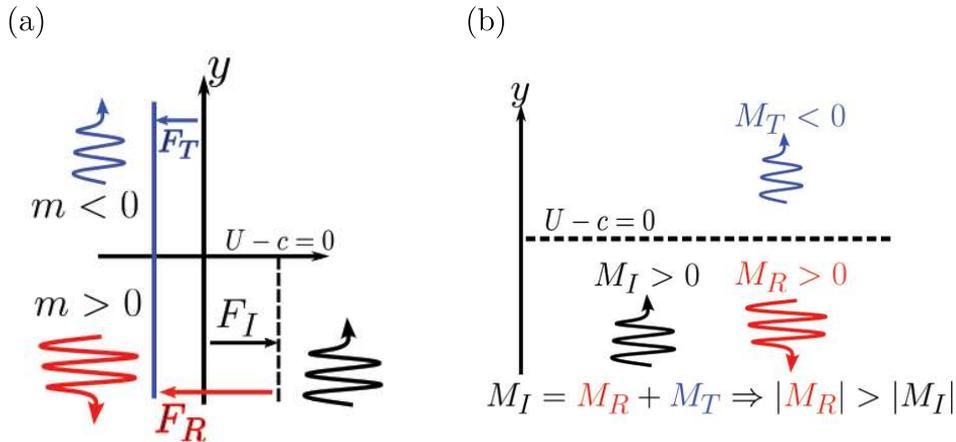


図 3: 2 次の保存量の保存則による過剰反射の説明. (a) 定常過剰反射解 (b) 波束の過剰反射

2.2 例 1: 非回転線形シア一流中の浅水波

過剰反射とシア不安定の最も基本的なメカニズムを把握しやすい例として非回転浅水系での線形シア一流を取り上げる. この問題に最初に取り組んだのは Satomura (1981) であり, 不安定モードを数値計算で求めた. 結果の解釈を分散曲線の交点で説明しており, 保存量には触れていないが後で述べる波動の相互作用の考え方をを用いている. Narayan et al. (1987) は, 擾乱方程式が浅水系と同じになる音波の過剰反射解を解析に求めて, 固有モードとの対応を波の作用と Laser Formula で解釈している. Takehiro and Hayashi (1992) は定常過剰反射解と時間発展を数値的に求め, 擾乱運動量による解釈を行った. Knessl and Keller (1995) は Takehiro and Hayashi (1992) の定常解を解析的に求めた.

この系での, 基本場 x 方向速度 $U(y)$ と一定水深 H_0 に対する線形擾乱の支配方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} = -g \frac{\partial h'}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} = -g \frac{\partial h'}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x} + H_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0. \quad (9)$$

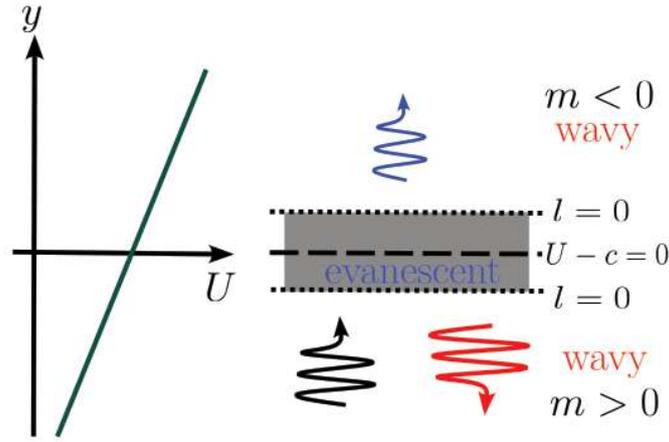


図 4: 非回転浅水系での線形シア一流での波伝播状況 (Takehiro and Hayashi, 1992).

ここで u', v', h' はそれぞれ速度擾乱の x, y 成分と表面変位, g は重力加速度である. 線形シア一流 $U(y) = y$ の場合, 擾乱運動量保存則は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) (\overline{h'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (H \overline{u'v'}) = 0. \quad (10)$$

となる (Takehiro and Hayashi, 1992). ここで $\overline{(\)}$ は位相平均 (x 平均) を表している. WKB 近似の下では $m = \overline{h'u'} \sim \frac{g}{c-U} \overline{h^2}$ と表される. さらに, WKB 近似の下での局所分散関係は

$$\hat{\omega}^2 = gH_0[k^2 + l(y)^2], \quad \hat{\omega} = \omega - U(y)k \quad (11)$$

となる. ここで ω, k, l はそれぞれ局所振動数, x, y 方向の局所波数である. この分散関係に基づいた臨界点の周りの波伝播状況 (wave geometry) は図 4 のようになる. 臨界点 ($U - c = 0$) の周りに evanescent な領域 ($l^2 < 0$) が存在しており, 波が臨界点に吸収されることなく evanescent 領域を超えることができると予想される. すなわち, 臨界点を挟んで異なる擾乱運動量の波動が伝播可能である.

図 5 は線形シア一流中の波束の時間発展の数値計算を示している (Takehiro and Hayashi, 1992). 臨界点周りの evanescent 領域を透過し, 過剰反射が生じている様子が見られる. 反射波の振幅が大きくなることは, まさに図 3 (b) での保存量 (擾乱運動量) の保存則から説明される.

図 6 は線形シア一流における定常散乱解の構造を示している (Takehiro and Hayashi, 1992). 反射波の振幅が入射波のそれを上回っており, 過剰反射が生じていることがわかる. この解は臨界点において特異でないので, 過剰反射が生じるメカニズムはまさに図 3 (a) での擾乱運動量フラックスから説明される.

図 7 は定常散乱解の反射率と透過率である (Takehiro and Hayashi, 1992; Knessl and Keller, 1995). すべての x 方向波数 k に関して常に $|R| > 1$ であり, 必ず過剰反射が発生することを示している.

図 8 は, 反射率と Laser formula を用いた分散関係と Satomura (1981) の分散関係を比較したものである. Laser formula で得られた近似的な位相速度と成長率は, 線形安定性計算の結果を十分に表現できている.

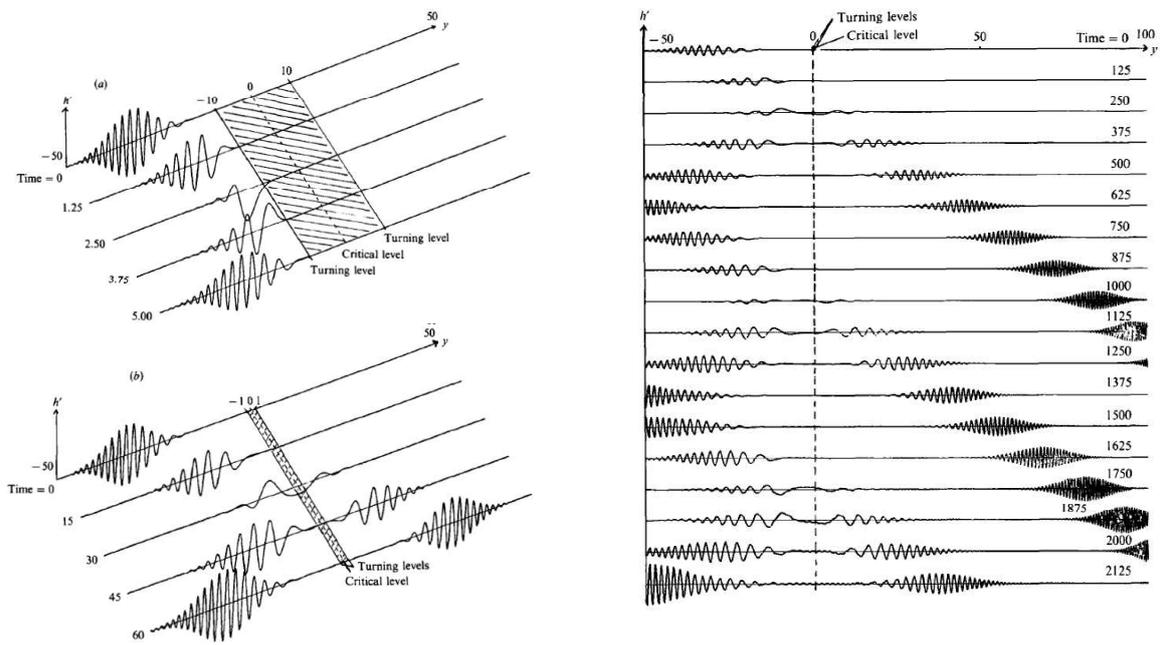
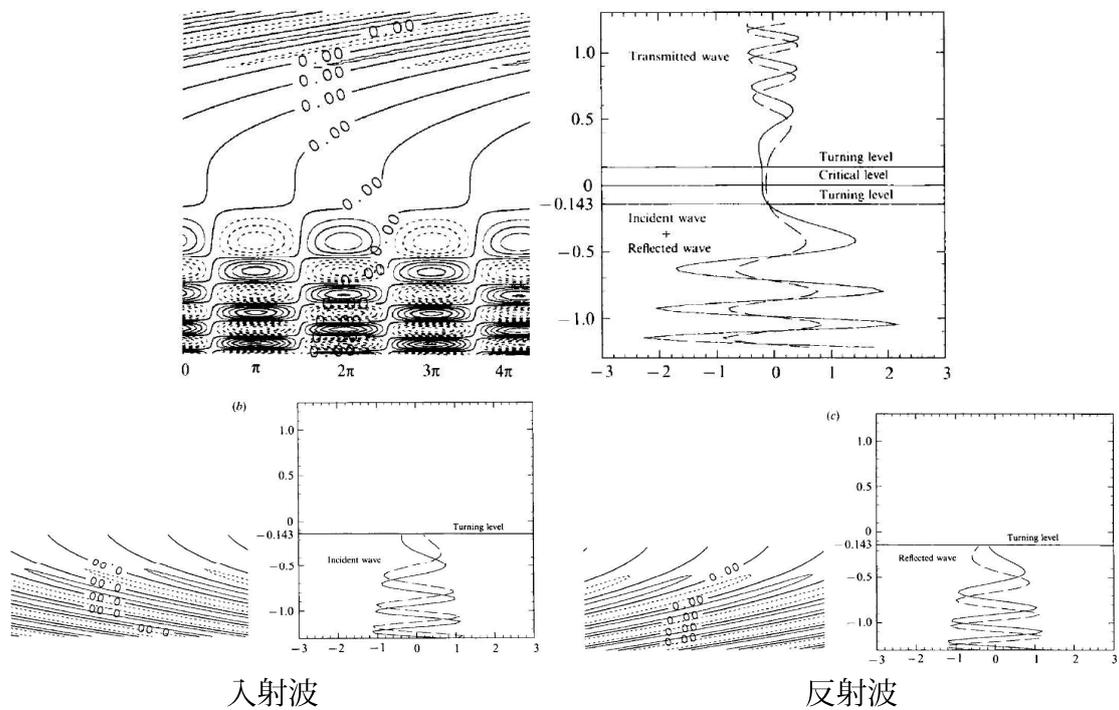


図 5: 非回転線形シア一流中の浅水波波束の時間発展 (Takehiro and Hayashi, 1992)



入射波

反射波

図 6: 過剰反射散乱解の構造 (Takehiro and Hayashi, 1992)

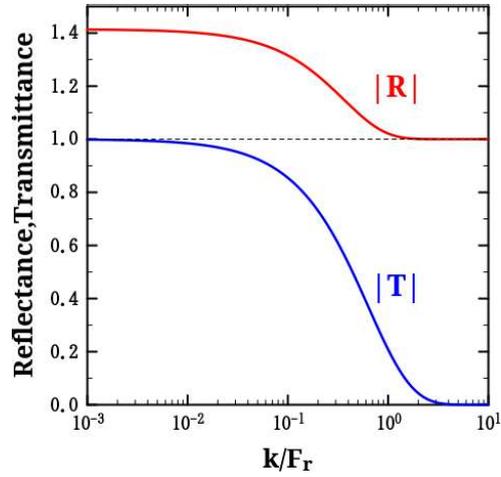


図 7: 非回転浅水系の線型シア一流中の浅水波の反射率 (赤線) と透過率 (青線) (Takehiro and Hayashi, 1992; Knessl and Keller, 1995).

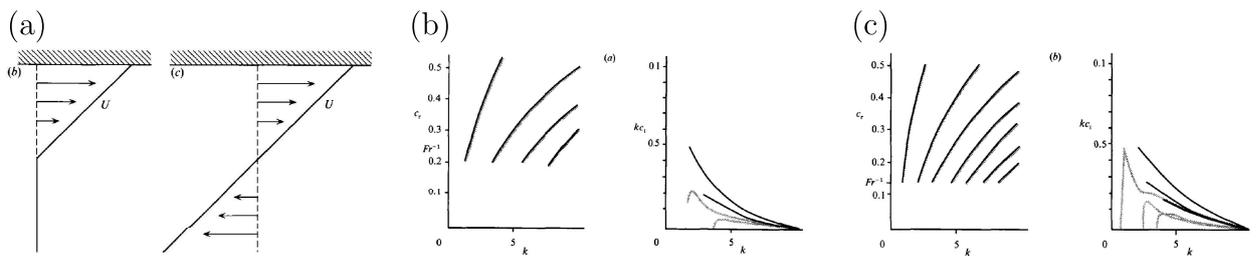


図 8: Satomura (1981) の固有モードと Laser formula による近似計算の比較. (a) Satomura (1981) のシア一流 (左) と OR 解のシア一流 (右). (b) $Fr = 5.0$ での位相速度 (左) と成長率 (右). (c) $Fr = 7.0$ 位相速度 (左) と成長率 (右). 濃い線が OR 解, 薄い線が固有モード (Takehiro and Hayashi, 1992).

2.3 例 2 : 線形ベータ効果 & 線形シア一流中のロスビー波

次に, 回転系 2 次元非圧縮流体中のシア一流を伝播するロスビー波の場合を考える. 先の浅水波と違って, この系では臨界点の特異性が存在するために, 波の振舞いが複雑になる.

基本流 $U(y)$ に対する回転系 2 次元順圧系での擾乱の支配方程式は,

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} - \left(f - \frac{dU}{dy} \right) v' = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + f u' = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (14)$$

ここで u', v', p' はそれぞれ速度擾乱の x, y 成分と圧力擾乱, f は系の回転からのコリオリパラメータであり, y のみの関数とする. この系での渦位保存則は

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{dQ}{dy} = 0, \quad q' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}, \quad Q(y) = f - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (15)$$

と書かれる. $Q(y), q'$ はそれぞれ基本場および擾乱の渦位である. さらに擾乱運動量保存則は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) m + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) = 0, \quad m = -\frac{Q_y \overline{\eta'^2}}{2}, \quad (16)$$

となる. ここで, η' は擾乱の y 方向の変位, $\overline{(\)}$ は位相平均 (x 平均) を表している. 運動量 m の符号が渦位傾度 $Q_y = \beta - \frac{d^2U}{dy^2}$ だけで決まることに注意されたい. ここで $\beta = \frac{df}{dy}$ はコリオリパラメータの y 微分である.

以下では, $\beta(y)$ と基本流 $U(y)$ がともに線形である状況を考える (Takano, 1998). すなわち,

$$U(y) = \Lambda y, \quad Q_y(y) = \beta - \frac{d^2U}{dy^2} = \gamma y \quad (17)$$

この場合の WKB 近似に基づく局所分散関係は

$$\hat{\omega} = -\frac{Q_y k}{k^2 + l^2} = -\frac{k\gamma y}{k^2 + l^2}, \quad \hat{\omega} = \omega - U(y)k = \omega - \Lambda y k. \quad (18)$$

この分散関係に基づいた波伝播状況 (wave geometry) を示したのが図 9 である. 臨界点 ($U - c = 0$) と変曲点 ($Q_y = 0$) の間が evanescent な領域 ($l^2 < 0$), 遠方で ($l^2 > 0, l = \pm\sqrt{(\gamma/\Lambda) - k^2} > 0$) の波伝播領域となっている. 入射波側に変曲点がある場合 ($y_c > y_b$) では evanescent 領域により臨界点が隠されているので臨界点で波が吸収されることがなく透過できて異なる擾乱運動量の波動が伝播可能な状況である. 入射波側に臨界点がある場合 ($y_b > y_c$) では, WKB 近似の範囲では臨界点で波が吸収されてしまい透過できなくなるが, 実際には臨界点手前で WKB 近似が破綻し, 波動的でなくなるため臨界点を超えて異なる擾乱運動量の波動が伝播可能となることが知られている (Lindzen et al., 1980).

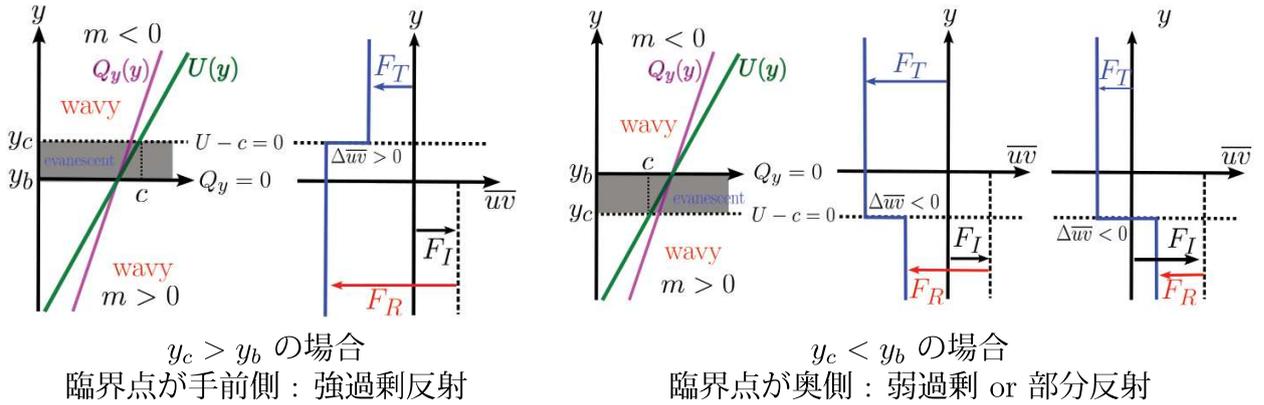


図 9: 線形ベータ効果のもとでの線形シア一流中のロスビー波の波伝播状況と擾乱運動量フラックスによるロスビー波の過剰反射の説明.

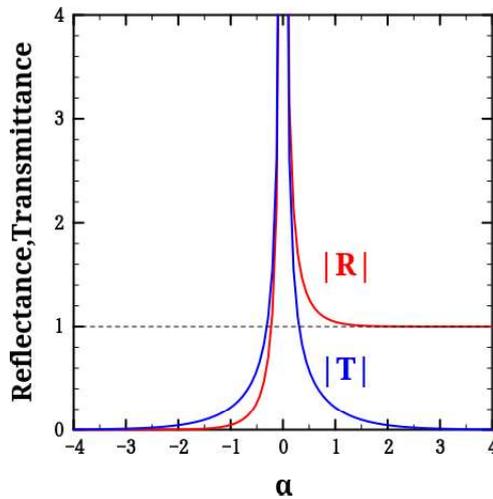


図 10: 線形ベータ効果のもとでの線形シア一流中のロスビー波の反射・透過率. (Takano, 1998). ただし, $\alpha = \gamma y_c / a \Lambda$, $a = \sqrt{(\gamma/\Lambda) - k^2}$.

順圧回転系では一般に臨界点で $\bar{u}\bar{v}$ に「飛び」が存在することが知られている (Lindzen and Tung, 1978, もともとは Wasow (1950) と Lin (1955) による).

$$\bar{u}\bar{v}_+ - \bar{u}\bar{v}_- = \pi \frac{k Q_y(y_c)}{2 U_y(y_c)} |B|^2.$$

したがって, 変曲点 $Q_y = 0$ と臨界点 $U - c = 0$ の位置関係が反射波の振幅に影響する. 過剰反射の基本的な説明模式図である図 3 が図 9 のように変化する.

定常散乱解は解析的に求めることができる (Takano, 1998). その散乱解の反射率・透過率を図 10 に示す. $\alpha = \gamma y_c / a \Lambda$ は変曲点を減点とする規格化された臨界点の位置, $a = \sqrt{(\gamma/\Lambda) - k^2}$ は遠方での y 方向波数である. $\alpha > 0$ (臨界点が透過波側, $y_c > 0$) の場合は常に過剰反射 ($|R| > 1$), $\alpha < 0$ (臨界点が入射波側, $y_c < 0$) の場合は $-0.22 < \alpha < 0$ でのみ過剰反射となっている. $\alpha = 0$ (臨界点に変曲点, $y_c = 0$) は反射率無限大である.

求められた散乱解を用いて $y = -10$ に壁をおいたときの不安定モードの分散関係を近似的に求めたのが図 11 である. 散乱解による近似計算は固有値計算をよく表現しているとはいえない.

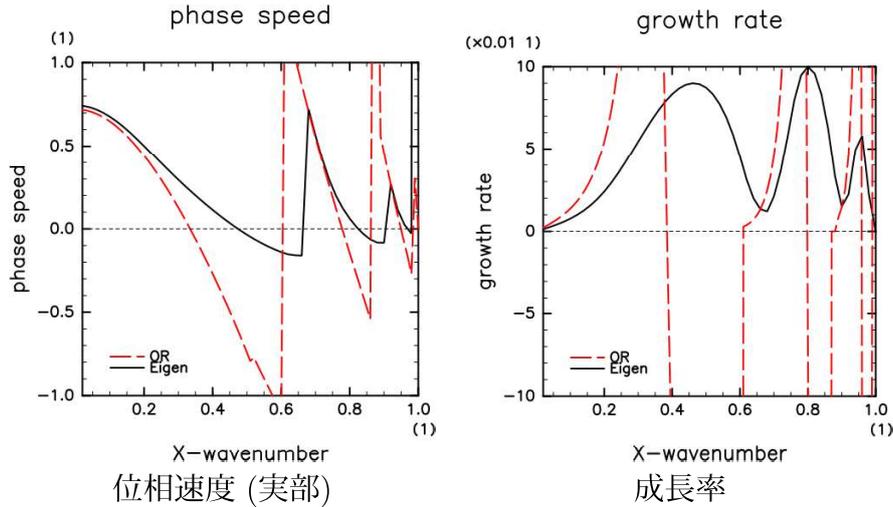


図 11: Takano (1998) のモデルに対して, $y = -10$ に壁をおいた場合の固有モードと Laser formula による近似計算の比較. 赤破線が, 過剰反射解による計算, 黒実線が有限差分法による固有値計算.

2.4 渦位勾配が集中している問題

順圧モデルでは 0 でない渦位勾配の領域でロスビー波 (渦度波) が伝播できる. しかしながら, シアー不安定を考える状況では渦位勾配が集中していてロスビー波がシアーと垂直方向に伝播できる領域が存在せず, 過剰反射解をそのままでは構成できない. そのような問題として, 例えば Kelvin-Helmholtz (K-H) 不安定や, 境界に渦位勾配が集中する傾圧不安定問題が挙げられる.

このような問題に対して Lindzen らは渦位勾配の集中している領域を広げた問題を構成して散乱問題を考えるというものであった. 例えば K-H 不安定 (Lindzen and Rosenthal, 1983), 傾圧不安定の Charney 問題 (Lindzen et al., 1980), さらには Eady 問題 (Takayabu and Takehiro, 2003) にて解釈が試みられてきた. 得られた近似的固有解とは定性的には対応しているようにみえるが, 定量的に満足行くものではなかったように思える. このような問題に対しては, 次の節で説明する波相互作用で解釈するのが素直と思われる.

3 波の共鳴とシアー不安定

先の節では, 波の過剰反射現象を通じてシアー流が不安定となる仕組みを理解することを試みた. その本質は, 運動量やエネルギーといった波に伴う保存量であった. 過剰反射による理解は, 波がシアー流と垂直方向に伝播可能でないと適用できない. そのような状況でも可能な理解の術として, 以下では波の共鳴によるシアー不安定の理解について述べる. 共鳴による波の増幅の本質は, ここでも運動量などの波に伴う保存量である.

3.1 振動子の共鳴とシアー不安定

次の連立線形常微分方程式で記述される 2 つの単振り子の相互作用問題を考える (酒井と小林, 1993).

$$\frac{dx}{dt} = -i\omega_1(k)x + \alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = -i\omega_2(k)y + \beta x. \quad (19)$$

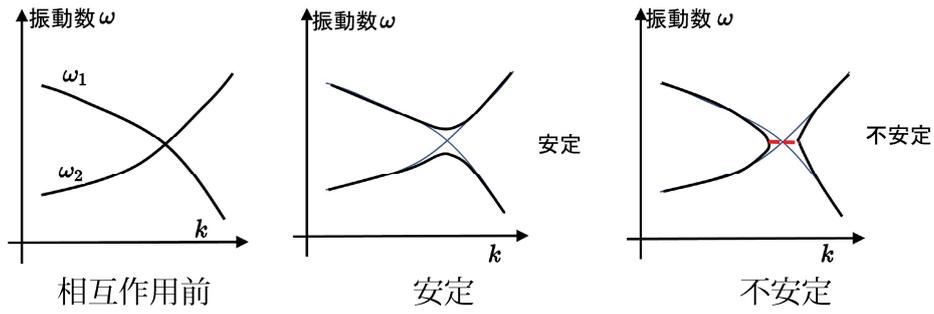


図 12: 2つの単振り子問題の分散関係 (酒井と小林, 1993).

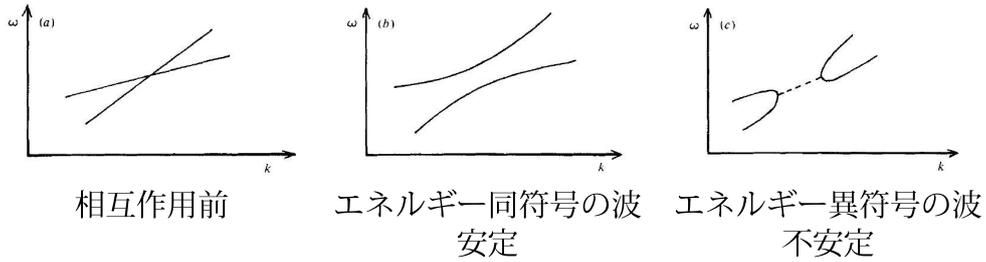


図 13: シアー不安定の分散関係の模式図 (Cairns, 1979).

安定性を調べるために $(x, y) \propto e^{\sigma t}$ を仮定すると, 次の分散関係が得られる.

$$\sigma^2 - i(\omega_1 + \omega_2)\sigma - (\omega_1\omega_2 + \alpha\beta) = 0, \quad D = -(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\alpha\beta. \quad (20)$$

$\alpha\beta < 0$ の場合 σ は純虚数であり, すなわち中立である. 一方 $\alpha\beta > 0$ かつ $\omega_1 \sim \omega_2$ の場合, σ は実数であり, 不安定となる.

共鳴時には次のような保存量が存在する.

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2}(\beta x^2 - \alpha y^2) = 0, \quad \text{for } \omega_1 = \omega_2, \quad m = \frac{1}{2}(\beta x^2 - \alpha y^2) = \text{const.} \quad (21)$$

不安定ならば x, y ともに時間とともに増加するが, m が保存するためにはその値が 0 でなければならない. したがって, 不安定モードの保存量の値が 0 である, という一般的な示唆が得られる.

このような不安定と保存量の関係が, シアー不安定問題にも存在することを示したのが Cairns (1979) である. 彼は波のエネルギー (基本状態からのエネルギー差) に注目し, 図 13 のような 2つの波の分散曲線の交点で不安定が生じることを K-H 不安定を例に示した.

重要な概念は, 負のエネルギーの波が存在すること, そして, 2つの波のエネルギーが逆符号の場合に不安定が生じること, であった. このことは, 先の振り子の例において, 共鳴時には保存量の値が 0 でなければならないことと整合的である. 2つの波のエネルギーが異符号である場合に限り, 相互作用した結果エネルギーが 0 のモードを構成できるからである.

3.2 例：折れ線モデル

以下では波の共鳴とシアー不安定および保存量の関係を例示する順圧流の折れ線モデルを紹介する (e.g. Vallis, 2017; Iga, 2013).

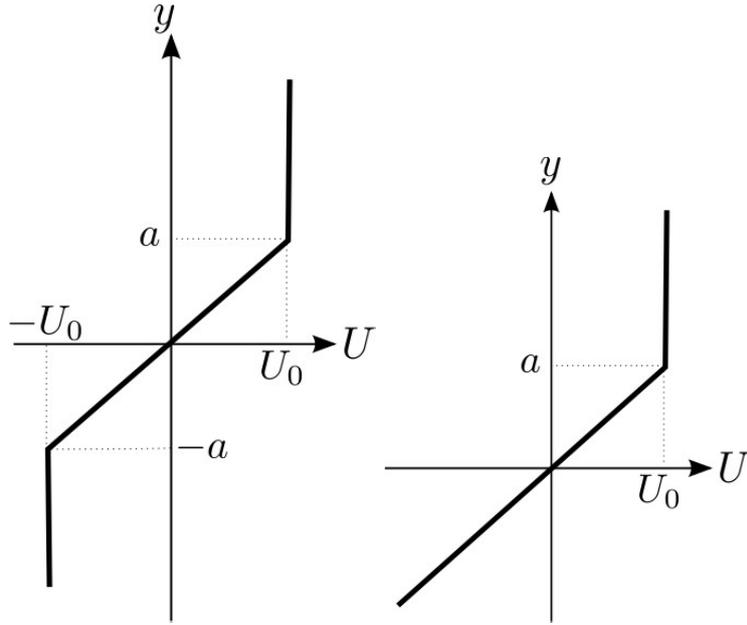


図 14: 折れ線モデルの基本流分布. 左が 3 点折れ線モデルの基本流分布. 右が $y = a$ に局在する波を考えるための基本流

基本流 $U(y)$ の分布が

$$U(y) = \begin{cases} U_0 & (y \geq a) \\ U_0 y/a & (-a \leq y \leq a) \\ -U_0 & (y \leq -a) \end{cases}$$

である流れ場の安定性を考える (回転なし). この折れ線基本流の安定性を解いてみよう. 各領域において $U_{yy} = 0$ なので, 擾乱の流れ関数 $\tilde{\psi}'$ に対する方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \tilde{\psi}' = 0, \quad (22)$$

であり, 各領域における解はつぎのようにかける.

$$\tilde{\psi}' = \begin{cases} Ae^{-k(y-a)} & (y \geq a) \\ Be^{-k(y-a)} + Ce^{k(y+a)} & (-a \leq y \leq a) \\ De^{k(y+a)} & (y \leq -a) \end{cases}$$

境界で $\tilde{\psi}'$ と圧力が連続であることから, $\Rightarrow A, B, C, D$ に関する連立方程式が得られ, その係数行列式が 0 の条件から分散関係式

$$c^2 = \left(\frac{U_0}{2ka} \right)^2 [(1 - 2ka)^2 - e^{-4ka}],$$

が得られる. この分散曲線を波の共鳴で解釈するために, 折れ曲がりに局在する波を考える. $y = -a$ の折れ曲がりを取り除いたときの流れ分布から $y = a$ の折れ曲がりに局在する波の分散関係が得られる. 基本流分布が

$$U(y) = \begin{cases} U_0 & (y \geq a) \\ U_0 y/a & (y \leq a) \end{cases}$$

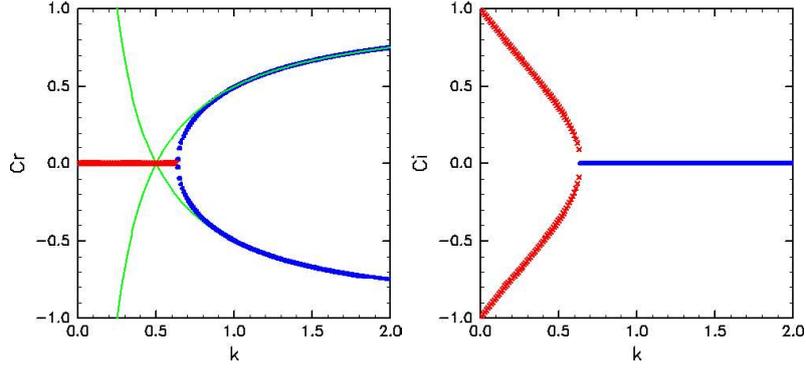


図 15: 3 点折れ線モデルの分散関係. 青: 安定モード, 赤: 不安定モード, 緑: 折れ曲がり
に局在する波の c_r . $U_0 = 1, a = 1$.

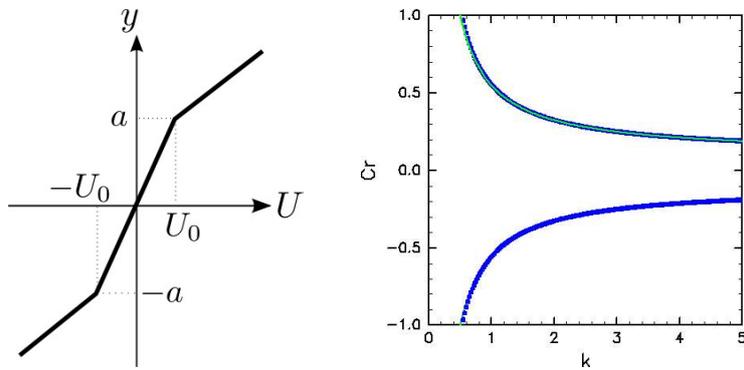


図 16: 不安定が発生しない折れ線基本流. $U_0 = 0.1, a = 1$.

に対して, 各々の領域の解は

$$\tilde{\psi}' = \begin{cases} Ae^{-k(y-a)} & (y \geq a) \\ Be^{+k(y-a)} & (y \leq a) \end{cases}$$

となる. $y = a$ での接続条件から $y = a$ に局在する波の分散関係

$$c = U_0 \left(-1 + \frac{1}{2ka} \right).$$

が得られる. $y = a$ での折れ曲がりの向きは $d^2U/dy^2 < 0$ であるので $y = a$ の折れ曲がり
に局在する波は負の運動量を持つ (式 16 参照). 一方, $y = -a$ の折れ曲がり
に局在する波は, 基本流の折れ曲がりの向きが逆になり, 正の運動量を持つ. 異符号の運動量を持つ
これら 2 つの波の分散曲線が交わるところで運動量 0 のモードが構成可能となり, 波の共鳴による不安定が発生していることがわかる.

同じ 3 点の折れ線モデルでも折れ曲がり方が逆の分布の場合には不安定モードが存
在しなくなる (e.g. Vallis, 2017). 不安定が発生しない理由の一つとして, 逆符号の運動量
をもつ波が存在しているが, $-\frac{U}{2Q_y} > 0$ であり, 波のエネルギーがどちらも正となってい
る. そのためエネルギーが 0 となるモードを構成できないからである (Fjørtoft の定理に
対応).

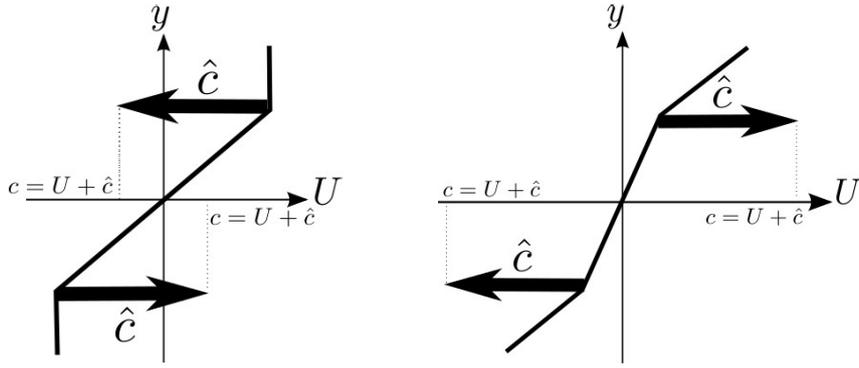


図 17: 局在するロスビー波の伝播方向.

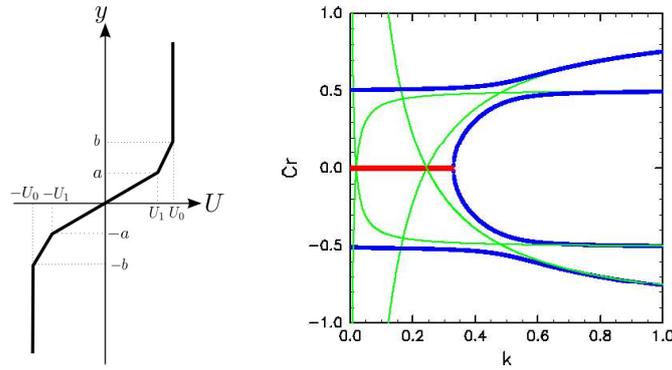


図 18: 5 点折れ線モデルの基本流 (左) と分散関係 (右). 青: 安定モード, 赤: 不安定モード, 緑: 折れ曲がりに局在する波の c_r . $U_0 = 1, U_1 = 0.51, a = 1, b = 2$

別の解釈として, 分散曲線が交わらず, 共鳴できない状況になっていると考えることもできる. このことをロスビー波の位相速度からみてみよう. 渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta' + \left(\beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad \nabla^2 \psi' = \zeta'$$

において, $\zeta', \psi \propto e^{i(kx+ly-\omega t)}$ とすると, (拡張された) ロスビー波の (局所) 分散関係が

$$c = \frac{\omega}{k} = U + \hat{c}, \quad \hat{c} = -\frac{Q_y}{k^2 + l^2}, \quad Q_y = \beta - \frac{d^2 U}{dy^2}.$$

と得られる. ここで, ζ', ψ' は擾乱の渦度と流れ関数, \hat{c} は流れにのって見たときのロスビー波の位相速度 (固有位相速度) である.

不安定が生じない例の場合, $y = a$ の波は $\hat{c} > 0$ であり, 基本流より位相速度 c が大きくなり, 速く伝播する. 一方 $y = -a$ の波は $\hat{c} < 0$ から, 基本流より遅くなる. したがって, 2つのロスビー波の位相速度が一致する可能性がなく分散曲線が交わらず共鳴できない.

一方, 不安定が発生する場合には $y = a$ の波は $\hat{c} < 0$ であり, 基本流より遅くなる. $y = -a$ の波は $\hat{c} > 0$ であり, 基本流より速くなる. この場合は 2つのロスビー波の位相速度 c が一致する可能性がある.

最後に, 図 17 に 5 点折れ線モデルの場合を示す. 同符号の運動量をもつ波は分散曲線が交わらず, 不安定モードが発生しない様子がみられる.

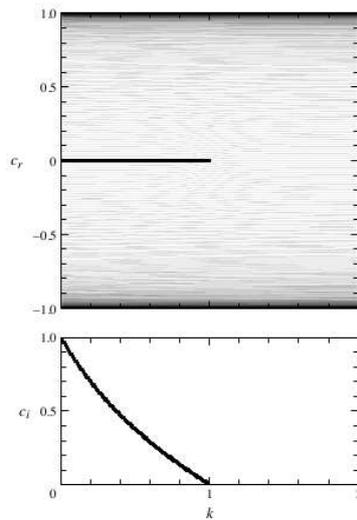


図 19: $U(y) = \tanh y$ の固有モード (Iga, 2013).

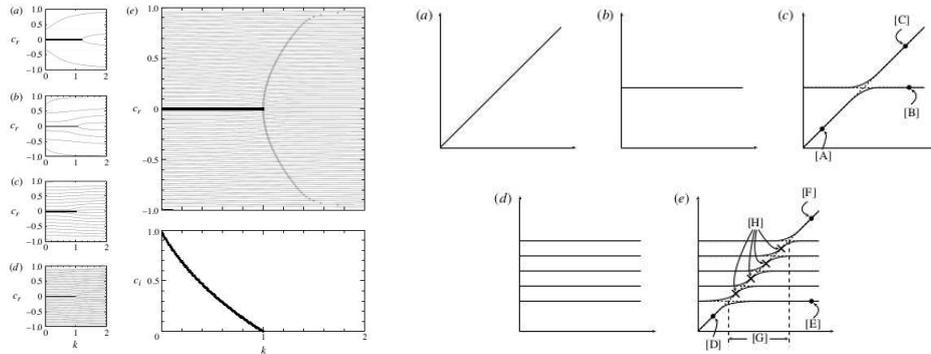


図 20: 不安定モードにつながる中立波と連続モードの相互作用 (Iga, 2013).

3.3 連続モード

これまでの折れ線モデルでは、局在するロスビー波の相互作用として不安定モードが解釈しやすかったが、連続的に変化する基本流の場合には、相互作用する波が見えなくなってしまう。図 19 は \tanh 型の基本流の分散関係である。低波数での不安定モードから分岐するような共鳴している波が見出されない。

この問題は、連続モードと呼ばれる中立波の存在による (Case, 1960; Lin, 1961)。これは各点でポテンシャル渦度が局在し、そこでの基本流で流されていく中立モードである。

$$q = q_c \delta(y - y_c) e^{i(kx - ct)}, \quad c = U(y_c)$$

そのため、連続な基本流分布で固有値問題を解くと一面に中立波が存在し、不安定モードにつながる中立波が見えなくなっている。

この困難を克服するために、Iga (2013) は不安定モードを構成する中立波が連続モードと交差すると、同符号の保存量のモード相互作用が生じ、次々と入れ換わりが起きていると考えた。そのモードの入れ換わりを追っていくことで、不安定モードにつながる中立波の分散曲線を構成した (図 20)。

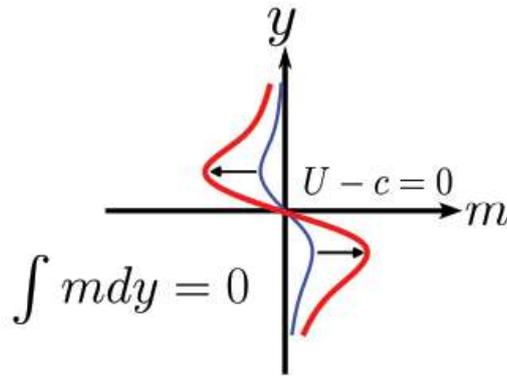


図 21: 擾乱運動量でみた不安定モードの構造.

	運動量保存	エネルギー・運動量保存
非圧縮・外力なし	Rayleigh-Kuo の定理	Fjørtoft の定理
非圧縮・成層あり	Synge の定理	
浅水系		Ripa の定理

表 2: 積分定理と保存則の関係

4 運動量・エネルギー保存則と積分定理

先の波の共鳴において得られた重要な結論の一つは、「不安定モードの全保存量は 0 でなければならない」ことである。

不安定モードは振幅が時間的に増大し、一方で振幅の 2 次の保存量は振幅の 2 乗に比例する。したがって保存量の値は 0 でないとならなからである。このことは、不安定モードはがの保存量の領域と負の保存量の領域から構成されており、お互い振幅を増加しつつ、全体の保存量が 0 となっているのである。

この事実から積分定理のいくつかを解釈することができる。例えば Rayleigh-Kuo の(変曲点)定理は運動量保存則 (e.g. Vallis, 2017) に対応している。2 次元非圧縮流体中の波の全運動量 M は

$$M = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{Q_y \eta^2}{2} dy, \quad (23)$$

と表される。 M が 0 であるためには流れのどこかで $Q_y = \beta - \frac{d^2U}{dy^2}$ が符号を変えなければならない。これが Rayleigh-Kuo の定理である。

さまざまな積分定理と保存則の関係を整理したのが表 2 である。

5 まとめ

以上、波の「運動量・エネルギー保存則」を通じて過剰反射・シア不安定を統一的に理解することを試みた。

重要な結論は、不安定モードの保存量は 0 でないといけなからである。このことから運動量・エネルギーの符号の異なる波同士の相互作用による解釈が可能となる。過剰反

射現象は、透過波が入射波と逆符号の運動量のとき発生する。擾乱の増幅のためには符号の異なる運動量を持つ波の存在が鍵であった。積分定理の一部は運動量・エネルギーの符号の異なる波が存在できるための必要条件であった。

なめらかに変化するシア一流の不安定モードとつながる中立波が見えない状況は、もともと存在しているであろう中立波と連続モードとの連続的な入れ替わりとして解釈された。

References

- Bretherton, F. P., 1966: The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow. *Quart. J. R. Meteor. Soc.*, **92**, 393, 466–480.
- Booker, J. R., Bretherton, F. B., 1967: The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *J. Fluid Mech.*, **27**, 513–539.
- Cairns, R. A., 1979 : The role negative energy waves in some instabilities of parallel flows. *J. Fluid Mech.*, **92**, 1–14.
- Case, K. M., 1960 : Stability of inviscid plane Couette flow. *Phys. Fluids*, **3**, 143–148.
- Fjørtoft, R., 1950 : Application of Integral Theorems in Deriving Criteria of Stability for Laminar Flows and for the Baroclinic Circular Vortex. *Geofysiske Publikasjoner*, **17**, 6, 52pp.
- Hayes, M., 1977: A note on group velocity. *Proc. R. Soc. London. A.*, **354**, 533–535.
- Howard, L. N., 1961: Note on a paper of John W.Miles. *J. Fluid Mech.*, **10**, 509–512.
- Iga, K., 2013 : Shear instability as a resonance between neutral waves hidden in a shear flow. *J. Fluid Mech.*, **715**, 452–476.
- Knessl, C., Keller, J. B, 1995: Stability of linear shear flows in shallow water. *J. Fluid Mech.*, **303**, 203–214.
- Kuo, H.-L., 1949: Dynamical instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. *J. Meteor.*, **4**, 105–122.
- Lin, C. C., 1955: The theory of hydrodynamics stability. *Cambridge University Press*, 155pp.
- Lin, C. C., 1961 : Some mathematical problems in the theory of the stability of parallel flows. *J. Fluid Mech.*, **10**, 430–438.
- Lindzen, R. S., 1988: Instability of plane parallel shear flow (Towards a mechanistic picture of how it works). *PAGEOPH*, **16**, 103–121.
- Lindzen, R. S., Barker, J., 1985: Instability and wave over-reflection in stably stratified shear flow. *J. Fluid Mech.*, **151**, 189–217.

- Lindzen, R. S., Rosenthal, A. J., 1983 : Instabilities in a stratified fluid having one critical level. Part III: Kelvin-Helmholtz instabilities as overreflected waves. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 530–542.
- Lindzen, R. S., Farrell, B., Tung, K. K., 1980: The concept of wave overreflection and its application to baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 44–63.
- Lindzen, R. S., Tung, K. K., 1978: Wave overreflection and shear instability. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1626–1632.
- Miles, J. W., 1957: On the reflection of sound at an interface of relative motion. *J. Acoust. Soc. Am.*, **29**, 226–228.
- Miles, J. W., 1961: On the stability of heterogeneous shear flows. *J. Fluid Mech.*, **10**, 496–508.
- Narayan, R., Goldreich, P., Goodman, J., 1987: Physics of modes in a differentially rotating system-analysis of the shearing sheet. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **228**, 1–41.
- Orr, W. M. F., 1907 : The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part I: A perfect liquid. *Proc. Roy. Irish Acad.*, **A27**, 9–68.
- Rayleigh, Lord, 1880 : On the stability or instability of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **11**, 57–70.
- Ribner, H. S., 1957: Reflection, transmission, and amplification of sound by a moving medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, **29**, 435–441.
- Ripa, P., 1983: General stability conditions for zonal flows in a one-layer model on the beta-plane or the sphere. *J. Fluid Mech.*, **126**, 463–489.
- Satomura, T. 1981: An investigation of shear instability in a shallow water. *J. Met. Soc. Japan*, **59**, 148–167
- Synge, J. L., 1933 : The stability of heterogeneous liquids. *Trans. Roy. Soc. Canada III*, **27**, 1–18.
- Takano, K., 1998: On the Mechanism of Overreflection of a Barotropic Rossby Wave. *J. Meteor. Soc. Japan*, **76**, 191–203.
- Takayabu, I., Takehiro, S., 2003 : Wave over-reflection and baroclinic instability of the Eady problem. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 2404–2412.
- Takehiro, S, Hayashi, Y.-Y., 1992 : Over-reflection and shear instability in a shallow-water model. *J. Fluid Mech.*, **236**, 259–279
- Vallis, G. K., 2017: Atmospheric and oceanic fluid dynamics. Cambridge University Press.
- Wasow, W., 1950 : A study of the solutions of the differential equation $y^{(4)} + \lambda^2(xy'' + y) = 0$ for large values of λ . *Ann. Math.*, **52**, 350–361.
- 酒井, 小林, 1993 : 波の共鳴と流れの不安定, 京都大学数理解析研究所考究録, **830**, 118–126, <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0830-13.pdf>