# 分数冪 KdV 型方程式の進行波解の安定性解析
# Stability analysis of travelling wave solutions to KdV type equations with fractional dispersion

東京理科大学・大学院理学研究科 数学専攻　國分 海斗
Kaito KOKUBU
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Tokyo University of Science

## 1 序

本稿では, 次の Korteweg–de Vries (KdV) 型方程式を考える:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) - \partial_x D_x^\sigma u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{fKdV}$$

ただし, 未知関数 $u = u(t,x)$ は実数値とする. また, 指数 $\sigma$ は $1 \le \sigma \le 2$ とし, 作用素 $D_x^\sigma$ は Fourier 変換 $\mathscr{F}$ を用いて, $D_x^\sigma := \mathscr{F}^{-1}|\xi|^\sigma \mathscr{F}$ と定める. 作用素 $D_x^\sigma$ は $(-\partial_x^2)^{\sigma/2}$ ともかかれ, 分数冪 Laplacian とよばれる. (fKdV) は, $\sigma = 2$, $f(u) = u^2$ のときに Korteweg–de Vries 方程式と一致し, $\sigma = 1$, $f(u) = u^2$ のときに Benjamin–Ono 方程式と一致する.

(fKdV) は, 非線形 Schrödinger 方程式や非線形 Klein–Gordon 方程式などとともに, 非線形分散型方程式に分類される. 非線形分散型方程式は, 波を分散させる性質 (分散性) と波を集中させる性質 (非線形性) をもち, 解の挙動はこれらの性質の強弱によって決まる. 特に, 分散性と非線形性がつり合うとき, 非線形分散型方程式は時間が経過しても初期値の形状を保つ**孤立波解**とよばれる特殊解をもつ. 本稿で考える (fKdV) に対する孤立波解のひとつとして **進行波解** $u(t,x) = \phi(x - ct)$ が挙げられる. ここで, $c$ は進行波の速さを表す正定数である. (fKdV) の進行波解を形成する関数 $\phi$ は次の方程式 (定常問題) の非自明解として与えられる:

$$D_x^\sigma \phi + c\phi - f(\phi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{SP$_c$}$$

本研究では, 次の二重冪型非線形項をもつ KdV 型方程式

$$\partial_t u + \partial_x(au^p + u^q) - \partial_x D_x^\sigma u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{dpfKdV}$$

に対して, 以下の 2 つの観点で現象の考察を行う.

1. (dpfKdV) から導かれる定常問題

$$D_x^\sigma \phi + c\phi - a\phi^p - \phi^q = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{dpSP$_c$}$$

に非自明解が存在するかどうか. すなわち, (dpfKdV) の進行波解が形成されるかどうか.

2. 上の項で形成された進行波解が安定であるかどうか.

ただし, $a \in \{\pm 1\}$, $p, q \in \mathbb{R}$, $2 \le p < q < \infty$ とする. (dpfKdV) の典型例として, $\sigma = 2$, $a = +1$, $p = 2$, $q = 3$ とした場合が挙げられる. この場合の (dpfKdV) は Gardner 方程式とよばれるもので, Miura–Gardner–Kruskal [10] によって導出されたものである. 著者のこれまでの研究により, (dpfKdV) の進行波解に関する現象が, 方程式の分散性の強さ $\sigma$, 非線形項の符号 $a$, 指数 $p$, $q$ の偶奇性により変化することが明らかになった. 本研究は, これらの要素に着目して (dpfKdV) の進行波解の安定性を分類することを目的とする.

本稿では, 前述の 2 つの観点について, 単純冪型非線形項 $f(u) = u^p$ $(p \in \mathbb{N},\ p \ge 2)$ をもつ (fKdV) の進行波解に対する既知の結果を紹介し, (dpfKdV) の進行波解に関して著者が得た研究結果について述べていく.

### 記号の定義

2 乗可積分な関数全体の集合を $L^2(\mathbb{R})$ とかく. また, $L^2(\mathbb{R})$ に対する内積およびノルムをそれぞれ

$$(v, w)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} vw\,dx, \quad \|v\|_{L^2} \coloneqq (v, v)_{L^2} = \left( \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2\,dx \right)^{1/2}$$

と定める. 続いて, $\sigma > 0$ に対して, Sobolev 空間 $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ を

$$H^{\sigma/2}(\mathbb{R}) \coloneqq \{ v \in L^2(\mathbb{R}) :\ D_x^{\sigma/2} v \in L^2(\mathbb{R}) \}$$

と定める. Sobolev 空間 $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ は

$$(v, w)_{H^{\sigma/2}} = (D_x^{\sigma/2} v, D_x^{\sigma/2} w)_{L^2} + (v, w)_{L^2}$$

を内積とする Hilbert 空間である. さらに, $\|v\|_{H^{\sigma/2}}^2 = (v, v)_{H^{\sigma/2}}$ と定める.

次に, $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して, エネルギー汎関数 $E$ と質量汎関数 $M$ を次のように定める.

$$E(v) \coloneqq \frac{1}{2} \|D_x^{\sigma/2} v\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}} F(v)\,dx, \qquad M(v) \coloneqq \frac{1}{2} \|v\|_{L^2}^2.$$

ここで, 関数 $F$ は非線形項 $f$ の原始関数とする. なお, 汎関数 $E$, $M$ は (fKdV) の保存量である.

## 2 定常問題の基底状態

この節では, 定常問題 $(\mathrm{SP}_c)$ の非自明解について考える.

**定義.**

- $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ が $(\mathrm{SP}_c)$ の解 (弱解) であるとは, 任意の $w \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}} (D_x^{\sigma} v + cv - f(v)) w\,dx = 0$$

  が成り立つことをいう.
- $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$, $c > 0$ に対して, $S_c(v) \coloneqq E(v) + cM(v)$ と定める. この汎関数は**作用汎関数**とよばれる.
- $(\mathrm{SP}_c)$ の非自明解 $\phi \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ が**基底状態**であるとは, $(\mathrm{SP}_c)$ の任意の非自明解 $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して $S_c(\phi) \le S_c(v)$ が成り立つことをいう.

さて, 作用汎関数 $S_c$ を $v$ に関して微分すると, $S_c'(v) = D_x^\sigma v + cv - f(v)$ となり, ($\mathrm{SP}_c$) の左辺と一致する[1)]. したがって, ($\mathrm{SP}_c$) を解くには, 作用汎関数 $S_c$ の停留点 $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ を探し出せばよい. また, ($\mathrm{SP}_c$) の基底状態は後述する補題 2.2 で述べるように変分的に特徴付けることができる. (fKdV) の進行波解の安定性を解析する上で, この変分的な性質が重要な役割を果たす. この節では, ($\mathrm{SP}_c$) の基底状態に着目して議論していく.

ここでは, 単純冪型非線形項をもつ (fKdV) に対応する定常問題

$$D_x^\sigma \psi + c\psi - \psi^p = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{$\mathrm{spSP}_c$}$$

の基底状態について, 既知の結果を紹介する. まず, $\sigma = 2$ のとき, ($\mathrm{spSP}_c$) は常微分方程式となり, 各 $c > 0$ に対して

$$\psi_c(x) = \left\{ \frac{(p+1)c}{2} \right\}^{1/(p-1)} \mathrm{sech}^{2/(p-1)} \left( \frac{(p-1)\sqrt{c}}{2} x \right)$$

という解が得られる. また, $\sigma = 1$ かつ $p = 2$ の場合, 定常問題 ($\mathrm{spSP}_c$) は

$$\psi_c(x) = \frac{2c}{1 + c^2 x^2}$$

を解にもつことが, Benjamin [2] により得られている. 一般の $1 \le \sigma < 2$, $p \ge 2$ の場合についても, 正値偶関数の基底状態の存在性が Weinstein [13] により示されている. さらに, $1 \le \sigma < 2$ のとき, ($\mathrm{spSP}_c$) の正値偶関数の基底状態の一意性が, Amick–Toland [1] および Frank–Lenzmann [4] により得られている.

以下, ($\mathrm{dpSP}_c$) について得られた結果を紹介する.

**定理 2.1** (K. [6,7])**.** $1 \le \sigma \le 2$, $p, q \in \mathbb{N}$, $2 \le p < q < \infty$, $c > 0$ とする.

(I) $a = +1$ のとき, $q$ が奇数ならば, ($\mathrm{dpSP}_c$) は正値偶関数の基底状態をもつ.

(II) $a = -1$ のとき,

  (1) $p$ が奇数ならば, ($\mathrm{dpSP}_c$) は正値偶関数の基底状態をもつ.

  (2) $p$ が偶数かつ $q$ が奇数ならば, ($\mathrm{dpSP}_c$) は負値偶関数の基底状態をもつ.

以下, 定理 2.1 の証明の方針について述べる.

定常問題 (dpfKdV) に対応する作用汎関数は次のようにかける:

$$S_c(v) = \frac{1}{2}\|D_x^{\sigma/2} v\|_{L^2}^2 + \frac{c}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{a}{p+1}\int_{\mathbb{R}} v^{p+1}\,dx - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}} v^{q+1}\,dx.$$

また, 作用汎関数 $S_c$ から定まる汎関数 $K_c$ を以下のように定義する:

$$K_c(v) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} S_c'(v) v\,dx = \|D_x^{\sigma/2} v\|_{L^2}^2 + c\|v\|_{L^2}^2 - a\int_{\mathbb{R}} v^{p+1}\,dx - \int_{\mathbb{R}} v^{q+1}\,dx.$$

この汎関数は Nehari 汎関数とよばれる. 関数 $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ を ($\mathrm{dpSP}_c$) の解とすると, $K_c(v) = 0$ が成り立つことが, 汎関数 $K_c$ の定義から従う. また, ($\mathrm{dpSP}_c$) の基底状態に関して, 次の性質が成り立つ.

**補題 2.2.** 定理 2.1 の条件 (I), (II-1), (II-2) のいずれかを仮定する. このとき, $\phi \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して, 次の (i), (ii) は同値である:

1) Sobolev 空間 $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上での Fréchet 微分の意味である. また, 作用汎関数 $S_c$ は Fréchet 微分の意味で $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上 $C^2$ 級である.

(i) $\phi$ は (dpSP$_c$) の基底状態である．

(ii) $\phi$ は次の等式を満たす:

$$S_c(\phi) = d(c) \coloneqq \inf\{S_c(v) : v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ K_c(v) = 0\}. \tag{1}$$

ここで, $K_c(v) = 0$ を満たす関数 $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ に対して, $\lambda > 0$ を変数とする関数

$$K_c(\lambda v) = \lambda^2 \left( \|D_x^{\sigma/2} v\|_{L^2}^2 + c\|v\|_{L^2}^2 \right) - a\lambda^{p+1} \int_{\mathbb{R}} v^{p+1}\, dx - \lambda^{q+1} \int_{\mathbb{R}} v^{q+1}\, dx$$

を考える．補題 2.2 の同値性は,

$$\partial_\lambda K_c(\lambda v)|_{\lambda=1} \neq 0 \tag{2}$$

が満たされるときに成立する．また, 条件 (2) は, 定理 2.1 の条件 (I), (II-1), (II,2) のいずれかの下で満たされる．実際, 定理 2.1 の 3 つの条件のもとでは, 関数 $\lambda \mapsto K_c(\lambda v)$ に含まれる $\int_{\mathbb{R}} v^{q+1}\, dx$ の値が常に正になる．このことから, 関数 $\lambda \mapsto K_c(\lambda v)$ のグラフの形状が図 1 のように確定され, (2) が成り立つことがわかる．なお, 定理 2.1 の条件を満たさない場合については, $\int_{\mathbb{R}} v^{q+1}\, dx$ の符号が確定できないため, 関数 $\lambda \mapsto K_c(\lambda v)$ のグラフの形状が図 2 のようになる可能性を排除できず, 条件 (2) が成り立つかどうかは一般にはわからない．

さて, 補題 2.2 により, 定理 2.1 は等式 (1) を満たす関数 $\phi \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ の存在を示すことに帰着される．このことを示すには, (1) の最小化列のコンパクト性, すなわち

$$S_c(v_n) \to d(c), \quad K_c(v_n) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

を満たす $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ の点列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列が $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上である関数に強収束することをいえばよい．このことは, Lieb のコンパクト性定理 ([8] および [7, Lemma 3.5]) を用いた議論により証明することができる．

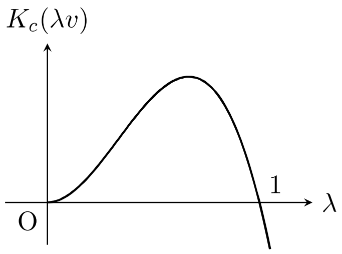


図 1

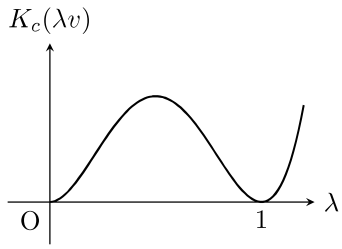


図 2

上の議論では基底状態の存在性を示したが, 基底状態の正値性・負値性と偶対称性については, 等式 (1) を満たす関数の対称減少再配列を考えることによって証明することができる． また, (dpSP$_c$) の非線形項の指数が自然数であることから, Sobolev 空間の性質を用いることにより, (dpSP$_c$) の任意の弱解 $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ が古典解となることを容易に示すことができる．

## 3 進行波解の安定性・不安定性

最初に, (fKdV) の進行波解の安定性および不安定性を定義する．

**定義.** $r>0$ と $\phi \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$U_r(\phi)=\left\{v\in H^{\sigma/2}(\mathbb{R}) : \inf_{y\in\mathbb{R}}\|v-\phi(\cdot-y)\|_{H^{\sigma/2}}<r\right\}$$

と定める.

- (fKdV) の進行波解 $\phi(x-ct)$ が**安定** (軌道安定) であるとは, 次の性質が成り立つことをいう:
  任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して, $u_0\in U_\delta(\phi)$ ならば, $u_0$ を初期値とする (fKdV) の時間大域解 $u(t)\in C([0,\infty),H^{\sigma/2}(\mathbb{R}))$ が存在して, 任意の時刻 $t\geq 0$ に対して $u(t)\in U_\varepsilon(\phi)$ が成り立つ.
- (fKdV) の進行波解 $\phi(x-ct)$ が**不安定**であるとは, 上の意味で安定でないことをいう.

(fKdV) の進行波解の安定性に関する結果の 1 つに, Bona–Souganidis–Strauss [3] による抽象論が知られている. 以下, $c>0$ に対して, 関数 $\phi_c\in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ を $(\mathrm{SP}_c)$ の基底状態とし, $d(c)=S_c(\phi_c)$ とおく.
**命題 3.1** ([3])**.** 写像 $(0,\infty)\ni c\mapsto \phi_c\in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ は $C^2$ 級と仮定する. このとき, $\partial_c^2 d(c)>0$ ならば, (fKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は安定である. また, $\partial_c^2 d(c)<0$ ならば, (fKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は不安定である.

ここで, 単純冪型非線形項をもつ (fKdV) の進行波解について考える. $c>0$ に対して, 定常問題 $(\mathrm{spSP}_c)$ の基底状態を $\psi_c$ とする. このとき, 各 $c>0$ に対して, $\psi_c$ は

$$\psi_c(x)=c^{1/(p-1)}\psi_1(c^{1/\sigma}x)$$

と表現できる. これにより $\partial_c^2 d(c)$ の符号をを容易に計算することができ, 命題 3.1 から, 任意の $c>0$ に対して, (fKdV) の進行波解 $\psi_c(x-ct)$ は $p<2\sigma+1$ のときに安定であり, $p>2\sigma+1$ のときに不安定であることがわかる. また, $\partial_c^2 d(c)=0$ となる $p=2\sigma+1$ の場合については, $\sigma=2$, $p=5$ のときに, 任意の $c>0$ に対して進行波解 $\psi_c(x-ct)$ が不安定になることが, Martel–Merle [9] により示されている. なお, 指数 $2\sigma+1$ は (fKdV) に対する $L^2$-臨界指数とよばれる.

一方, 本稿で考えている (dpfKdV) を含め, 一般の非線形項をもつ (fKdV) に対しては $\partial_c^2 d(c)$ の符号を調べることが困難であり, 非線形項の構造に合わせて個別の議論を展開する必要がある. 以下, (dpfKdV) の進行波解の安定性について, 得られた結果を述べる. なお, (dpfKdV) の初期値問題が $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ で局所適切であることを仮定する[2)].

## 3.1 安定な進行波解

**定理 3.2** (K. [6])**.** $1\leq\sigma\leq 2$, $p,q\in\mathbb{N}$, $2\leq p<q<\infty$ とする.

(I) $a=+1$ のとき
　$q$ を奇数とし, $c>0$ に対して $\phi_c$ を $(\mathrm{dpSP}_c)$ の正値偶関数の基底状態とする. このとき, $p<2\sigma+1$ ならば, ある正定数 $c_1>0$ が存在して, $c\in(0,c_1)$ ならば (dpfKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は安定である.

(II) $a=-1$ のとき
　(1) $p$ を奇数とし, $c>0$ に対して $\phi_c$ を $(\mathrm{dpSP}_c)$ の正値偶関数の基底状態とする. このとき, $q<2\sigma+1$ ならば, ある正定数 $c_2>0$ が存在して, $c\in(c_2,\infty)$ ならば (dpfKdV) の進行波解

2) この仮定は, $4/3\leq\sigma\leq 2$ のときに実際に成り立つことが, [11] により示されている.

$\phi_c(x-ct)$ は安定である.

(2) $p$ を偶数, $q$ を奇数とし, $c>0$ に対して, $\phi_c$ を $(\mathrm{dpSP}_c)$ の負値偶関数の基底状態とする. このとき, $q<2\sigma+1$ ならば, ある正定数 $c_3>0$ が存在して, $c\in(c_3,\infty)$ ならば (dpfKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は安定である.

序節で例示した Gardner 方程式 ($\sigma=2$, $a=+1$, $p=2$, $q=3$) は (I) の条件を満たすほか, これ以外にも (I) の条件を満たす例は多数存在する. 一方, (II-1), (II-2) を満たす例は限られる. (II-1) を満たす例は, $3/2<\sigma\le 2$ の下での $p=3$, $q=4$ のみであり, (II-2) を満たす例は, $1<\sigma\le 2$ の下での $p=2$, $q=3$ のみとなる.

定理 3.2 の証明は, Grillakis–Shatah–Strauss [5] の議論に従い, 次の命題を示すことに帰着される.

**命題 3.3.** 関数 $\phi_c\in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ を $(\mathrm{dpSP}_c)$ の基底状態とする. このとき, ある正定数 $C>0$ が存在して, $(v,\phi_c)_{L^2}=(v,\partial_x\phi_c)_{L^2}=0$ なる任意の $v\in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}}(S_c''(\phi_c)v)v\,dx\ge C\|v\|_{H^{\sigma/2}}^2$$

が成り立つ.

単純冪型非線形項をもつ定常問題 $(\mathrm{spSP}_c)$ の基底状態 $\psi_c$ に対しては, 任意の $c>0$ に対して, 命題 3.3 と同様の主張が成り立つことが知られている. また, 定理 3.2 の条件 (I) の下で, 定常問題 $(\mathrm{dpSP}_c)$ の基底状態 $\phi_c$ に対して,

$$\phi_c(x)=c^{1/(p-1)}\tilde{\phi}(c^{1/\sigma}x)$$

なるスケーリングを施して得られる関数 $\tilde{\phi_c}$ は, $c\to+0$ のときに $\psi_1$ に $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上で強収束する. また, 条件 (II-1), (II-2) の下では,

$$\phi_c(x)=c^{1/(q-1)}\breve{\phi}_c(c^{1/\sigma}x)$$

なるスケーリングにより得られる関数 $\breve{\phi}_c$ が, $c\to+\infty$ のときに $\psi_1$ に $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上で強収束する. これらの収束性を用いた近似の議論により, 条件 (I) の下では十分小さい $c>0$ に対して, 条件 (II-1), (II-2) の下では十分大きい $c>0$ に対して命題 3.3 を証明することができる. なお, 命題 3.3 や上述の基底状態の収束性を示す際には, 補題 2.2 で述べた基底状態の変分的特徴付が重要な役割を果たす.

## 3.2 不安定な進行波解

**定理 3.4.** $1\le\sigma\le 2$, $p,q\in\mathbb{N}$, $2\le p<q<\infty$ とする.

(I) $a=+1$ のとき

$q$ は奇数とし, $c>0$ に対して $\phi_c$ を $(\mathrm{dpSP}_c)$ の正値偶関数の基底状態とする.

(1) $2\sigma+1\le p<q$ ならば, 任意の $c>0$ に対して, (dpfKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は不安定である.

(2) $p<2\sigma+1<q$ ならば, ある正定数 $c_4>0$ が存在して, $c\in(c_4,\infty)$ ならば (dpfKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は不安定である.

(II) $a=-1$ のときに

(1) $p$ は奇数とし, $c>0$ に対して $\phi_c$ を $(\mathrm{dpSP}_c)$ の正値偶関数の基底状態とする.

(i) $p<q=2\sigma+1$ ならば, 任意の $c>0$ に対して, (dpfKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は不安定である.

(ii) $p \leq 2\sigma+1 < q$ ならば, 任意の $c > 0$ に対して, (dpfKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は不安定である.

(iii) $2\sigma+1 < p < q$ ならば, ある正定数 $c_5$ が存在して, $c \in (c_5, \infty)$ ならば (dpfKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は不安定である.

(2) $p$ は偶数, $q$ は奇数とし, $c > 0$ に対して, $\phi_c$ を $(\mathrm{dpSP}_c)$ の負値偶関数の基底状態とする.

(i) $2\sigma+1 \leq p < q$ ならば, 任意の $c > 0$ に対して, (dpfKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は不安定である.

(ii) $p < 2\sigma+1 < q$ ならば, ある正定数 $c_6 > 0$ が存在して, $c \in (c_6, \infty)$ ならば (dpfKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は不安定である.

定理 3.4 の証明は, 次の命題を示すことに帰着される.

**命題 3.5.** $\phi_c$ を $(\mathrm{dpSP}_c)$ の正値偶関数の基底状態とする. また, $\lambda > 0$ に対して, $\phi_c^\lambda(x) = \lambda^{1/2}\phi_c(\lambda x)$ とおく[3]. このとき, $\partial_\lambda^2 S_c(\phi_c^\lambda)\big|_{\lambda=1} < 0$ ならば, (dpfKdV) の進行波解 $\phi_c(x-ct)$ は不安定である.

命題 3.5 は, 進行波解が安定であることを仮定し矛盾を導くことで示すことができる. 証明の方針は以下の通りである.

まず, (dpfKdV) の解 $u(t)$ に対して, 基底状態 $\phi_c$ から得られる関数 $\Lambda\phi_c = \partial_\lambda \phi_c^\lambda\big|_{\lambda=1}$ を用い, 時刻 $t$ について一様有界となる関数 $J(t)$ を構成する. 一方, 絶対値が十分小さい $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $u_0^\lambda = \phi_c + \lambda\Lambda\phi_c$ を初期値とする (dpfKdV) の解 $u^\lambda(t)$ を考える. このとき, $u^\lambda(t)$ に対して構成された関数 $J(t)$ の絶対値が時刻無限大で発散することを, 基底状態 $\phi_c$ に与えられた変分的特徴付けから導くことができる. しかし, これは関数 $J(t)$ の時刻 $t$ に関する一様有界性に反する.

なお, 命題 3.5 の証明で用いた関数 $J(t)$ は, Riaño–Roudenko [12] で導入されたものを参考に, 基底状態の変分的な性質に合わせて修正を加えたものである. 関数 $J(t)$ の具体的な形を述べるには多くの準備が必要となるため, ここでは省略する.

# 4 おわりに

定常問題 $(\mathrm{dpSP}_c)$ については, 第 2 節で紹介した基底状態の他に, 基底状態よりもエネルギー準位の高い非自明解 (励起状態) が存在する場合や, 基底状態か励起状態かを判別できていない非自明解が存在する場合があることが, 著者の研究 [7] により明らかになっている. これらの非自明解は基底状態と比べて変分的な性質が悪いため, 第 3 節および第 4 節で述べた方法で進行波解の安定性を解析することは難しい. これらの進行波解に対する安定性の解析は今後の課題の 1 つである.

また, 本稿では (dpfKdV) の進行波解について考察したが, 非線形項に含まれる $u^q$ の項の符号を逆にした KdV 型方程式

$$\partial_t u + \partial_x(au^p - u^q) - \partial_x D_x^\sigma u = 0 \tag{3}$$

の進行波解についても考察すべきである. しかし, (3) に含まれる非線形項の構造が悪く第 2 章で述べた議論を適用することができないため, (3) から導かれる定常問題に対する基底状態の存在性については今のところわかっていない.

3) $L^2$-ノルム不変なスケーリングである. すなわち, 任意の $\lambda > 0$ に対して $\|\phi_c^\lambda\|_{L^2} = \|\phi_c\|_{L^2}$ が成り立つ.

## 参考文献


[1] C. J. Amick and J. F. Toland, *Uniqueness of Benjamin's solitary-wave solution of the Benjamin-Ono equation*, IMA J. Appl. Math. **46** (1991), no. 1-2, 21–28.

[2] T. B. Benjamin, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid Mech. **29** (1967), no. 3, 559–592.

[3] J. L. Bona, P. E. Souganidis, and W. A. Strauss, *Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **411** (1987), no. 1841, 395–412.

[4] R. L. Frank and E. Lenzmann, *Uniqueness of non-linear ground states for fractional Laplacians in* $\mathbb{R}$, Acta Math. **210** (2013), no. 2, 261–318.

[5] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I*, J. Funct. Anal. **74** (1987), no. 1, 160–197.

[6] K. Kokubu, *Stability of travelling waves to Korteweg–de Vries type equations with fractional dispersion*, to apperar, arXiv:2407.00321v2.

[7] ———, *On solitary wave solutions to dispersive equations with double power nonlinearities*, Kodai Math. J. **47** (2024), no. 3, 301–322.

[8] E. H. Lieb, *On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains*, Invent. Math. **74** (1983), no. 3, 441–448.

[9] Y. Martel and F. Merle, *Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), no. 1, 74–123.

[10] R. M. Miura, C. S. Gardner, and M. D. Kruskal, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion*, J. Math. Phys. **9** (1968), 1204–1209.

[11] L. Molinet and T. Tanaka, *Improved bilinear Strichartz estimates with application to the well-posedness of periodic generalized KdV type equations*, preprint, arXiv:2207.08725.

[12] O. Riaño and S. Roudenko, *Stability and instability of solitary waves in fractional generalized kdv equation in all dimensions*, preprint, arXiv:2210.09159.

[13] M. I. Weinstein, *Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation*, Comm. Partial Differential Equations **12** (1987), no. 10, 1133–1173.