(φ, Γ)-modules over relatively discrete algebras

三神 雄太郎 *
東京大学大学院数理科学研究科
Yutaro Mikami
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

概要

筆者の論文 [Mik25b] においては，近年 Clausen-Scholze によって導入された凝縮数学 (condensed mathematics）が至る所で使われている．しかし，凝縮数学について日本語で解説している文献は極めて少ない．そこで，本稿では凝縮数学の p 進関数解析への応用の概説を行う．その後，[Mik25b] においてそれらがどのように使われているかを解説する．

1　導入

数論において，p 進関数解析は重要な道具の一つである．一方で，位相 $\mathbb{Q}_p$ 加群のなす圏は，通常の加群（つまり位相の入っていない加群）のなす圏と比べて圏論的に良い性質を持っておらず，余核や帰納極限，テンソル積などは慎重に取り扱う必要がある．近年，これらの問題を解決するために Clausen-Scholze によって凝縮数学が提唱された ([Sch19])．凝縮数学を用いることで位相 $\mathbb{Q}_p$ 加群をより代数的に扱うことができるようになり，結果として上で述べた問題たちはおおよそ解決する．本稿の前半では，凝縮数学を用いて位相 $\mathbb{Q}_p$ 加群をどのように扱うかを概説する．本稿の後半では，応用として [Mik25b] の結果を概説する．本稿では紹介しきれなかったことが多くある．例えば凝縮加群の導来圏がどのように記述されるかといったことや，また凝縮数学を用いてリジッド幾何学をする際に必須になる概念である解析環 (analytic ring) については説明をしない．これらについての詳しい解説は [Sch19, Sch20, CS22, And21, Man22, RJRC22] を見よ．

* y-mikmi@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

2 凝縮数学とソリッド加群

この章では凝縮数学を用いて p 進関数解析を行う際に最も基本的になるソリッド加群 (solid module) という概念を導入する．詳しい解説は [Sch19, RJRC22] を見よ．Prof で副有限空間 (profinite space) のなす圏を表す．さらにこの圏の Grothendieck 位相を，Prof における射の族 $\{f_i\colon X_i \to X\}_{i=1}^n$ に対し，$\cup f_i(X_i) = X$ となるとき $\{f_i\colon X_i \to X\}_{i=1}^n$ が被覆であるとして定める．

定義 2.1. 凝縮集合とは景 Prof 上の層のことである．同様に凝縮環を景 Prof 上の環の層として定める．また通常の層の理論と同様にして，凝縮環 A に対して，凝縮 A 加群が定まる．凝縮 A 加群のなす圏を $\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{cond}}$ と書く．このときテンソル積 $-\otimes_A -$ と，内部 hom (internal hom) $\underline{\mathrm{Hom}}_A(-,-)$ が層の一般論から定まる．

注意 2.2. この定義は厳密には [Sch19] における定義と異なる．[Sch19] においては，Prof が小さい圏になるように，考える副有限空間のサイズを制限している．ここではこの問題には深く立ち入らないことにする．

命題 2.3 ([Sch19, Proposition 1.7])**.** コンパクト生成な T_1 位相空間 X（つまり X の点は全て閉点になる）に対して，凝縮集合 $\underline{X}$ を $\underline{X}(S) = C(S, X)$ と定める．ただし $C(S, X)$ は S から X への連続写像全体のなす集合である．これはコンパクト生成な T_1 位相空間のなす圏から凝縮集合のなす圏への忠実充満関手を定める．

証明. 証明は省略する．証明の鍵は，任意のコンパクト空間 Y に対して，Y を離散集合だと思って Stone-Čech コンパクト化をして得られる位相空間 $\beta(Y)$ が副有限集合になり，かつ全射連続写像 $\beta(Y) \to Y$ が存在することである． □

注意 2.4. しばしば下線を省略して，コンパクト生成な位相空間 X から定まる凝縮集合も X と書く．本稿では混乱を避けるため，このような省略はしない．

例 2.5. $\mathbb{Z}$ に離散位相を入れて，上の構成を考えることで凝縮環 $\underline{\mathbb{Z}}$ が定まる．凝縮 abel 群は，凝縮環 $\underline{\mathbb{Z}}$ 上の加群と同値な概念である．(abel 群と $\mathbb{Z}$ 加群の関係と同じである)．

例 2.6. 通常の abel 群 M を考える．このとき M に離散位相を入れて考えることで，凝縮 abel 群 $\underline{M}$ が定まる．これより abel 群の圏 Ab から凝縮 abel 群の圏 Cond(Ab) への関手 $M \mapsto \underline{M}$ を得る．この関手は関手 $\mathrm{Cond(Ab)} \to \mathrm{Ab};\ M \mapsto M(*)$ の左随伴

関手である．特に関手 $M \mapsto \underline{M}$ は余極限と可換である．

例 2.7. 位相環 $\mathbb{Q}_p$ から凝縮環 $\underline{\mathbb{Q}_p}$ が定まる．また Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群 V から，凝縮 $\underline{\mathbb{Q}_p}$ 加群 $\underline{V}$ が定まる．この対応は，Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群の圏から凝縮 $\underline{\mathbb{Q}_p}$ 加群の圏 $\mathrm{Mod}_{\underline{\mathbb{Q}_p}}^{\mathrm{cond}}$ への忠実充満関手を定める．

凝縮 abel 群の全射について考える．

命題 2.8. $\cdots \twoheadrightarrow M_n \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow M_1 \twoheadrightarrow M_0$，$\cdots \twoheadrightarrow N_n \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow N_1 \twoheadrightarrow N_0$ を abel 群の全射な射影系とする．$M = \varprojlim_n M_n$，$N = \varprojlim_n N_n$ とし，それぞれに射影極限位相を入れる（ただし各 M_n，N_n には離散位相を入れる）．このとき連続全射開写像 $f\colon M \to N$ に対して，$\underline{f}\colon \underline{M} \to \underline{N}$ は凝縮 abel 群の全射になる．より強く，任意の副有限空間 S に対して，$\underline{M}(S) \to \underline{N}(S)$ が全射になる．

証明. $I_n = \mathrm{Ker}(M \to M_n)$ とおく．このとき I_n の f による像 J_n は N の開部分群になる．さらに f の連続性より，J_n は 0 の基本近傍系をなす．さて副有限空間 S と連続写像 $g\colon S \to N$ をとる．まず連続写像 $h_1\colon S \to M$ を $\mathrm{Im}(f \circ h_1 - g) \subset J_1$ となるように取れる．すると連続写像 $h_2\colon S \to I_1$ を $\mathrm{Im}(f \circ h_2 + f \circ h_1 - g) \subset J_2$ となるように取れる．以下これを繰り返し，連続写像 $h_n\colon S \to I_{n-1}$ を得る．このとき $h = \sum_n h_n\colon S \to M$ という連続写像が定まり，これは $f \circ h = g$ を満たす． □

例 2.9. V，W を Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群，$f\colon V \to W$ を連続全射 $\mathbb{Q}_p$ 線型写像とする．このとき開写像定理より，$\underline{f}\colon \underline{V} \to \underline{W}$ は凝縮 $\underline{\mathbb{Q}_p}$ 加群の全射となる．

A を凝縮環とする．$\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{cond}}$ の射影対象を求めたい．

定義 2.10. 副有限空間 S が extremally disconnected space であるとは，任意の副有限空間 T と全射連続写像 $f\colon T \to S$ に対して，連続写像 $g\colon S \to T$ であって $f \circ g = \mathrm{id}_S$ となるものが存在することをいう．Extremally disconnected space 全体のなす圏を Ext と書く．

例 2.11. 集合 T に対し，T を離散空間とみなし Stone-Čech コンパクト化して得られる空間 $\beta(T)$ は extremally disconnected space になる．

Extremally disconnected space の定義から直ちに次の補題を得る．

補題 2.12. Extremally disconnected space S に対して，関手 $\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{cond}} \to \mathrm{Ab}$; $M \mapsto M(S)$ は完全関手である．

定義 2.13. 副有限空間 S に対して，前層 $T \mapsto A(T)^{\oplus C(T,S)}$ の層化を $A[S]$ と書く．

命題 2.14.
1. 副有限空間 S と凝縮 A 加群 M に対して，自然な同型 $\mathrm{Hom}_A(A[S], M) \cong M(S)$ が存在する．特に補題 2.12 より S が extremally disconnected space の場合，$A[S]$ は $\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{cond}}$ の射影対象となる．
2. 凝縮 A 加群の族 $\{A[S]\}$（S は extremally disconnected space 全体を動く）は $\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{cond}}$ の生成集合である．つまり，凝縮 A 加群の射 $f \colon M \to N$ に対し，任意の extremally disconnected space S に対し $\mathrm{Hom}_A(A[S], M) \to \mathrm{Hom}_A(A[S], N)$ が同型になるならば，f も同型になる．
3. 副有限空間 S_1，S_2 に対して，自然な同型 $A[S_1] \otimes_A A[S_2] \cong A[S_1 \times S_2]$ がある．

証明. (1) は $A[S]$ の定義から直ちに従う．(2) は任意の副有限空間 T に対して，$\beta(T) \to T$ という extremally disconnected space $\beta(T)$ からの全射が存在することから従う．(3) は前層 $T \mapsto A(T)^{\oplus C(T,S_i)}$ $(i = 1, 2)$ の前層としてのテンソル積が $T \mapsto A(T)^{\oplus C(T,S_1 \times S_2)}$ になることから従う． $\square$

さて位相 $\mathbb{Q}_p$ 加群の問題に戻る．導入で述べた問題のうち，余核や余極限に関する問題は，凝縮 $\underline{\mathbb{Q}_p}$ 加群の圏 $\mathrm{Mod}_{\underline{\mathbb{Q}_p}}^{\mathrm{cond}}$ における余核や余極限を考えることで解決する．しかしテンソル積についてはまだ問題が残っている．圏 $\mathrm{Mod}_{\underline{\mathbb{Q}_p}}^{\mathrm{cond}}$ におけるテンソル積は欲しいものにならないのである．この問題を解決するためにソリッド加群というものを導入する．

定義 2.15. 副有限空間 S に対して，凝縮 $\underline{\mathbb{Z}}$ 加群 $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$ を，S を有限集合の射影極限 $S = \varprojlim_\lambda S_\lambda$ として表し，$\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S] = \varprojlim_\lambda \underline{\mathbb{Z}}[S_\lambda]$ と定める．これは $S = \varprojlim_\lambda S_\lambda$ という表記の選び方によらずに定まる．また構成より自然な射 $\underline{\mathbb{Z}}[S] \to \mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$ がある．

注意 2.16. $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$ は最近では $\mathbb{Z}_{\square}[S]$ と書かれることも多い．ここでは，[Sch19] での記法に合わせた．

定義 2.17. 凝縮 abel 群 M がソリッドであるとは，任意の extremally disconnected space S に対して $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S], M) \to \mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Z}}[S], M)$ が同型になることをいう．ソリッド凝縮 abel 群のことを $\mathbb{Z}_{\blacksquare}$ 加群ともいう．$\mathbb{Z}_{\blacksquare}$ 加群のなす圏を $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}$ と書く．また凝縮環 A に対して，凝縮 A 加群 M がソリッドであるとは，M が凝縮 abel 群としてソリッドになることをいう．ソリッド凝縮 A 加群のことを $A_{\blacksquare}$ 加群ともいう．これらのなす圏を $\mathrm{Mod}_{A_{\blacksquare}}$ と書く．

注意 2.18. $A_\blacksquare$ 加群という言い方はやや非標準的である．正確に書くならば $(A,\mathbb{Z})_\blacksquare$ 加群と書くべきであるが，ここでは略記を採用している．

次の定理は，凝縮数学の基礎理論の中で最も難しいものの一つである．ここでは証明をせず結果のみ使う．証明は [Sch19] の 5,6 章を見よ．

定理 2.19.

1. 部分圏 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_\blacksquare} \subset \mathrm{Mod}_{\underline{\mathbb{Z}}}^{\mathrm{cond}}$ は abel 部分圏になる．さらには，極限，余極限，拡大について閉じている．
2. 副有限空間 S に対して，$\mathbb{Z}_\blacksquare[S]$ は $\mathbb{Z}_\blacksquare$ 加群になる．また $\mathbb{Z}_\blacksquare[S]$ は abel 圏 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_\blacksquare}$ の射影対象になる．
3. 凝縮 $\mathbb{Z}_\blacksquare$ 加群の族 $\{\mathbb{Z}_\blacksquare[S]\}$（$S$ は extremally disconnected space 全体を動く）は $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_\blacksquare}$ の生成集合になる．
4. 包含関手 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_\blacksquare} \to \mathrm{Mod}_{\underline{\mathbb{Z}}}^{\mathrm{cond}}$ は左随伴関手
$$- \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}_\blacksquare \colon \mathrm{Mod}_{\underline{\mathbb{Z}}}^{\mathrm{cond}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_\blacksquare}$$
を持つ．この関手をソリッド化関手という．このとき副有限空間 S に対して，自然な同型 $\underline{\mathbb{Z}}[S] \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}_\blacksquare \cong \mathbb{Z}_\blacksquare[S]$ が存在する．
5. 圏 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_\blacksquare}$ には次を満たすテンソル積 $- \otimes_{\mathbb{Z}_\blacksquare} -$ がただひとつ定まる．
   - 任意の凝縮 abel 群 M，N に対して，自然な同型
   $$(M \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}_\blacksquare) \otimes_{\mathbb{Z}_\blacksquare} (N \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}_\blacksquare) \cong (M \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} N) \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}_\blacksquare$$
   が存在する．

   特に副有限空間 S_1，S_2 に対して，$\mathbb{Z}_\blacksquare[S_1] \otimes_{\mathbb{Z}_\blacksquare} \mathbb{Z}_\blacksquare[S_2] \cong \mathbb{Z}_\blacksquare[S_1 \times S_2]$ となる．

注意 2.20. ソリッド $\mathbb{Z}_\blacksquare$ 加群 M，N に対し，$M \otimes_{\mathbb{Z}_\blacksquare} N \cong (M \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} N) \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}_\blacksquare$ となる．また $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbb{Z}}}(M,N)$ は再びソリッドになる．

定義 2.21. ソリッド凝縮環とは凝縮環 A であって，凝縮 abel 群としてソリッドになるものを言う．このとき A は対称モノイダル圏 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_\blacksquare}$ の環対象と思える．また $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_\blacksquare}$ における A 加群のなす圏は，$\mathrm{Mod}_{A_\blacksquare}$ と圏同値になる．それゆえ $\mathrm{Mod}_{A_\blacksquare}$ にはテンソル積が定まる．これを $- \otimes_{A_\blacksquare} -$ と書く．

注意 2.22. ソリッド凝縮環 A をとる．このとき凝縮 A 加群 M に対し，M のソリッド化 $M \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}_\blacksquare$ には自然に A 加群の構造が定まる（A 加群の構造を定める射 $A \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} M \to M$ のソリッド化を考える）．これを用いると，$A_\blacksquare$ 加群 M，N に対して，$M \otimes_{A_\blacksquare} N$ は $M \otimes_A N$ のソリッド化として計算できることがわかる．

このテンソル積がなぜ良いのかを解説する．そのためにまず $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$ の別の記述を与える．

定理 2.23. 副有限空間 S に対して，ある集合 I が存在し，（非標準的な）同型 $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S] \cong \prod_I \underline{\mathbb{Z}}$ が存在する．

証明. S を有限集合の射影極限 $S = \varprojlim_\lambda S_\lambda$ として表す．また位相空間 T に対して，$C(T,\mathbb{Z})$ で T から離散空間 $\mathbb{Z}$ への連続関数のなす abel 群を表す．$C(T,\mathbb{Z})$ には離散位相を入れる．このとき凝縮 abel 群の同型

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S] &\cong \varprojlim_\lambda \underline{\mathbb{Z}}[S_\lambda] \\
&\cong \varprojlim_\lambda \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbb{Z}}}(\underline{C(S_\lambda,\mathbb{Z})},\mathbb{Z}) \\
&\cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbb{Z}}}(\varinjlim_\lambda \underline{C(S_\lambda,\mathbb{Z})},\mathbb{Z}) \\
&\cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbb{Z}}}(\underline{C(S,\mathbb{Z})},\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

が存在する．これより，$C(S,\mathbb{Z})$ が自由 $\mathbb{Z}$ 加群になることを証明すればよい（注意 2.6 より，$C(S,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus I}$ ならば，$\underline{C(S,\mathbb{Z})} \cong (\underline{\mathbb{Z}})^{\oplus I}$ となることに注意せよ）．これは [Sch19, Theorem 5.4] より従う． $\square$

系 2.24. 任意の集合 J に対して，$\prod_J \underline{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}_{\blacksquare}$ 加群になる．さらには abel 圏 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}$ の射影対象になる．

証明. 副有限集合 S，集合 I，同型 $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S] \cong \prod_I \underline{\mathbb{Z}}$ をとる．このとき S の濃度を十分大きくとることで，I の濃度は J の濃度以上としてよい．すると $\prod_J \underline{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$ の直和因子になるので示された． $\square$

定理 2.25. 集合 I，J に対して自然な射 $\prod_I \underline{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}} \prod_J \underline{\mathbb{Z}} \to \prod_{I\times J} \underline{\mathbb{Z}}$ は同型になる．

証明. 証明のアイデアのみ述べる．詳しくは [Sch19, Proposition 6.3] を見よ．まず，副有限集合 S，T であって $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S] \cong \prod_I \underline{\mathbb{Z}}$，$\mathbb{Z}_{\blacksquare}[T] \cong \prod_J \underline{\mathbb{Z}}$ となる場合に帰着できる．．このとき $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S] \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}} \mathbb{Z}_{\blacksquare}[T] \cong \mathbb{Z}_{\blacksquare}[S \times T]$ となる．一方で，$\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S\times T] \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbb{Z}}}(\underline{C(S\times T,\mathbb{Z})},\mathbb{Z})$ と，$C(S,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} C(T,\mathbb{Z}) \cong C(S\times T,\mathbb{Z})$ より，$\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S\times T] \cong \prod_{I\times J} \underline{\mathbb{Z}}$ を得る．以上で示された． $\square$

3　ソリッド $\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}$ 加群

以下ではソリッド凝縮 $\underline{\mathbb{Z}_p}$ 加群，ソリッド凝縮 $\underline{\mathbb{Q}_p}$ 加群を $\mathbb{Z}_{p,\blacksquare}$ 加群，$\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}$ 加群といい，これらのなす圏を $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_{p,\blacksquare}}$，$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}}$ と書く．これらの圏におけるテンソル積を計算したい．

補題 3.1. Abel 群の完全列

$$0 \to \mathbb{Z}[[T]] \xrightarrow{T-p} \mathbb{Z}[[T]] \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

は凝縮 abel 群の完全列

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}[[T]]} \xrightarrow{T-p} \underline{\mathbb{Z}[[T]]} \to \underline{\mathbb{Z}_p} \to 0$$

を定める．ただし $\mathbb{Z}[[T]]$ には T 進位相を入れている．

証明. $\times(T-p)\colon \mathbb{Z}[[T]] \to \mathbb{Z}[[T]]$ が閉埋込になっていることと，命題 2.8 より容易に従う． □

補題 3.2. $(0 \to L_i \to M_i \to N_i \to 0)_{i\in I}$ を凝縮 abel 群の完全列の族とする．このときこれらの直積

$$0 \to \prod_{i\in I} L_i \to \prod_{i\in I} M_i \to \prod_{i\in I} N_i \to 0$$

も完全列になる．

証明. $\prod_{i\in I} M_i \to \prod_{i\in I} N_i$ の全射性が問題である．これは副有限空間 S と副有限空間から S への連続全射写像の族 $(p_i\colon S_i \to S)_{i\in I}$ に対して，ある副有限空間 T と連続写像 $T \to S$ であって，$T \to S$ が $T \to S_i \xrightarrow{p_i} S$ と分解するようなものが取れるのでよい (例えば $T = \prod_{i\in I} S_i$ とすればよい)． □

命題 3.3. 集合 I に対して，自然な射

$$\underline{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_\blacksquare} \prod_I \underline{\mathbb{Z}} \to \prod_I \underline{\mathbb{Z}_p}$$

は同型になる．

証明. 定理 2.25 と補題 3.1 より完全列

$$\prod_I \underline{\mathbb{Z}[[T]]} \xrightarrow{T-p} \prod_I \underline{\mathbb{Z}[[T]]} \to \underline{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_\blacksquare} \prod_I \underline{\mathbb{Z}} \to 0$$

を得る．一方で補題 3.2 より，

$$0 \to \prod_I \underline{\mathbb{Z}[[T]]} \xrightarrow{T-p} \prod_I \underline{\mathbb{Z}[[T]]} \to \prod_I \underline{\mathbb{Z}_p} \to 0$$

という完全列も得られる．これより主張を得る． □

系 3.4. 集合 I と J に対して自然な射 $\prod_I \underline{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_{p,\blacksquare}} \prod_J \underline{\mathbb{Z}_p} \to \prod_{I\times J} \underline{\mathbb{Z}_p}$ は同型になる．

証明. 定理 2.25 と，命題 3.3 より従う． □

さて集合 I に対して，$\widehat{\oplus}_I \mathbb{Z}_p$ で $\oplus_I \mathbb{Z}_p$ を p 進完備化したものを表す．また I が可算集合のとき，$\Sigma_I = \{(a_i)_{i\in I} \in \prod_I \mathbb{Z}_{\leq 0} \mid$ 各 $n \geq 0$ に対して $a_i \leq n$ となる i は高々有限個 $\}$ とおく．また成分ごとの順序によって，Σ_I を順序集合とみなす．すると Σ_I は有向集合になる．

次の二つの補題は簡単に証明できる．

補題 3.5. I を可算集合とする．このとき自然な写像 $\varinjlim_{(a_i)\in\Sigma_I} \prod_{i\in I} p^{a_i} \underline{\mathbb{Z}_p} \to \underline{\widehat{\oplus}_I \mathbb{Z}_p}$ は同型になる．特に $\underline{\widehat{\oplus}_I \mathbb{Z}_p}$ は $\mathbb{Z}_{p,\blacksquare}$ 加群になる（$\mathbb{Z}_{p,\blacksquare}$ 加群 $\prod_{i\in I} p^{a_i} \underline{\mathbb{Z}_p}$ の余極限として書けるため）．

補題 3.6. 可算集合 I，J に対して，写像 $\Sigma_I \times \Sigma_J \to \Sigma_{I\times J}$; $((a_i)_{i\in I}, (b_j)_{j\in J}) \mapsto (a_i + b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ は共終写像 (cofinal map) になる．

これらと系 3.4 より次を得る．

定理 3.7. 可算集合 I，J に対して，自然な射

$$\underline{\widehat{\oplus}_I \mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_{p,\blacksquare}} \underline{\widehat{\oplus}_J \mathbb{Z}_p} \to \underline{\widehat{\oplus}_{I\times J} \mathbb{Z}_p}$$

は同型になる．

注意 3.8. 一般に集合 I に対して $\underline{\widehat{\oplus}_I \mathbb{Z}_p} \cong \varinjlim_{J\subset I} \underline{\widehat{\oplus}_J \mathbb{Z}_p}$ が成立する．ただし J は可算な部分集合全体を動く．これを用いることで，定理 3.7 における可算集合という仮定を外すことができる．

次に $\mathbb{Q}_p$ を考える．集合 I に対して，$\widehat{\oplus}_I \mathbb{Q}_p = \widehat{\oplus}_I \mathbb{Z}_p[1/p]$ とおく．位相は $\widehat{\oplus}_I \mathbb{Z}_p \subset \widehat{\oplus}_I \mathbb{Q}_p$ が開集合になるように定める．これは Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群になる．逆に任意の Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群 V に対してある集合 I が存在して，$V \cong \widehat{\oplus}_I \mathbb{Q}_p$ となる．

補題 3.9. 集合 I に対して，$\underline{\widehat{\bigoplus}_I \mathbb{Q}_p}$ はソリッドである（特に任意の Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群 V に対して，$\underline{V}$ はソリッドである）．さらに自然な射 $\underline{\widehat{\bigoplus}_I \mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_{p,\blacksquare}} \underline{\mathbb{Q}_p} \to \underline{\widehat{\bigoplus}_I \mathbb{Q}_p}$ は同型になる．

証明. まず凝縮 abel 群として，$\underline{\mathbb{Q}_p} \cong \varinjlim(\underline{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{p} \underline{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{p} \cdots)$ となることに注意する．よって一般に $\mathbb{Z}_{p,\blacksquare}$ 加群 V に対して，$V \otimes_{\underline{\mathbb{Z}_p}} \underline{\mathbb{Q}_p} \cong \varinjlim(V \xrightarrow{p} V \xrightarrow{p} \cdots)$ となる．右辺はソリッド凝縮 abel 群の余極限ゆえソリッドである．これより $V \otimes_{\underline{\mathbb{Z}_p}} \underline{\mathbb{Q}_p} \cong V \otimes_{\mathbb{Z}_{p,\blacksquare}} \underline{\mathbb{Q}_p}$ を得る．一方で，$\underline{\widehat{\bigoplus}_I \mathbb{Q}_p} \cong \varinjlim(\underline{\widehat{\bigoplus}_I \mathbb{Z}_p} \xrightarrow{p} \underline{\widehat{\bigoplus}_I \mathbb{Z}_p} \xrightarrow{p} \cdots)$ という同型がある．以上より主張を得る． □

この補題と定理 3.7（とその後の注意）より次を得る．

定理 3.10. 集合 I，J に対して，自然な射

$$\underline{\widehat{\bigoplus}_I \mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_{p,\blacksquare}} \underline{\widehat{\bigoplus}_J \mathbb{Q}_p} \to \underline{\widehat{\bigoplus}_{I \times J} \mathbb{Q}_p}$$

は同型になる．

系 3.11. Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群 V，W に対し，自然な射

$$\underline{V} \otimes_{\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}} \underline{W} \to \underline{V \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}} W}$$

は同型である．ただし $V \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}} W$ は Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群の完備テンソル積である．

例 3.12. S を副有限空間，V を Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群とする．このとき S 上の V に値を持つ関数のなす $\mathbb{Q}_p$ 加群を $C(S, V)$ と書く．これは上限ノルム (sup norm) により，再び Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群になる．対応する $\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}$ 加群 $\underline{C(S, V)}$ は，$T \mapsto C(S \times T, V)$ で与えられる．よって $\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}$ 加群 $\underline{C(S, V)}$ は $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathbb{Q}_p}}(\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}[S], V)$ と同型である．

次の命題は，次の章で用いる．

命題 3.13. Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群 V から定まる $\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}$ 加群 $\underline{V}$ は平坦である．つまり関手 $- \otimes_{\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}} \underline{V} \colon \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}}$ は完全関手になる．

証明. 証明は略．[RJRC22, Lemma 3.21] を見よ． □

4 降下理論への応用

この章では前の章までの結果が [Mik25b] でどのように使われているかを概説する．以下 K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体，$K_\infty = K(\zeta_{p^\infty})$ を p 進円分拡大体，$\overline{K}$ を K の代数閉包

とする．さらに $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$, $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ とおく．$\pi^\flat \in \widehat{K}_\infty^\flat$ を $(\pi^\flat)^\#/p \in \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}^\times$ となるようにとる．さて $Y_{\overline{K}} = \mathrm{Spa}(W(\mathcal{O}_{\overline{K}})) \setminus \{p[\pi^\flat]\}$ と adic 空間を定める．これには G_K が作用し, さらには Frobenius 自己同型 $\varphi\colon Y_{\overline{K}} \to Y_{\overline{K}}$ も定まる．$X_{\overline{K}} = Y_{\overline{K}}/\varphi^{\mathbb{Z}}$ と adic 空間を定める．これを Fargues-Fontaine 曲線という．$X_{\overline{K}}$ にも G_K が作用する．$\overline{K}$ の代わりに K_∞ を用いて同様の構成をすることにより，X_{K_∞} を定めることができる．これには Γ_K が作用する．

（連続）G_K 同変な $X_{\overline{K}}$ 上のベクトル束のなす圏を $\mathrm{Vect}_{X_{\overline{K}}}^{G_K}$，$\Gamma_K$ 同変な X_{K_∞} 上のベクトル束のなす圏を $\mathrm{Vect}_{X_{K_\infty}}^{\Gamma_K}$ とおく．[FF18] で調べられているように，G_K の有限次元 $\mathbb{Q}_p$ 線型空間への表現のなす圏 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ は $\mathrm{Vect}_{X_{\overline{K}}}^{G_K}$ に埋め込むことができる．それゆえ G_K 同変な $X_{\overline{K}}$ 上のベクトル束は G_K の p 進表現の一般化と呼べるものになっており，p 進 Hodge 理論で重要な対象である．この章の目標は次の定理の証明を概略することである．

定理 4.1. $X_{\overline{K}} \to X_{K_\infty}$ に沿った引き戻しは，圏同値 $\mathrm{Vect}_{X_{K_\infty}}^{\Gamma_K} \simeq \mathrm{Vect}_{X_{\overline{K}}}^{G_K}$ を誘導する．

この定理自体は [FF18] においてすでに示されているが，凝縮数学を用いて定式化をすることで，$X_{\overline{K}} \to X_{K_\infty}$ を底変換したものに対してもこの定理を一般化できるようになるというメリットがある．この一般化は p 進 Galois 表現の族について考えるときに有用になる．ここでは簡単のため，底変換をしていない場合にのみ解説する．詳しくは [Mik25b] を見よ．

正の整数 $r < s$ に対して，$\widetilde{B}_{\overline{K}}^{[r,s]} = W(\mathcal{O}_{\overline{K}})\langle[\pi^\flat]/p^r, p^s/[\pi^\flat]\rangle[1/p]$，$\widetilde{B}_{K_\infty}^{[r,s]} = W(\mathcal{O}_{K_\infty})\langle[\pi^\flat]/p^r, p^s/[\pi^\flat]\rangle[1/p]$ とおく．$\mathrm{Spa}\,\widetilde{B}_{\overline{K}}^{[1,p]}$ の開部分空間 $\mathrm{Spa}\,\widetilde{B}_{\overline{K}}^{[1,1]}$, $\mathrm{Spa}\,\widetilde{B}_{\overline{K}}^{[p,p]}$ を Frobenius 射 $\varphi\colon \mathrm{Spa}\,\widetilde{B}_{\overline{K}}^{[1,1]} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spa}\,\widetilde{B}_{\overline{K}}^{[p,p]}$ を用いて同一視することで，$X_{\overline{K}}$ は得られる．同様の表記が X_{K_∞} に対しても存在する．これより次を示せば十分である．

定理 4.2. 係数拡大関手 $\otimes_{\widetilde{B}_{K_\infty}^{[r,s]}} \widetilde{B}_{\overline{K}}^{[r,s]}$ は圏同値 $\mathrm{Vect}_{\widetilde{B}_{K_\infty}^{[r,s]}}^{\Gamma_K} \simeq \mathrm{Vect}_{\widetilde{B}_{\overline{K}}^{[r,s]}}^{G_K}$ を誘導する．ただし，$\mathrm{Vect}_{\widetilde{B}_{\overline{K}}^{[r,s]}}^{G_K}$ は半線型な連続 G_K 作用付きの有限射影 $\widetilde{B}_{\overline{K}}^{[r,s]}$ 加群の圏，$\mathrm{Vect}_{\widetilde{B}_{K_\infty}^{[r,s]}}^{G_K}$ は半線型な連続 Γ_K 作用付きの有限射影 $\widetilde{B}_{K_\infty}^{[r,s]}$ 加群の圏である．

さて記号を簡単にするために $R = \widetilde{B}_{K_\infty}^{[r,s]}$，$S = \widetilde{B}_{\overline{K}}^{[r,s]}$ とおく．これらは Banach $\mathbb{Q}_p$-algebra である．次の補題は [FF18, Proposition 11.2.15] より従う（[Mik25b, Proposition 2.11, Proposition 2.12] も見よ）．

補題 4.3. 1. ある集合 I に対して，同型 $S \cong (\widehat{\bigoplus}_I \mathbb{Q}_p) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{Q}_p} R$ が存在する．

2. 自然な同型 $S \mathbin{\widehat{\otimes}}_R S \cong C(H_K, S);\ x \otimes y \mapsto (g \mapsto xg(y))$ が存在する．

さてこの命題を凝縮数学を用いて解釈しよう．まず系 3.11 より，$\underline{S} \cong \underline{(\widehat{\bigoplus}_I \mathbb{Q}_p)} \otimes_{\mathbb{Q}_p,\blacksquare} \underline{R}$ である．よって命題 3.13 より，$\overline{S}$ は $R_\blacksquare$ 加群（ソリッド $\underline{R}$ 加群）として平坦である．また S の表記より，$\underline{S}$ は $\underline{R}$ を直和因子として含む（I は空集合ではない）．よって $\underline{S}$ は $R_\blacksquare$ 加群として忠実平坦である．すると通常の忠実平坦降下と同様に次を証明することができる．

命題 4.4. 圏 $\mathrm{Mod}_{R_\blacksquare}$ は，$S_\blacksquare$ 加群 M と降下データ

$$M \otimes_{S_\blacksquare, i_1} (\underline{S} \otimes_{R_\blacksquare} \underline{S}) \cong M \otimes_{S_\blacksquare, i_2} (\underline{S} \otimes_{R_\blacksquare} \underline{S})$$

の組のなす圏と圏同値である．ここで $i_1\colon \underline{S} \to \underline{S} \otimes_{R_\blacksquare} \underline{S};\ x \mapsto x \otimes 1$，$i_2\colon \underline{S} \to \underline{S} \otimes_{R_\blacksquare} \underline{S};\ x \mapsto 1 \otimes x$ である．

注意 4.5. 上で出てくるテンソル積は全て対称モノイダル abel 圏 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_\blacksquare}$ のテンソル積から定まっていることに注意する．

次に降下データの記述を良い記述を与えよう．まず補題 4.3 の同型のもと，i_1，i_2 はそれぞれ $i_1\colon S \to C(H_K, S);\ x \mapsto (g \mapsto x)$, $\ i_2\colon S \to C(H_K, S);\ x \mapsto (g \mapsto g(x))$ に対応する．M を Banach S 加群とする（位相 S 加群であって $\mathbb{Q}_p$ 加群として Banach になっているもののことを指している）．このとき $i_1\colon S \to C(H_K, S)$ は $\mathbb{Q}_p \to C(H_K, \mathbb{Q}_p);\ x \mapsto (g \mapsto x)$ の係数拡大として得られることに注意すると，

$$\underline{M} \otimes_{S_\blacksquare, i_1} \underline{C(H_K, S)} \cong \underline{C(H_K, M)}$$

を得る．次に i_2 は i_1 と $\iota\colon C(H_K, S) \xrightarrow{\sim} C(H_K, S);\ f \mapsto (g \mapsto g(f(g)))$ の合成として得られることに注意すると，

$$\underline{M} \otimes_{S_\blacksquare, i_2} \underline{C(H_K, S)} \cong \underline{\iota_* C(H_K, M)}$$

を得る．ただし $\iota_* C(H_K, M)$ は，$C(H_K, S)$ 加群 $C(H_K, M)$ を ι によって $C(H_K, S)$ 加群とみなしたものである．さて $d\colon C(H_K, M) \to \iota_* C(H_K, M)$ という $C(H_K, S)$ 加群の射を考える．これは随伴によって S 加群の射 $d'\colon M \to \iota_* C(H_K, M)$ と対応する．これはさらに随伴によって連続写像 $d''\colon H_K \times M \to M$ と対応する．さらにこれにより，降下データ d と，S 半線型な連続 H_K 作用 $d''\colon H_K \times M \to M$ が一対一に対応することがわかる．まとめると，Banach S 加群 M に対し，M の降下データは S 半線型な連続 H_K 作用 $H_K \times M \to M$ と対応する．さらに S 半線型な連続 H_K 表

現 M は，命題 4.4 の圏同値により M^{H_K}（これは Banach R 加群）と対応することもわかる．逆に Banach R 加群 N に対して，$\underline{N} \otimes_{R_\blacksquare} \underline{S} \cong \underline{N \widehat{\otimes}_R S}$ が補題 4.3 (1) からわかる．

以上をまとめて次を得る．

定理 4.6. Banach R 加群の圏 Ban_R は，半線型な連続 H_K 作用付きの Banach S 加群の圏 $\mathrm{Ban}_S^{H_K}$ と圏同値になる．圏同値は $\mathrm{Ban}_R \to \mathrm{Ban}_S^{H_K}$; $N \mapsto N \widehat{\otimes}_R S$ と $\mathrm{Ban}_S^{H_K} \to \mathrm{Ban}_R$; $M \mapsto M^{H_K}$ で与えられる．

さらにこの定理から次も従う．

系 4.7. 半線型な連続 Γ_K 作用付きの Banach R 加群の圏 $\mathrm{Ban}_R^{\Gamma_K}$ は，半線型な連続 G_K 作用付きの Banach S 加群の圏 $\mathrm{Ban}_S^{G_K}$ と圏同値になる．圏同値は $\mathrm{Ban}_R^{\Gamma_K} \to \mathrm{Ban}_S^{G_K}$; $N \mapsto N \widehat{\otimes}_R S$ と $\mathrm{Ban}_S^{G_K} \to \mathrm{Ban}_R^{\Gamma_K}$; $M \mapsto M^{H_K}$ で与えられる．

定理 *4.2* の証明. 系 4.7 より，Banach R 加群 M に対して，$M \widehat{\otimes}_R S$ が有限射影 S 加群ならば，M も有限射影 R 加群であることを示せば良い．ここでは証明の方針のみを紹介する．まず双対 Banach S 加群 $\mathrm{Hom}_S(M \widehat{\otimes}_R S, S)$ には自然に連続な半線型 H_K 作用が定まる．これに対応する Banach R 加群を N とする．すると N が M の双対になることが証明できる．正確には $\underline{N}$ が対称モノイダル圏 $\mathrm{Mod}_{R_\blacksquare}$ における $\underline{M}$ の双対になることが証明できる（詳細は略．命題 4.4 の圏同値がテンソル積を保つことから証明できる）．このことから M が有限射影 R 加群であることがわかる． □

注意 4.8. 上と同じ議論で，$\mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}_p$ に沿った降下も証明できそうであるが，これは成立しない（$\mathbb{C}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の完備化）．問題は $\mathbb{C}_p \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \not\cong C(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), \mathbb{C}_p)$ となることである．これが成立しない理由は，$R \to S$ と異なり $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}_p$ が「almost 副有限 étale」ではないからである．

最後にいくつか補足をする．

• 係数が $\mathbb{Q}_p$ でない場合

A を $\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}$ 代数とする（凝縮 $\underline{\mathbb{Q}_p}$ 代数であって凝縮 abel 群でソリッドになっているもののこと）．ここでは A としては Banach $\mathbb{Q}_p$ 代数から定まるもののほか，$\underline{\mathbb{Q}_p}[T]$ のような代数（このような環を relatively discrete $\underline{\mathbb{Q}_p}$-algebra と呼んでいる）を考えている．このとき，$R \otimes_{\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}} A \to S \otimes_{\mathbb{Q}_{p,\blacksquare}} A$ に対しても，命題 4.4 は成立する．降下データの記述について考える．上の例では Banach $\mathbb{Q}_p$ 加群を用いていたが，一般の場合

は核型 $A_\blacksquare$ 加群 (nuclear $A_\blacksquare$-module) に対して，降下データを具体的に記述できる ([Mik25b, Lemma 1.40])．難しい点は $A_\blacksquare$ 加群 M が双対を持つならば，M は有限射影加群になる（ここではある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して A^n の直和因子になることと定義する）ことを示す部分である．A が Banach $\mathbb{Q}_p$ 代数から定まるときは，A が Fredholm になる，つまり導来圏 $\mathcal{D}(A_\blacksquare)$ の双対可能な対象が perfect complex になるため，このことは容易に証明できる ([And21, Theorem 5.50])．$A = \underline{\mathbb{Q}_p}[T]$ などのときは，残念ながら A は Fredholm にはならないが，うまく工夫をすることで証明できる ([Mik25b, Theorem 1.24])．

- **Deperfection**

Γ_K 同変な X_{K_∞} 上のベクトル束を Robba 環上の (φ, Γ_K) 加群に降下することができることが一般に知られている．この降下は，[Ber16, Por24] によって，Γ_K 作用に関する局所解析的ベクトルを取る操作と密接に関係することが示されている．[Mik25b] では，この観察に基づき，[RJRC22, RJRC23] において導入されたソリッド局所解析的表現（局所解析的表現を凝縮数学を用いて捉えたもの）を用いて，上の結果を族の場合に拡張している．Γ_K 同変な X_{K_∞} 上のベクトル束のコホモロジーと，Robba 環上の (φ, Γ_K) 加群のコホモロジー（これは Herr complex を用いて定義される）の間の同型も証明することができる．

- **コホモロジーの有限性と双対性**

筆者の別の論文 [Mik25a] において，(φ, Γ_K) 加群の族のコホモロジーの有限性と双対性を証明した．これは [KPX14] での結果（ここではアフィノイド $\mathbb{Q}_p$ 代数上の族に対してのみ示されていた）の一般化を与えている．証明においては，ソリッド $\mathcal{D}$ スタック上の準連接層に対する six functor formalism が本質的な役割を果たしている．ここでは詳細を省略する．

参考文献

[And21] Grigory Andreychev, *Pseudocoherent and perfect complexes and vector bundles on analytic adic spaces*, arXiv preprint arXiv: 2105.12591 (2021).

[Ber16] Laurent Berger, *Multivariable (φ, Γ)-modules and locally analytic vectors*, Duke Math. J. **165** (2016), no. 18, 3567–3595.

[CS22] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Condensed mathematics and complex geometry*, https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Complex.pdf, 2022.

[FF18] Laurent Fargues and Jean-Marc Fontaine, *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique*, Astérisque (2018), no. 406, xiii+382, With a preface by Pierre Colmez.

[KPX14] Kiran S. Kedlaya, Jonathan Pottharst, and Liang Xiao, *Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ)-modules*, J. Amer. Math. Soc. **27** (2014), no. 4, 1043–1115.

[Man22] Lucas Mann, *A p-adic 6-functor formalism in rigid-analytic geometry*, Ph.D. thesis, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, August 2022, https://hdl.handle.net/20.500.11811/10125.

[Mik25a] Yutaro Mikami, *Finiteness and duality of cohomology of (φ, Γ)-modules and the 6-functor formalism of locally analytic representations*, arXiv preprint arXiv: 2504.01780 (2025).

[Mik25b] ———, *(φ, Γ)-modules over relatively discrete algebras*, arXiv preprint arXiv: 2409.14145 (2025).

[Por24] Gal Porat, *Locally analytic vector bundles on the Fargues–Fontaine curve*, Algebra Number Theory **18** (2024), no. 5, 899–946.

[RJRC22] Joaquín Rodrigues Jacinto and Juan Esteban Rodríguez Camargo, *Solid locally analytic representations of p-adic Lie groups*, Represent. Theory **26** (2022), 962–1024.

[RJRC23] ———, *Solid locally analytic representations*, arXiv preprint arXiv: 2305.03162 (2023).

[Sch19] Peter Scholze, *Lectures on condensed mathematics*, https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Condensed.pdf, 2019.

[Sch20] ———, *Lectures on analytic geometry*, https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Analytic.pdf, 2020.