# 正標数体上の代数多様体の分岐理論について

東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構　阿部 知行 *

**概要**

エタール構成可能層の特性サイクルの理論を中心とした分岐理論の最近の進展について概説する．特に一般底の近接輪体の理論を用いた特性サイクルの構成を詳しく説明する．

## 1　曲線の場合：古典論

$k$ を標数 $p$（$p=0$ も含む）の体とする．“良い” コホモロジー論*1としてのエタール・コホモロジーを使いたいので $\Lambda$ として標数 $\ell \neq p$ の有限体を取る．これからスキーム $X$ 上の層（複体）と書いたらエタール・サイト $X_{\mathrm{et}}$ 上の $\Lambda$ 加群の層（複体）のこととする．$X$ を $k$ 上のスキームとし，$\mathcal{F}$ を $X$ 上の構成可能層とする．このときコホモロジー $\mathrm{H}^i(X_{\overline{k}}, \mathcal{F})$ を理解したいという状況がしばしば訪れる．しかし一般にコホモロジーを計算することは困難である，というよりほぼ不可能であろう．それでは次元はどうだろうか？ これも一般にはかなり難しい問題である．例えばコホモロジーの次元の $\ell$ 独立性は今も全く解決のめどの立たない問題となっている．さらに情報を落としてオイラー・ポアンカレ標数

$$\chi(X_{\overline{k}}, \mathcal{F}) := \sum (-1)^i \dim_{\Lambda} \mathrm{H}^i(X_{\overline{k}}, \mathcal{F}).$$

ならどうであろうか？ 位相幾何におけるオイラーの多面体定理からもわかるように，位相幾何学においてはこの標数は他の様々な不変量と結びつき，一般的により計算しやすいことが知られている．エタール・コホモロジーにおいてもオイラー・ポアンカレ標数を他の不変量を使って表現するという問題はより妥当な問題と考えられる．実際，底体 $k$ が完全で $X$ が**曲線**の時，Grothendieck は Ogg と Shafarevich の公式を一般化した公式（以後 GOS 公式と呼ぶ）

$$\chi(X_{\overline{k}}, \mathcal{F}) = \mathrm{rk}(\mathcal{F}) \cdot \chi(X_{\overline{k}}) - \sum_{x \in \overline{X} \setminus X} a_x \mathcal{F}$$

を証明した．ここで $\overline{X}$ は $X$ の滑らかなコンパクト化であり，$a_x$ は $x$ の局所的な様子にのみ依存する**導手**と呼ばれる不変量である．また，$\mathcal{F}$ が $x$ の周りで局所系を成している場合は $a_x = 0$ となるため，$\mathcal{F}$ が構成可能層という条件から GOS 公式に出てくる和は有限和になっていることが分かり公式は意味を持つ．言い方を変えると $a_x$ は $x$ 周辺で $\mathcal{F}$ がどのぐらい局所系から離れているかを量る不変量であり，分岐理論で扱う不変量である．これが本稿で扱う分岐理論のひな型となる定理である．

曲線の場合は完成された美しい理論になっているが，この描像を高次元化するのはとても困難であった．そして，2015 年前後ついに Beilinson と斎藤毅によって高次元の局所的な分岐を量る不変量である特性サイク

*　Kavli IPMU, the University of Tokyo, Tomoyuki ABE　e-mail: `tomoyuki.abe@ipmu.jp`

*1 ヴェイユ・コホモロジー論と書きたいところだが，ヴェイユ・コホモロジーは標数 0 の体上のベクトル空間に値を取る一方で我々は（簡単のため）$\Lambda$ 加群に値を取るコホモロジーを考えるのでヴェイユ・コホモロジーと書くのは語弊がある．

ルが構成され，それを用いた指数定理も証明された．本稿の目的はこの特性サイクルの理論の概説を解説することである．§2 では特性サイクルの底になっている特異台が幾何学的に何をやっているかを出来るだけ直感的に説明する．それをもとに §3 では特性サイクルの定義を与え，特性サイクルにまつわる結果を概説する．§4 では特性サイクルの構成を説明する．最後に §5 では特性サイクルの数論への影響について考察したい．

## 2 高次元の場合：特性サイクル

前節の公式を高次元の多様体に対しても確立したいと思うのは自然のことであろう．実際 Deligne は前節の公式を一般化しようと曲面の場合に詳しい計算をし，一般化する公式を得ている．一方でこの公式は極めて複雑で，より高次元化するのは困難なように見えた．そのあたりの詳しい歴史は [I] を参照されたい．一方で佐藤幹夫のアイディアに端を発し急速に発展していた $\mathcal{D}$ 加群の理論から影響を受け，$\mathcal{D}$ 加群の理論で現れる特性サイクルと分岐理論の関係性が指摘されるようになる ([K] のイントロ参照)．実際には 70 年代後半には考えていたようだが[*2]，Deligne は 2011 年の手紙 [D] で GOS 公式を高次元に一般化する予想を述べている．この予想は Belinson と斎藤毅によって解決された[*3]．本稿では特性サイクルの存在に焦点を絞って解説していきたい．

前節同様体 $k$ を固定し，$X$ を 2 次元のアフィン空間 $\mathbb{A}_k^{\{x,y\}}$ とする．ここで，本概説では集合 $I$ と体 $k$ に対して $\mathbb{A}_k^I := \mathrm{Spec}(k[I])$ として定める．$Z = \{x = 0\}$, $U := X \setminus Z$ として定め，$j\colon U \hookrightarrow X$ を開移入とする．この時 $\mathcal{F} := j_!\Lambda_U$ という構成可能層を "超局所的" に観察してみたい．$p, q\colon X \to \mathbb{A}^1$ を $p(x,y) = x$, $q(x,y) = y$ という射影とする．まず，$o_1 := (1,1)$ という点を考える．$p(o_1) = 1$ に "すごく近い $\mathbb{A}^1$ の一般点" を $\eta_1$ として $\mathcal{F}$ の $p^{-1}(\eta_1)$ の様子と茎 $\mathcal{F}_{o_1}$ がどう変化するのか考える．滑らかな射は局所非輪状 (locally acyclic) であることがエタール・コホモロジーの一般論から知られている．つまり

$$\mathcal{F}_{o_1} \cong \mathrm{R}\Gamma\big(X_{(o_1)} \times_{p,\mathbb{A}^1_{(p(o_1))}} \eta_1, \mathcal{F}\big)$$

である．ここでスキーム $X$ とその幾何学的点 $x$ に対して $X_{(x)}$ は強ヘンゼル化を意味する（定義 4.1 参照）．言い換えると $\mathcal{F}_{o_1}$ は $p^{-1}(\eta_1)$ を見ているだけで復元できる．当然射影 $q$ に対しても同じことが言える．

同じ考察を $o_2 := (0,0)$ に対しても行ってみよう．まず $p$ に対してである．$o_1$ の場合と同様に $\mathrm{R}\Gamma\big(X_{(o_2)} \times_{p,\mathbb{A}^1_{(p(o_2))}} \eta_0, \mathcal{F}\big)$ を計算してみる．$p^{-1}(\eta_0)$ において $\mathcal{F}$ は定数層 $\Lambda$ と同じなのであるから

$$\mathrm{R}\Gamma\big(X_{(o_2)} \times_{\mathbb{A}^1_{(p(o_2))}} \eta_0, \mathcal{F}\big) \cong \mathrm{R}\Gamma\big(X_{(o_2)} \times_{\mathbb{A}^1_{(p(o_2))}} \eta_0, \Lambda\big) \cong \Lambda$$

と計算できる．ここで最後の同型は滑らかな射の局所非輪状を定数層に対して適用した．一方で $\mathcal{F}_{o_2} = 0$ なのだから $o_1$ の場合とは違って一般ファイバーから $\mathcal{F}_{o_2}$ を復元できないことが分かる．次に $q$ に対して同じものを考えてみる．$i\colon Z \hookrightarrow X$ とした時,

$$0 \to F = j_!\Lambda_U \to \Lambda \to i_*\Lambda_Z \to 0$$

という短完全列がある．$\Psi_{q,o_2} := X_{(o_2)} \times_{\mathbb{A}^1_{(o_2)}} \eta_0$ とおく．すると

$$\mathrm{R}\Gamma(\Psi_{q,o_2}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{fib}\big(\mathrm{R}\Gamma(\Psi_{q,o_2}, \Lambda) \to \mathrm{R}\Gamma(\Psi_{q,o_2}, i_*\Lambda_Z)\big) \tag{2.1}$$

---

*2 [I, 1.4.5] 参照.

*3 正確には特異台が存在し中間次元であることを Beilinson が示し，斎藤がその上に重複度をのせることで特性サイクルの定義が完成した．後で詳しく解説する．

ヘンゼル環の性質から $Z_{(o_2)} \to X_{(o_2)}$ は閉移入であることが分かる．このことと $Z_{(o_2)} \to \mathbb{A}^1_{(q(o_2))}$ が同型であることを用いると

$$\mathrm{R}\Gamma(\Psi_{q,o_2}, i_*\Lambda_Z) \cong \mathrm{R}\Gamma\big(Z_{(o_2)} \times_{\mathbb{A}^1_{(q(o_2))}} \eta_0, \Lambda_Z\big) \cong \mathrm{R}\Gamma(\eta_0, \Lambda) \cong \Lambda$$

と計算ができる．冷静に射をたどってみると (2.1) の fib に中に現れる射は $\Lambda \xrightarrow{\mathrm{id}} \Lambda$ と同型であることが分かり，$\mathrm{R}\Gamma(\Psi_{q,o_2}, \mathcal{F}) = 0$ であることが結論付けられる．つまり，$q$ の方向では一般点のファイバーの様子から $\mathcal{F}_{o_2}$ が復元できるのである．もう少し一般に $(a,b) \in \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して射影 $\pi_{a,b}(x,y) := ax + by$ が考えられる．$b \neq 0$ なら同じように $\Psi_{\pi_{a,b},o_2}$ のコホモロジーから $\mathcal{F}_{o_2}$ が復元できることが容易に示せる．このように $(a,b)$ を動かして考えるとほとんどの方向においては一般ファイバーから茎が復元できる一方，$b = 0$ という**特殊な**方向のみ値の不一致が起こることが観察できる．代数解析ではこのような性質を

> $\mathcal{F}$ は $o_1$ の周辺ではあらゆる方向に伝播（propagate）していく．一方で $o_2$ の周辺では $a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y$（$b \neq 0$）の方向に伝播するが，$\mathrm{d}x$ の方向には伝播しない．

と表現する．$\mathcal{F}$ を固定したとき伝播しない方向を定性的に表現するのが $\mathcal{F}$ の特異台である，つまり $\mathcal{F}$ の特異台は

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \mathrm{T}^*_X X \cup \mathrm{T}^*_Z X \subset \mathrm{T}^* X$$

である．ここで $\mathrm{T}^*_Z X$ は $Z$ の余接束で，具体的には $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \cdot \big\{((0,y), \mathrm{d}x) \mid (0,y) \in \mathbb{A}^2\big\}$ と書ける．0 切断 $\mathrm{T}^*_X X$ が入っているが，これは基本的に $\mathcal{F}$ の台（の閉包）を復元するためである．$\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ の $o_1$ でのファイバーを考えると（0 切断を除いて）どの方向にも特異台が伸びていない．これは $o_1$ 周辺ではあらゆる方向に伝播することを示している．一方 $o_2$ でのファイバーを考えると $\mathrm{d}x$ の方向は特異台とぶつかってしまう．これは $o_2$ 周辺ではその方向には伝播しないことを意味する．それ以外の方向においては特異台とぶつからないので，$\mathrm{d}x$ 方向以外には伝播していく．$\mathrm{T}^*X$ の次元は 4 だが $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ の次元は中間次元，つまり 2 次元になっていることがほとんどすべての方向において伝播していくことを示しているのである．

この考察を踏まえて一般的な構成可能複体に対する特異台を定義したい．伝播することを正確に表現するために局所非輪状であるという状況を定義しておこう．$X$ を代数多様体として $f\colon X \to \mathbb{A}^1$ を射として $\mathcal{F}$ を $X$ 上の構成可能複体，つまり有界な $\Lambda$ 加群の複体で各コホモロジー層が構成可能なもの，とする．$x \in X$ を $0 \in \mathbb{A}^1$ 上の点とする．このとき **$\mathcal{F}$ が $x$ で $f$ に沿って局所非輪状**（SGA $4\frac{1}{2}$ の Finitude 参照）とは標準射

$$\mathcal{F}_x \xleftarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(X_{(x)}, \mathcal{F}) \to \mathrm{R}\Gamma(P_{f,x}, \mathcal{F})$$

が同型であることを言う．ここで $P_{f,x} := X_{(x)} \times_{\mathbb{A}^1_{(0)}} \eta_0$ である．

この概念を用いると特異台が定義できる．$X$ を $k$ 上滑らかな代数多様体として，$\mathcal{F}$ を $X$ 上の構成可能複体とする．この時 $X \xleftarrow{g} U \xrightarrow{h} \mathbb{A}^1$ で $g$ がエタール射なものをテスト組[*4]とよぼう．特異台とは次の性質を持つ $\mathrm{T}^*X$ の錐 (conic)，つまり $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 作用で閉じている閉部分集合 $C$ で，包含関係において**最小**となるものである：

> 任意のテスト組 $X \xleftarrow{g} U \xrightarrow{h} \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(k[t])$ において $h^*\mathrm{d}t$ が $C$ と交わりを持たなければ $g^*\mathcal{F}$ は $h$ に沿って局所非輪状である．

*4 Beilinson [B] はテスト組として定理 2.1 の注にあるような組を考えた．ここではより直感的な Deligne [D] のこちらの定義を採用した．

$X$ 上の関数をそのまま考えるのではなく $U$ 上の関数を考えているのは $X$ が固有だったりするとき大域的な関数が足りないためである．特異台の存在は難しくないが，次元が期待されるものになるという事実は Beilinson の大定理である：

**定理 2.1.** 任意の構成可能複体 $\mathcal{F}$ に対して特異台 $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ が存在し，どの既約成分の次元も中間次元，つまり $\dim(X)$ である．

証明はラドン変換を用いた幾何学的な見事なものだが，射影幾何の技術的な議論が必要なのでこれ以上は立ち入らない．

**注.** 上の脚注でも言及したが，[B] のオリジナルのテスト組の定義は単なる $X \xleftarrow{g} U \xrightarrow{h} T$ という図式である．このとき $\mathrm{T}^*X \times_X U \xrightarrow{\mathrm{d}g} \mathrm{T}^*U \xleftarrow{\mathrm{d}h} \mathrm{T}^*T \times_T U$ という $U$ 上のベクトル束の標準的な射がある．$C$ $(\subset \mathrm{T}^*X)$ がこのテスト組に対して**横断的**とは $U, T$ も滑らかで，$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}g) \cap (C \times_X U) \subset O_{\mathrm{T}^*X} \times_X U$ かつ $(\mathrm{d}h)^{-1}(\mathrm{d}g)(C \times_X U) \subset O_{\mathrm{T}^*T} \times_T U$ となることを言う．ここで $O_{-}$ は対応するベクトル束の 0 切断を表す．Beilinson の定理はより強く $\mathrm{SS}(\mathcal{F})$ に対して横断的なテスト組があったとき $g^*\mathcal{F}$ は $h$ に沿って普遍的局所非輪状（この一般化された状況での定義は §4 参照）であることも示している．Beilinson のオリジナルの特異台の定義はこちらの一般的なテスト組を用いるもので，その場合特異台の存在もかなり非自明である．上記の制約の強いテスト組のみを用いた定義と同値であることは [B, Thm 1.5] であり，証明も深い．

## 3 特性サイクルとその性質

構成可能層が与えられたとき特異台はどの方向に伝播していき，どの方向で伝播しないのかを教えてくれるものであった．特性サイクルは伝播しない場合どの程度伝播しないのかを教えてくれる存在である．これをどのように量るかを説明するため特異台の定義からただちに従う性質を復習しておく：

$X \xleftarrow{g} U \xrightarrow{h} \mathbb{A}^1$ がテスト組とした時

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{F})_U \cap \mathrm{d}h = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \Phi_h(g^*\mathcal{F}) = 0$$

が成立する．ここで $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})_U$ は $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ を $\mathrm{T}^*U \cong \mathrm{T}^*X \times_X U$ に底変換したものである．

さて，特性サイクル $\mathrm{CC}(\mathcal{F})$ というのは $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ の各既約成分に数字をのせた $\mathrm{T}^*X$ の中間次元サイクルである．つまり $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \bigcup_i C_i$ と既約成分の和として書いたとき $\mathrm{CC}(\mathcal{F}) = \sum_i m_i[C_i]$ $(m_i \in \mathbb{Z}[1/p])$ という形式和である．CC を定義するため上記の関係を定量的にとらえ直したい．まず，$\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ は余次元が $d := \dim(X)$ で $\mathrm{d}h(U)$ も $\mathrm{T}^*U$ の中で余次元が $d$ となる．よって “一般的” には交叉の余次元は $2d$ となり，言い換えれば 0 次元サイクルになっている．0 次元サイクルは次数が考えられるため数が現れる．このように考えると

$$\deg \langle \mathrm{CC}(\mathcal{F}), \mathrm{d}h \rangle_{\mathrm{T}^*U, \mathrm{d}h(u)} = \dim_\Lambda \Phi_h(g^*\mathcal{F})_u \tag{3.1}$$

と定義してみたくなる．ここで $u \in U$ で，$\langle \dots \rangle_{\mathrm{T}^*U, \mathrm{d}h(u)}$ は $\mathrm{d}h \colon U \hookrightarrow \mathrm{T}^*U$ の像と $\mathrm{CC}(\mathcal{F}) \times_X U \subset \mathrm{T}^*U$ の $\mathrm{d}h(u)$ における交点数である．この定義には説得力があるが，主に二つの問題がある．まず，左辺についてであるが，一般的には確かに交叉が 0 次元になっているものの，特殊な場合そうではない．自明な例としては例えば $h = 0$ という関数を考えれば 0 切断と常に交わってしまうので左辺の意味が明確でない．このような状況を回避するためにまず $h$ という関数に制約を加える必要がある．正確には $h$ が $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ と孤立点で交わっ

ている，つまり $(\mathrm{d}h)^{-1}(\mathrm{Sing}(\mathcal{F})_U) = \{u\}$ となる，必要がある．このような関数 $h$ を $u$ **で** $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ **に対して孤立特性的である**という．

さらに右辺も問題がある．このような等号が常に存在するように $\mathrm{CC}(\mathcal{F})$ を取ってこられないのである．次の一番簡単な例を考察してみよう：

**例 3.1.** 以下の例は SGA 7, Exp. XVI, Prop 1.13 の証明にあるものである．$k$ を標数 2 の体とする．方程式 $f_1(T) := xT^2 + T + x^2$ と $f_2(T) := (x+1)T + x^2$ を考える．$0 \in \mathbb{A}_k^{\{x\}}$ のエタール近傍 $X \to \mathbb{A}_k^{\{x\}}$ で $f_i(T) = 0$ が解をもつようなものが取れる．解をそれぞれ $h_i \in \mathcal{O}_X$ とする．$\mathbb{A}^1$ への射として $h_i$ はエタール局所的には $h_i' \colon \mathrm{Spec}(k[x,t]/f_i(t)) \to \mathrm{Spec}(k[t])$ の原点の周りと同型である．さて，$X$ の定数層 $\Lambda$ を考えると特異台は $\mathrm{T}^*_X X$ となっている．交叉数 $m_i := \langle \mathrm{T}^*_X X, \mathrm{d}h_i \rangle_{\mathrm{T}^*X,0}$ は [F, 7.1.14] を用いて計算すると $m_1 = 4$, $m_2 = 2$ と計算できる．一方で $h_i'$ の原点での強ヘンゼル化の生成ファイバーは体の 2 次拡大になっていることから $\Phi_{h_i}(\Lambda)_0$ の次元は 1 である．よって，等式 (3.1) が $h_1$, $h_2$ で同時に成立するような $\mathrm{CC}(\Lambda)$ は取れない．

これらの欠陥を解決するためには $\dim_\Lambda \Phi_h$ とするのではなく，$\mathrm{totdim}_\Lambda \Phi_h$ とすればよいことに Deligne は気づいた．これがいわゆる Deligne の Milnor 公式である．ここで総次元 $\mathrm{totdim}_\Lambda$ の定義は次のとおりである．$(\mathbb{A}^1)_{(h(u))}$ の惰性群を $I$ とする．$I$ の作用がある有限次元 $\Lambda$ 線形空間 $V$ が与えられたとき，スワン導手 $\mathrm{sw}(V)$ という整数が定義される．これを用いて $V$ の**総次元**を $\mathrm{totdim}_\Lambda(V) = \mathrm{sw}(V) + \dim_\Lambda(V)$ と定める．$\Phi_h$ は $I$ のモノドロミー作用があるので，その作用の分岐の量も考慮に入れ $\Phi_h(g^*\mathcal{F})_u$ を $I$ 作用のある $\Lambda$ 線形空間と思うわけである．これを用いて上の欠陥のある定義は次の本物の定義（定理）に生まれ変わる：

**定理 3.2** ([S1, Thm 5.9])**.** $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \in I} C_i$ と既約成分で書いた場合，組 $\{m_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{Z}[1/p]$ が**唯一**存在して，$u \in X$ で $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ に対して孤立特性的な任意の関数 $h$ が与えられたとき等式

$$\deg \langle \mathrm{CC}(\mathcal{F}), \mathrm{d}h \rangle_{\mathrm{T}^*U, \mathrm{d}h(u)} = -\mathrm{totdim}_\Lambda \Phi_h(g^*\mathcal{F})_u$$

が成立する．この $\mathrm{CC}(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の**特性サイクル**と呼び，等式を **Milnor 公式**と呼ぶ．なお，底体 $k$ が完全なら $m_i$ は整数になる．

定理の totdim の符号に関しては Riemann-Hilbert の哲学に従って，偏屈層の特性サイクルを正にするための調整である．特性サイクルの構成は次の節で詳細を解説したい．本稿は概説論文なので，特性サイクルの構成の解説の前に特性サイクルにどのような性質が知られているかをまとめたい．まず，特性サイクルの導入の一つの動機は GOS 公式の一般次元化であったことを思い出したい．これは次の指数定理として一般化される．

**定理 3.3.** $X$ を固有かつ滑らかな $k$ 上の多様体とし，$\mathcal{F}$ を構成可能複体とする．このとき

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \deg\bigl(\mathrm{CC}(\mathcal{F}), \mathrm{T}^*_X X\bigr)_{\mathrm{T}^*X}.$$

**注.** この定理の歴史について [S1] では謙虚すぎて不明確なので少し補足したい．まず，この定理の射影的である場合に対して初めての証明は斎藤毅によるもので，これは [S1] の arxiv 版の第 1 版である [S1'] に書いてある．出版されている [S1] の証明は Beilinson による簡略な証明であり，独立のものである．いずれの証明もまず引き戻しに対する特性サイクルの関手性を示すが，斎藤のものはとても技術的な一方 Beilinson のものはコンパクトで分かりやすい．それを用いて指数定理を示すが，斎藤のものは Lefschetz 鉛筆を用いるとても分かりやすい証明である．Beilinson はさらによりコンパクトな証明であるが，証明の気持ちが筆者にはわかりにくい．個人的な好みはまず Beilinson の手法で引き戻し公式を示し斎藤の方法で指数定理を示すことだが，まだ私の理解が足りていないのでこれ以上の解説はまたの機会に譲りたい．固有の場合は阿部 [A] によるもので，後に述べる押し出し公式の特殊な場合として示される．

この指数定理は GOS 公式の一般化になっている．実際 $X$ が曲線で $j\colon U \hookrightarrow X$ を開移入だったとしよう．$\mathcal{L}$ を $U$ 上の滑らかな層とした場合 $\mathrm{SS}(j_!\mathcal{L}) = \mathrm{T}^*_X X \cup \bigcup_{x\in X\setminus U} \mathrm{T}^*_x X$ となっている．さらに

$$\mathrm{CC}(j_!\mathcal{L}) = \mathrm{rk}(\mathcal{L})[\mathrm{T}^*_X X] + \sum_{x\in X\setminus U} \mathrm{totdim}_x(\mathcal{L})\cdot[\mathrm{T}^*_x X]$$

となることが分かる．この公式の $\mathrm{CC}(j_!\Lambda_U^{\oplus \mathrm{rk}(\mathcal{L})})$ の場合と指数定理を用いることにより GOS 公式が復元できることが分かる．Grothendieck-Riemann-Roch の精神に立ち返ると指数定理があればその相対版があってしかるべきである．これが以下の公式である：

**定理 3.4** ([S3, A])**.** $h\colon X \to Y$ を滑らかな $k$ 上の多様体の間の固有射とする．以下の図式を考える：

(3.2)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "h"'] & \mathrm{T}^*X \arrow[l] & \\
& & \mathrm{T}^*Y \times_Y X \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "\overline{h}"] \\
Y & \mathrm{T}^*Y. \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

このとき次の等式が $\mathrm{CH}_{\dim(Y)}\big(\overline{h}g^{-1}\mathrm{SS}(\mathcal{F})\big)[1/p]$ の中で成立する：

$$\mathrm{CC}(\mathrm{R}h_*\mathcal{F}) = \overline{h}_* g^!(\mathrm{CC}(\mathcal{F})).$$

この定理で $Y = \mathrm{Spec}(k)$ として取ってやれば指数定理になる．また，$Y$ が曲線の場合はいわゆる導手公式と同値になっている．この定理で一番のポイントとなってくるのは $h_\circ\mathrm{SS}(\mathcal{F}) := \overline{h}g^{-1}\mathrm{SS}(\mathcal{F})$ の次元が $\dim(Y)$ より大きくなりうるということである．$k$ の標数が 0 の場合 $\dim(h_\circ\mathrm{SS}(\mathcal{F})) = \dim(Y)$ であることが特異台がラグランジアン部分空間であることから従う．すると $\mathrm{CH}_{\dim(Y)}(h_\circ\mathrm{SS}(\mathcal{F}))$ は $h_\circ\mathrm{SS}(\mathcal{F})$ の既約成分を底とする自由加群になり，等式はサイクルの “本当の等式” となる．しかし $k$ が正標数だと $h_\circ\mathrm{SS}(\mathcal{F})$ の次元は真に大きくなってしまう．例えば $k$ の標数が $p > 0$ で $h$ を（相対的な）フロベニウス射と取ってくると，$\mathrm{d}x^p = 0$ となることから $g$ は 0 射となる．よって $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) = X$ の場合，$g^{-1}(\mathrm{SS}(\mathcal{F})) = \mathrm{T}^*Y \times_Y X$ となり，$h_\circ\mathrm{SS}(\mathcal{F}) = \mathrm{T}^*Y$ となってしまう．こうなると $\mathrm{CH}_{\dim(Y)}(h_\circ\mathrm{SS}(\mathcal{F}))$ はサイクルで作られる自由加群を有理同値で割る必要が出てきて，“ホモトピーを構成する” 問題に変わってしまう．これが正標数の押し出し公式の証明の難しい部分である．押し出し公式は次元の仮定 $\dim(h_\circ\mathrm{SS}(\mathcal{F})) = \dim(Y)$ を満たす $\mathcal{F}$ でさらに幾ばくかの射影性の仮定の下で [S3] で示された．上記の一般的な形は [A] による．証明に関しては本稿では残念ながら触れられない．

固有な場合の押し出しに対して関手性があることを見たが，他のコホモロジー操作に対しても関手性が存在している．

**定理 3.5** ([S1, Thm 7.6], [S2])**.** $X$, $Y$ を滑らかな $k$ 上の多様体とする．

1. $h\colon X \to Y$ を**滑らかな**射とする．この時，(3.2) の記号を用いると，サイクルとしての等式 $\mathrm{CC}(h^*\mathcal{F}) = g_*\overline{h}^*(\mathrm{CC}(\mathcal{F}))$ が成立する．
2. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ をそれぞれ $X, Y$ の構成可能複体とした時サイクルとしての等式 $\mathrm{CC}(\mathcal{F}\boxtimes_\Lambda\mathcal{G}) = \mathrm{CC}(\mathcal{F})\times_k\mathrm{CC}(\mathcal{G})$ が成立する．

**注.** ここで紹介した引き戻しに関する主張は滑らかな射に対してだが，より一般に “特異台に対して特性的な $h$” に対しても同様の主張が成立する．こちらの方がさらに有用性が高いが，この概説では用いないのでこれ以上立ち入らない．詳細は [S1] を参照されたい．

特性サイクルは分岐を測るうえで決定的な不変量といえるが，これまでもいくつかの分岐を測る不変量が導入されてきた．例えば加藤・斎藤 [KS] によって導入されたスワン類や Abbes・斎藤 [AS] によって導入された特性類などがそうである．これらはどちらも特性サイクルから計算できることが予想されている [S1, Conj 6.8]．スワン類に関してはこの予想は今だ知られていないが，特性類に関しては十分広いクラスで証明されているので主張の概略を述べておきたい．$X$ を $d$ 次元の滑らかな $k$ 上のスキームとして，$\mathcal{F}$ を $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X, \Lambda)$ の対象とする．$\omega_X$ を $X$ 上の双対複体とする．この時 $\mathrm{H}^0(X, \omega_X) \cong \mathrm{H}^{2d}(X, \Lambda(d))$ となるが，この加群に **$\mathcal{F}$ の特性類** $\mathrm{cc}(\mathcal{F})$ が定義される．この特性類は Lefschetz 跡公式を示すときに導入する局所項と同じように定義する．最近では Lu-Zheng [LZ] によって構成可能層の導来圏から構成されるある 2 圏の圏論的跡であることが示されており，特性類は特性サイクルに比べて圏論的な不変量である．この時次が成立する：

**定理 3.6** ([YZ])**.** $X$ を滑らかかつ準射影的な $d$ 次元スキームとする．$0_X \colon X \to \mathrm{T}^*X$ を 0 切断とし，準同型 $[-] \colon \mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{H}^{2d}(X, \Lambda(d))$ をサイクル類を取るものとする．このとき，構成可能複体 $\mathcal{F}$ に対して次の等式が $\mathrm{H}^{2d}(X, \Lambda(d))$ の中で成り立つ．

$$[0_X^!(\mathrm{CC}(\mathcal{F}))] = \mathrm{cc}(\mathcal{F})$$

**注.** [S1] の予想では準射影性は仮定されていない．

さて，標数 0 の場合に比べて正標数の場合に特性サイクルを計算するのはとても難しい．標数 0 の場合が比較的容易な理由として特異台が閉部分空間の余接束の和集合になっていることが挙げられる．一方で正標数の場合は特性サイクルの形がずっと複雑で，例えば曲面の場合は中間次元の錐閉部分集合が全て出てくることが Deligne によって示されている ([B, Example 1.3])．より現実的に，境界に生成的には特性サイクルは Abbes・斎藤の分岐理論を用いて計算できることが知られている．これは [S1, Thm 7.14] に具体的な公式がある．しかし，より高余次元の点に対する分岐を計算するのは極めて難しい．実際，谷田川 [Y] は一般次元多様体の階数 1 の層の余次元 2 までの特性サイクルについて計算しているものの，より一般になると階数 1 の層に限っても特性サイクルがどのように記述されるか分かっていない．加藤や斎藤秀司による幾何学的な高次元類体論は階数 1 の層の情報をすべて含んでいるはずなので，原理的には特性サイクルが計算できるはずである．高次元類体論からどのように特性サイクルを計算するかを明らかにするのは興味深い問題である．

一方でコホモロジーの Frobenius 作用の行列式は $\varepsilon$ 因子として知られる．これは Euler-Poincaré 標数より深い不変量とされ分岐理論でも研究されてきた．$\varepsilon$ 因子も局所的な情報から定まる局所 $\varepsilon$ 因子の積として表されるという積公式は GOS 公式の一般化ともみられる．これは Laumon[L] によって証明され，関数体のラングランズ対応の確立において重要な役割を果たした．この理論の高次元版の存在は Beilinson により予期されているものの，定式化すらままならない．一方で $\varepsilon$ 因子の 1 の冪根を無視した場合，扱いが格段に楽になることが竹内によって観察され，特性サイクルに $\varepsilon$ 因子の情報を載せた $\varepsilon$ サイクルの理論 [T] が構築された．$\varepsilon$ 因子の理論は 1 の冪根を無視すれば $\mathbb{A}^1$ 不変な理論で捉えられることから $\varepsilon$ サイクルは本概説の方法をそこまで逸脱せずに構成できる．一方で真の $\varepsilon$ 因子は $\mathbb{A}^1$ 不変な理論ではとらえきれないことが斎藤毅により観察されており，今後の進展が望まれる．

# 4 特性サイクルの構成

底体 $k$ が正標数の場合の特性サイクルの構成を特異台の存在 [B] を認めたうえで述べたい．ここで紹介する証明は [S1] と基本的に同じものであるが，[A] の Laumon の局所フーリエ変換を用いるアイディアを導入し高次元底の近接輪体の理論をより体系的に用いることによって少しだけコンパクトかつ見通しを良くしたもの

である．定理はテスト関数 $h$ を変化させたとき消滅輪体の総次元がどのように変化するかが交叉理論的に捉えられると主張している．これには高次元底の近接・消滅輪体の理論が不可欠になってくる．この理論の必要な部分の解説から始める．

**定義 4.1.** スキーム $X$ の**幾何学的点**とは代数閉体 $\Omega$ と射 $\mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ の組である．記号の乱用で幾何学的点 $x$ といったとき $\mathrm{Spec}(\Omega)$ のことをいうことがある．$X$ の幾何学的点 $x$ が与えられたとき，その強ヘンゼル化が考えられ $X_{(x)}$ と書く．$X$ の幾何学的点 $\eta, x$ が与えられたとき特殊化射 $\eta \rightsquigarrow x$ とは射 $\eta \to X_{(x)}$ のことである．特殊化射は合成できることに注意する．

**注.** 本説ではスキームの点も幾何学点も基本的に同じ種類の記号を使う．つまり，$t$ と書いたとき普通の点か幾何学的点かは設定によっている．$t$ がスキームの点の場合に限り $\bar{t}$ としてその上の幾何学的点を表す．このような紛らわしい記号の使用をお詫びしたい．

近接輪体は特殊化射に沿って定義される．

**定義 4.2.** スキームの射 $f\colon X \to S$ が与えられたとし，$\phi\colon \eta \rightsquigarrow t$ を $S$ 上の特殊化射とする．次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
X_t \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X_{(t)} \arrow[d] & X_\eta \arrow[l, "j"'] \arrow[d] \\
t \arrow[r] & S_{(t)} & \eta \arrow[l, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

この時，近接輪体関手 $\Psi_{f,t\leftarrow\eta}\colon D^+(X_\eta) \to D^+(X_t)$ を $i^*\mathrm{R}j_*$ として定義する．近接輪体関手はしばしば簡単のため $\Psi_{t\leftarrow\eta}$ と書く．

**注.** $\mathcal{F} \in D^+(X_\eta)$ として，$X_t$ の幾何学的点 $x$ を取ってきたとき

$$\Psi_{f,t\leftarrow\eta}(\mathcal{F})_x \cong (\mathrm{R}j_*\mathcal{F})_x \cong \mathrm{R}\Gamma\big(X_{(x)} \times_{S_{(t)}} \eta, \mathcal{F}\big)$$

となる．§2 の局所非輪状の定義でも似たものが出てきたが，積 $X_{(x)} \times_{S_{(t)}} \eta$ はしばしば **Milnor ファイバー**と呼ばれる．つまり，我々の近接輪体は局所的には Milnor ファイバーのコホモロジーになっている．一方でより多くの文献では有効積を用いて高次元底の近接輪体が定義されている．ここでは Milnor 管 $X_{(x)} \times_{S_{(t)}} S_{(\eta)}$ のコホモロジーが現れ，一般的には相異なるもので注意が必要である．良い場合はこれら二つが一致しており，実際我々の使う状況下では両者は同型であることが知られている．

$S$ が離散付値環に付随するスキームで $t, \eta$ がそれぞれ閉点・生成点上の幾何学的点だった場合は古典的な近接輪体と一致しているので古典的なものの一般化といえる．ただし，この一般的な状況では $\Psi_{t\leftarrow\eta}$ の振る舞いはあまりよろしくない．例えば次のような問題点がある：

- 構成可能性は一般に保存されない[*5]．
- この関手は特殊化射の合成に対して推移的に振る舞わない．つまり特殊化射の合成可能な列 $\eta \rightsquigarrow t \rightsquigarrow s$ があったとき，自然な射 $\Psi_{s\leftarrow\eta} \to \Psi_{s\leftarrow t} \circ \Psi_{t\leftarrow\eta}$ が存在するが，これは一般に同型ではない．

この問題に関して，**$f$ に対して良い構成可能複体**という概念が導入でき，これらの障害はこのような $\mathcal{F}$ については現れないことが知られている．さらに $\mathcal{F}$ は十分たくさんあることが示せる．これらに関しては [O] を

[*5] 有界な複体に対して有界性は保たれる．これはかなり一般的な事象で [A, Rem 4.2.1] を参照．

参照されたい．今回はずっと易しい次の命題の結果で十分である．命題を述べる前に普遍的非輪状性の定義を思い出しておく．$f\colon X \to S$ と $X$ 上の複体 $\mathcal{F}$ が与えられたとき $\mathcal{F}$ **が** $f$ **に沿って局所非輪状**とは全ての $S$ の特殊化射 $\xi \rightsquigarrow s$ に対して標準射 $\mathcal{F}|_{X_s} \to \Psi_{s\leftarrow\xi}\mathcal{F}$ が同型であることを言う．$S = \mathbb{A}^1$ の時は §2 の最後で導入したものと一致することがすぐ分かる．さらに**普遍的局所非輪状**とは全ての底変換 $S' \to S$ に対して局所非輪状性が成立することである．

**命題 4.3.** 射 $f\colon X \to S$, $S$ の幾何学的点 $\eta$ と $X_\eta$ の $\Lambda$ 加群の複体 $\mathcal{F}$ が与えられたとする．$f$ は有限型で $S$ は局所ネーター的と仮定する．$Z \subset X$ という閉部分スキームと $X \setminus Z$ 上の $\Lambda$ 加群の複体 $\mathcal{G}$ があって次の性質を満たすとする：

- 合成 $Z \to X \to S$ は準有限.
- $\mathcal{G}$ は $X \setminus Z \to S$ に沿って普遍的局所非輪状.
- $\mathcal{G}$ を $(X \setminus Z)_\eta$ に引き戻すと $\mathcal{F}|_{(X\setminus Z)_\eta}$ と同型.

この時，$\mathcal{F}$ に対して上記の推移性が成立し，さらに，$\mathcal{F}$ が構成可能複体ならその近接輪体もそうなる．

**注.** この条件を満たす $\mathcal{F}$ は $f$ に対して良い構成可能複体の例になっている．事実自体は [O, Thm 6.1] の亜種だが，証明の基本アイディアは Deligne の SGA $4\frac{1}{2}$ の Finitude, Lem 2.15 にある．実は $S$ の局所ネーター性は必要ないが，簡単のため仮定した．

**証明**. まず推移性を示す．特殊化射の列 $\eta \rightsquigarrow t \rightsquigarrow s$ を固定し，$\alpha\colon \Psi_{s\leftarrow\eta}(\mathcal{F}) \to \Psi_{s\leftarrow t} \circ \Psi_{t\leftarrow\eta}(\mathcal{F})$ が同型であることを証明したい．そのために上の主張より少しだけ一般的な次の主張を示す：

> $Z \subset X$ という部分スキームと $X \setminus Z$ 上の（$X \setminus Z \to S$ に沿った）普遍的局所非輪状な複体 $\mathcal{G}$ で $(X \setminus Z)_\eta$ への引き戻しが $\mathcal{F}|_{(X\setminus Z)_\eta}$ と一致するものが与えられたとする．$x$ を $Z$ の幾何学的点で $s$ の上にあるものとし，$x$ がファイバー $Z \times_S s$ の中で孤立的な点とした時 $\alpha_x$ は同型.

この一般化された主張は $x$ に局所的なので，$X$ をアフィンとしてよく，さらに $X$ の $S$ 上のコンパクト化で取り替えることにより $X$ を $S$ 上固有的と仮定してもよい．$\mathcal{C} := \mathrm{cone}(\alpha)$ とする．$\mathcal{C}_x = 0$ を示したい．$y$ を $(X \setminus Z)_s$ の幾何学的点とした時，普遍的局所非輪状の定義から $\alpha_y$ の始域も終域も $\mathcal{G}_y$ と同型となり，$\mathcal{C}_y = 0$ が分かる．よって $\mathcal{C}$ はファイバー $Z_s$ に台を持っている．$x$ は $Z_s$ 上で孤立的であることから

$$\mathcal{C}|_{Z_s} = \mathcal{C}_x \oplus \mathcal{C}|_{Z_s\setminus x} \tag{$\star$}$$

と書けることが分かる．次に $\mathrm{R}f_*\mathcal{C}$ を計算する．$f$ は固有と仮定しているので固有底変換定理から $\Psi$ と $\mathrm{R}f_*$ が交換可能である．よって

$$\mathrm{R}f_*\mathcal{C} \cong \mathrm{cone}\big(\Psi_{s\leftarrow\eta}(\mathrm{R}f_{\eta*}\mathcal{F}) \to \Psi_{s\leftarrow t} \circ \Psi_{t\leftarrow\eta}(\mathrm{R}f_{\eta*}\mathcal{F})\big) \qquad (f_\eta := f \times_S \eta)$$

となる．一方で命題の $f = \mathrm{id}$ である場合の近接輪体の推移性は簡単なので，$\mathrm{R}f_*\mathcal{C} = 0$ であることが分かる．これにより $(\mathrm{R}f_*\mathcal{C})_s = 0$ が導かれ，再び固有底変換定理を用いることにより $\mathrm{R}\Gamma(Z_s, \mathcal{C}|_{Z_s}) = 0$ が分かる．一方 $x$ が孤立点である帰結 $(\star)$ から $\mathcal{C}_x = 0$ が導かれ，これが欲しかった結果だった．

最後に構成可能性を示す．特殊化射 $\eta \rightsquigarrow s$ が与えられたとすると，$S$ のネーター性より $\eta \rightsquigarrow t_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow s$ という特殊化射の有限鎖で書け，各々の特殊化射は次元を 1 だけ落とす（つまり $t_i$ の像の閉包の中で $t_{i+1}$ の像は高さ 1 の点となる）ものと仮定してよい．$\Psi_{t_i\leftarrow\eta}(\mathcal{F})$ も $\mathcal{F}$ と同じ条件を満たすような普遍的局所非輪状

複体を取ることができるので，推移性が成立する．よって $\eta \rightsquigarrow s$ が次元を 1 落とすときに帰着でき，これは有名な Deligne の有限性定理 (SGA $4\frac{1}{2}$ の Finitude, Thm 3.2) の帰結である． $\square$

この理論を特性サイクルの構成に応用しよう．以下，標数 $p > 0$ の体 $k$ を固定し，全てのスキームは $k$ 上のものとする．まず $\Lambda$ を大きくして $\psi\colon \mathbb{Z}/p \to \Lambda^\times$ という非自明な準同型があると仮定し一つ固定する．この指標に付随して Artin-Schreier 層 $\mathcal{L}_\psi$ が $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ 上に定まる．関数 $g\colon Y \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ が与えられたとき $\mathcal{L}_\psi$ の $Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$ での引き戻しを $\mathcal{L}(g)$ と書く．$\square := \mathbb{P}^{\{z\}}_k \setminus \{1\}$ とおく．包含射 $\mathrm{inc}\colon \square \setminus \{\infty\} \hookrightarrow \mathbb{A}^{\{z\}}_k$ がある．$\Omega$ を $k$ の（必ずしも有限とは限らない）拡大体として，$X_\Omega := X \otimes \Omega$ 上の関数 $h$ が与えられると射

$$hz\colon X_\Omega \times (\square \setminus \{\infty\}) \xrightarrow{(h,\mathrm{inc})} \mathbb{A}^{\{z\}}_k \times \mathbb{A}^{\{z\}}_k \xrightarrow{\mu} \mathbb{A}^{\{z\}}_k$$

が考えられる．ここで $\mu$ は積を取る射で $(x, y)$ を $xy$ に移すものである．今後 $k$ の幾何学的点 $t$ が与えられたとき $X_t$ として $X$ の $t$ への底変換を意味する．$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X_{\overline{\infty}})$ の対象を

$$\mathcal{P}_h := \Psi_{\mathrm{pr},\overline{\infty}\leftarrow\overline{\eta}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}(hz))$$

とおく．ここで $\mathrm{pr}\colon X_\Omega \times \square_\Omega \to \square_\Omega$ という射影，$\overline{\infty}, \overline{\eta}$ はそれぞれ $\square_\Omega$ の $\infty$ と生成点の上の幾何学的点で，$\mathcal{F}$ は正確には $\mathcal{F} \boxtimes \Lambda_\square$ である．$\mathcal{L}(hz)$ は $X \times \{\infty\}$ で定義されていないが，$\Psi_{\overline{\infty}\leftarrow\overline{\eta}}$ は $\overline{\eta}$ のファイバー上で定義されていれば意味を持つので $\mathcal{P}_h$ は意味を持っていることに注意する．この $\mathcal{P}_h$ は（$\mathcal{F}$ に対する）孤立特性的な関数 $h$ を動かすことによって連続的に動くということを示しているのが次の命題である：

**命題 4.4.** $T$ を $k$ 上のスキームとして，$H\colon X \times T \to \mathbb{A}^1$ が与えられていると仮定する．$t \in T$ とした時 $h_t$ を関数 $X \otimes_k k(t) \to X \times T \xrightarrow{H} \mathbb{A}^1$ として定義する．さらに次を仮定する：

> 開集合 $U \subset X \times T$ が存在して，$T$ の任意の点 $t$ において $h_t|_{U_t}$ は $\mathcal{F}|_{U_t}$ に対して孤立特性的な関数である．

この時 $T$ の任意の点 $\xi$, $t$ とその上の特殊化射 $\overline{\xi} \rightsquigarrow \overline{t}$ に対して $\mathcal{P}_{h_t}|_{U_{\overline{t}}} \cong \Psi_{\mathrm{pr}_T,\overline{t}\leftarrow\overline{\xi}}(\mathcal{P}_{h_\xi})|_{U_{\overline{t}}}$ という同型が存在する．ここで $\mathrm{pr}_T\colon X \times T \to T$ は射影である．また，$\mathcal{P}_{h_t}|_{U_{\overline{t}}}$ の台の次元は 0 である．

この命題を示す前に Katz と Laumon の結果の帰結である次の補題を示す．

**補題 4.5.** 記号は命題のものとする．

1. $(x, t) \in U \subset X \times T$ で $\mathrm{d}h_t(x) \notin \mathrm{SS}(\mathcal{F})$ と仮定すると $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz)$ は $(x, \infty, t)$ で射影 $q\colon X \times \square \times T \to \square \times T$ に対して普遍的局所非輪状である．ここで $\mathcal{L}_!(Hz)$ は $\mathcal{L}(Hz)$ を $\square \setminus \{\infty\} \hookrightarrow \square$ にそって 0 拡張したものである．
2. $T = \mathrm{Spec}(k)$ として，$H = h$ が $X$ の幾何学的点 $x$ の定める点で $\mathcal{F}$ に対して孤立特性的だとする．このとき $\dim_\Lambda(\mathcal{P}_h)_x = -\mathrm{totdim}_\Lambda(\Phi_h(\mathcal{F})_x)$.

**証明**. 1 を示す．SGA $4\frac{1}{2}$ の Finitude, Cor 2.16 から $\mathcal{F} \boxtimes \Lambda_{\square\times T}$ は $q$ に沿って普遍的局所非輪状で $\mathcal{L}_!(Hz)$ は $\infty \in \square$ のファイバー以外では滑らかなので，問題になるのは $\infty$ のファイバーのみである．そこで $W \to \square \times T$ と $W$ 上の特殊化射 $\xi \rightsquigarrow w$ で $w$ が $(\infty, t) \in \square \times T$ の上にあるものをとる．定義から $\Psi_{w\leftarrow\xi}((\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz))_W) \cong 0$ を示せばよい．もし $\xi$ が $\{\infty\} \times T$ 上の点なら $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz))_\xi = 0$ となるので示すことはない．よって $\xi$ は $(\square \setminus \{\infty\}) \times T$ 上にあるとしてよい．さて，$q_W\colon X \times W \to W$ として，次の図

式を考える：

$$\begin{tikzcd}
Y := (X \times W)_{(x,w)} \arrow[r, "H_W"] & A := (\mathbb{A}^{\{y\}} \times W)_{(h_t(x),w)} \arrow[r] & W_{(w)} \\
Y_\xi \arrow[u] \arrow[r, "H_\xi"] \arrow[ur, phantom, "\Box"] & A_\xi \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Box"] & \xi. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

この図の記号を用いて

$$\begin{aligned}
\Psi_{w \leftarrow \xi}((\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz))_W)_{(x,w)} &\cong \mathrm{R}\Gamma\big(Y_\xi, (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz))|_{Y_\xi}\big) \\
&\cong \mathrm{R}\Gamma\big(A_\xi, \mathrm{R}H_{\xi *}(\mathcal{F} \otimes H_\xi^*(\mathcal{L}_!(yz)|_{A_\xi}))\big) \cong \mathrm{R}\Gamma\big(A_\xi, \mathrm{R}H_{\xi *}(\mathcal{F}|_{Y_\xi}) \otimes \mathcal{L}_!(yz)\big)
\end{aligned}$$

と変形できる．ここで初めの同型は定義 4.2 の注から，最後の同型は $\xi$ が $\Box \setminus \{\infty\}$ の上にあることから $\mathcal{L}_!(yz)$ が $A_\xi$ で局所定数層となることによる自明な射影公式から従う．$\mathcal{F}$ が $H_W$ に沿って普遍的局所非輪状であることが示せたとしよう．すると SGA $4\frac{1}{2}$ の Finitude, Appendix Cor 2.6 より $\mathrm{R}H_{W*}\mathcal{F}$ が局所定数複体であることが分かり，特に $A$ は強ヘンゼルスキームなので定数複体である．これより，同じ結果から $\mathrm{R}H_{\xi *}(\mathcal{F}|_{Y_\xi}) \cong (\mathrm{R}H_{W*}\mathcal{F})|_{A_\xi}$ が定数複体となることが従う．よって，Katz-Laumon の非輪状定理 ([KL, 2.4.4]) から最後のコホモロジーが 0 になることが結論付けられる．あとは $\mathcal{F}$ が $H_W$ に沿って普遍的局所非輪状であることを言えばよいのだが，これは特異台の定義（正確には定理 2.1 の注）から従う．確認は読者の演習としたい．2 は Katz-Laumon の非輪状定理の代わりに Laumon のフーリエ変換の計算 [L, 2.4.2.2] を用いて同じように議論すればよい．詳しい計算は [A, 6.5] 参照. □

**注.** 竹内大智さんから教わった補題 4.5.1 の別証明を紹介したい．詳細は読者の演習としたい．底を純非分離拡大で取り替えてもよいので $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz^{p^2})$ が局所非輪状であることを示せば十分．これは $\mathrm{SS}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz^{p^2}))$ がテスト組 $(X \times \Box \times T \hookleftarrow U \to \Box \times T)$ に対して横断的であることを示せばよい．まず，$\mathbb{A}^{\{y\}} \times \Box$ 上の構成可能層 $\mathcal{L}_!(yz^{p^2})$ の特異台は底を $\mathbb{A}^{\{y\}} \times \{\infty\}$ として持ち $\mathrm{d}y$ 方向に伸びる錐（余接束でない！）と 0 切断の和集合である．（ヒント：$w = 1/z$ として変数変換し，有限射 $g\colon \mathbb{A}^{\{z,w\}} \to \mathbb{A}^{\{y,w\}}$ で $y$ を $z^{p^2} - w^{p^2-1}z$ に移すものを考える．$g^*\mathcal{L}_!(y/w^{p^2})$ は定数層の 0 拡大になっているので，特異台の押し出しとの関係 [B, Lem 2.2 (ii)] から簡単に計算できる.）すると対角射 $\Delta\colon (X \times \Box \times T) \hookrightarrow (X \times \Box \times T)^2$ は $\mathrm{SS}(\mathcal{F} \boxtimes \Lambda_{\Box \times T}) \times \mathrm{SS}(\mathcal{L}_!(Hz)) \subset \mathrm{T}^*(X \times \Box \times T)^2$ に対して横断的であることがわかる．さて，[S2, Thm 2.2] から $\mathrm{SS}((\mathcal{F} \boxtimes \Lambda_{\Box \times T}) \boxtimes \mathcal{L}_!(Hz)) = \mathrm{SS}(\mathcal{F} \boxtimes \Lambda_{\Box \times T}) \times \mathrm{SS}(\mathcal{L}_!(Hz))$ であったので，これらを組み合わせて計算するとほしい横断性が示せる．

**命題の証明.** これは近接輪体関手の推移性からの簡単な帰結である．射を $q\colon X \times \Box \times T \to \Box \times T$ を考える．命題 4.3 と補題 4.5.1 から $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz)|_{U \times \Box}$ は $q$ に対する近接輪体の推移性と構成可能性が成立することが分かる．$\tau \in T$ としたとき $\Box \times \{\tau\} \subset \Box \times T$ の生成点を $\eta_\tau$, $(\infty, t) \in \Box \times T$ を $\infty_\tau$ と書こう．すると $U_{\bar{t}}$ 上で

$$\begin{aligned}
\Psi_{\bar{t} \leftarrow \bar{\xi}}(\mathcal{P}_{h_\xi}) &\cong \Psi_{\overline{\infty}_t \leftarrow \overline{\infty}_\xi} \Psi_{\overline{\infty}_\xi \leftarrow \overline{\eta}_\xi}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(h_\xi z)) \cong \Psi_{\overline{\infty}_t \leftarrow \overline{\eta}_\xi}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz)) \\
&\cong \Psi_{\overline{\infty}_t \leftarrow \overline{\eta}_t} \Psi_{\overline{\eta}_t \leftarrow \overline{\eta}_\xi}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz)) \cong \Psi_{\overline{\infty} \leftarrow \overline{\eta}_t}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(h_t z))
\end{aligned}$$

となり，満たすべき性質が分かる．2 番目と最後の同型は $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz)$ は $\Box \setminus \{\infty\}$ 上では $q$ に対して普遍的局所非輪状であることから従う．

残るは台の次元である．前の補題のように $(x,t) \in U$ で $\mathrm{d}h_t(x) \notin \mathrm{SS}(\mathcal{F})$ をとってきたとしよう．すると $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz)$ の $(x, \infty, t)$ 周りの局所非輪状性から $(\mathcal{P}_{h_t})_{\overline{(x,t)}} \cong (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_!(Hz))_{\overline{(x,\infty,t)}} = 0$ となる．よって開集合 $U$ の取り方から $\mathcal{P}_{h_t}|_{U_{\bar{t}}}$ の台の次元は 0 となる. □

前の命題で現れたような台の次元が 0 の構成可能複体を幾何学的生成点に与えることは相対的 0 サイクルを与えることとほぼ同じである．これを定式化するために同変性を定義する．

**定義 4.6.** $X \to S$ を射とし，$s \to S$ を幾何学的点とする．$\mathcal{F}$ が $X_s$ 上の複体とした時 $\mathcal{F}$ が（$S$ 上）**同変的**とは任意の $S$ 上の同型 $\alpha\colon s \to s$ に対して $\mathcal{F}$ と $\alpha^*\mathcal{F}$ が同型であることを言う．

この同型は固定しないので同変性は $\mathcal{F}$ の性質である．さて，$S$ を整スキームとし，$\eta$ を生成点，$\overline{\eta}$ をその上の幾何学的点とする．$r\colon X_{\overline{\eta}} \to X$ とし，$X_{\overline{\eta}}$ 上の $S$ 上同変な構成可能複体 $\mathcal{F}$ で台の次元が 0 なものが与えられたとき $\mathbb{Z}[1/p]$ 係数のサイクルを以下のように定義する：

$$[\mathcal{F}]_S := \sum_{y \in r(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))} \frac{\mathrm{rk}_\Lambda(\mathcal{F}_{\overline{y}})}{[k(y) : k(\eta)]_{\mathrm{insep}}} \cdot \left[\{y\}^{\mathrm{cl}}\right]. \tag{4.1}$$

ここで $[- : -]_{\mathrm{insep}}$ は**非分離次数**であり，$\overline{y}$ は $y$ の上にある幾何学的点，$(-)^{\mathrm{cl}}$ は $X$ での閉包を意味する．これが $\overline{y}$ の選択に依らないことは同変性による．

**注.** 命題 4.4 の設定を考える．$t$ を $T$ の任意の点，$\bar{t}$ をその上の任意の幾何学的点としたとき $\mathcal{P}_{h_t}|_{U_{\bar{t}}}$ は $T$ 上同変的である．実際 $\phi\colon \bar{t} \to \bar{t}$ という $t$ 上の同型が定まると特殊化射 $\phi'\colon \bar{t} \rightsquigarrow \bar{t}$ が定まり，$\Psi_{\mathrm{pr}_T, \phi'} \cong \phi_*$ となるので，同変性は命題 4.4 から直ちに従う．

**補題 4.7.** $T$ を $\overline{\eta}$ を幾何学的生成点として持つ $d$ 次元の $k$ 上の滑らかな整スキームとして，$Y \to T$ を準有限射とする．$Y_{\overline{\eta}}$ の $T$ 上同変的な構成可能複体 $\mathcal{P}$ が与えられたとする．$t$ を $T$ の閉点として $i_t\colon t \hookrightarrow T$ を閉移入として $\bar{t}$ を $t$ の上の幾何学的点とすると

$$i_t^!([\mathcal{P}_T]_T) = [\Psi_{\bar{t} \leftarrow \overline{\eta}}(\mathcal{P})]_t$$

が $\mathrm{CH}_0(Y_t)[1/p]$ の中で成り立つ．ここで $i_t^!$ は [F, §6.6] の *Gysin* 引き戻しである．

**証明**. $T$ 上準有限なスキームの有限射 $f\colon Y \to Y'$ が与えられたとき $f_*[\mathcal{F}]_T = [f_*\mathcal{F}]_T$ が成立することがわかる．実際，体の有限次拡大 $\alpha\colon \mathrm{Spec}(L) \to \mathrm{Spec}(K)$ があって $\mathrm{Spec}(L)$ 上の局所定数層 $\mathcal{F}$ があったとき $\mathrm{rk}(\alpha_*\mathcal{F}) = [L : K]_{\mathrm{sep}} \cdot \mathrm{rk}(\mathcal{F})$ となる一方，サイクルの押し出しは $\alpha_*[\mathrm{Spec}(L)] = [L : K] \cdot [\mathrm{Spec}(K)]$ となる．この二つの違いとして (4.1) に $[-, -]_{\mathrm{insep}}$ が出てきて辻褄が合う．一方，エタール射 $g\colon T' \to T$ が与えられたとき $[\mathcal{F}_{T'}]_{T'} = g^![\mathcal{F}]_T$ であることが [F, Thm 6.2 (b)] から分かる．

さて，$y \in Y_t$ を固定して，この点に対して欲しい等式を示せばよい．EGA IV の Thm 18.12.1 と Prop 8.4.1 を用いると $t \in T$ でのエタール近傍 $t' \in T'$ で $Y \times_T T' = Y_0 \sqcup Y_1$ と分解し，$Y_0 \times_{T'} t'$ は $y$ の上にある一点スキームになっていると仮定できる．エタール射の両立性から $T$ を $t$ のエタール近傍で取り換えてもよいので，$f\colon Y \to T$ は有限で $Y \times_T t$ は一点スキーム（もちろん被約とは限らない）と仮定して補題を示せばよい．$Y \times_T t$ が一点しかないので両辺のサイクルを有限射 $f_t$ で押し出して一致を示せば十分だが，既に確認した有限射に沿った押し出しと $[-]_S$ の両立性，有限射と $\Psi_{\bar{t} \leftarrow \overline{\eta}}$ の両立性と [F, Thm 6.2 (a)] から $Y = T$ の時に示すことに帰着され，この場合は自明である． □

特性サイクルを構成していく．ここからは $\mathcal{F}$ は固定する．例えば $\mathcal{F}$ に対して孤立特性的な関数が一つも存在しなかったとすると定理 3.2 はどのような $\{m_i\}$ を取ってきても成立してしまう．つまり，当たり前のことだが，唯一性のためには孤立特性的な関数の存在が担保されなくてはならない．これを示すために構成から始める．まず，

整数 $N, D > 0$ と閉部分スキーム $C \subset \mathrm{T}^*X$ $(X := \mathbb{A}^N)$

が与えられたとする．

$$W_{N,D} := \mathbb{A}^{\{\lambda_{\underline{k}} | \underline{k} \in \mathbb{N}^N, |\underline{k}| \leq D\}}$$

とおく．記号が重くなってしまうので必要ない限り $W_{N,D}$ を $W_D$ と略す．仰々しい言葉を使えば次数が $D$ 以下の $N$ 変数多項式をパラメトライズするモジュライ空間といえるものである．そう考えると $W_D$ でパラメータ付けされる $X = \mathbb{A}^N$ 上の普遍関数族が次のように定義できる：

$$H\colon X \times W_D \to \mathbb{A}^1; \quad \left(x_1, \ldots, x_N, (\lambda_{\underline{k}})_{|\underline{k}| \leq D}\right) \mapsto \sum \lambda_{\underline{k}} \cdot \underline{x}^{\underline{k}}.$$

ここで $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{N}^N$ に対して $\underline{x}^{\underline{k}} := x_1^{k_1} \ldots x_N^{k_N}$．後でこの $H$ に命題 4.4 を適用することを念頭に置きながら代数幾何的な構成をもう少し進めよう．この関数の族を用いて次のような図式が考えられる：

(4.2)
$$\begin{tikzcd}
 & Z_C^\circ \arrow[d, hook] & \subset & Z_C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, hook] \arrow[dd, bend left, "e"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & C \arrow[d, hook] \\
X_w^\circ \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rrr, bend left, "i_{X,w}"] \arrow[rrrr, bend right, "\mathrm{d}h_w"'] & (X \times W_D)^\circ & \subset & X \times W_D \arrow[r, "\mathrm{d}H"] \arrow[d] & \mathrm{T}^*X \arrow[d, "\pi"] \\
\{w\} \arrow[rrr, "i_w"'] & & & W_D & X
\end{tikzcd}$$

ここで出てくる記号を定義したい．$H$ を $W_D$ 上の射と見たとき余接束に誘導される射 $\mathrm{T}^*(\mathbb{A}^1 \times W_D/W_D) \times_{(\mathbb{A}^1 \times W_D)} (X \times W_D) \to \mathrm{T}^*(X \times W_D/W_D) \to \mathrm{T}^*X$ を考える．$\mathrm{T}^*(\mathbb{A}^1 \times W_D/W_D)$ には $\mathbb{A}^1$ の標準座標から定まる切断 $\mathbb{A}^1 \times W_D \to \mathrm{T}^*(\mathbb{A}^1 \times W_D/W_D)$ があるのでこの二つの射を組み合わせたものが図式中の $\mathrm{d}H$ である．$W_D$ が一点なら対応する関数の外微分を余接束の切断だと思ったものであり，$\mathrm{d}H$ は $W_D$ というパラメータをつけて族にしたものと考えられる．また，

$$Z_{\mathrm{bad}} := \left\{ z \in Z_C \mid e^{-1}(e(z)) \text{ の中で } z \text{ は孤立点}\textbf{でない} \right\}$$

として定める．これを用いて $Z_C^\circ := Z_C \setminus Z_{\mathrm{bad}}$, $(X \times W_D)^\circ := (X \times W_D) \setminus Z_{\mathrm{bad}}$, $X_w^\circ := (X \times W_D)^\circ \times_{W_D} w$ と定める．Chevalley の定理 [EGA IV, 13.1.3] より $Z_{\mathrm{bad}}$ は $Z_C$ の閉集合であることが分かる．$Z_C^\circ$ は空である可能性もあることに留意する．以下 $C$ に対する**孤立特性組** $\{\alpha, h\}$ とは $\alpha \in C$ で $h$ は $X$ の関数で，$\mathrm{d}h(\pi(\alpha)) = \alpha$ かつ $\alpha$ は $\mathrm{d}h(X) \cap C$ の中で孤立点であることを言う．言い方を変えれば $\pi(\alpha) \in X$ で $h$ は $C$ に対して孤立特性的である．

**補題 4.8.** *1.* 射 $\mathrm{d}H$ は（分裂する）アフィン空間束である．

*2.* $C$ が $N$ 等次元であり，$C = \bigcup_{i \in I} C_i \subset \mathrm{T}^*X$（$C_i$ は既約成分）と書けたとする．このとき，底体 $k$ を適切な有限次分離拡大で置き換えれば，各 $i$ に対して $C_i$ の孤立特性組 $\{\zeta_i, g_i\}$ で $i \neq j$ に対して $\zeta_i \notin C_j$ となるようなものが取れる．

**証明.** $W_0 := \mathbb{A}^{\{\lambda_{\underline{0}}\}}$, $W_1 := \mathbb{A}^{\{\lambda_{\underline{k}} || \underline{k}| = 1\}}$, $W_{>1} := \mathbb{A}^{\{\lambda_{\underline{k}} | 1 < |\underline{k}| \leq D\}}$ とすると $W_D = W_0 \times W_1 \times W_{>1}$ と分解するので，$\mathrm{pr}\colon W_D \to W_0 \times W_{>1}$ をこの分解に沿った射影とする．すると $X \times W_D \xrightarrow{\mathrm{d}H \times \mathrm{pr}} \mathrm{T}^*X \times (W_0 \times W_{>1})$ は同型になることが簡単に示せるので，1 が従う．

2 の証明はアイディアが必要で [S1, Cor 3.21] から従う．以下はその証明の我々に必要な部分を取り出したものである．$D \geq 3$ と $i \in I$ を固定し，$W := W_D$, $Z := Z_{C_i}$, $Z^\circ := Z_{C_i}^\circ$ とおく．1 より $Z$ は既約

であることを注意しておく．まず $e\colon Z \to W$ が $Z$ の生成点の周りで準有限であることを示す．これには $\dim(Z \times_W Z) = \dim(Z)$ を示せば十分である．実際 $W$ を $e(Z)$ の閉包と取り換えても同じ次元の等式が成立するので $e$ は支配的としてよく，等式より生成ファイバーの次元が $0$ であることが分かる．次元の等式を示すため次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} Z \times_W Z \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\square"] & & C_i \times C_i \arrow[d] \\ (X \times W) \times_W (X \times W) \arrow[rr, "\mathrm{d}H \times \mathrm{d}H"] & & \mathrm{T}^*X \times \mathrm{T}^*X \end{tikzcd}$$

下の水平射は

$$(X \times X) \times W \to \mathrm{T}^*X \times \mathrm{T}^*X; \quad ((x,y),w) \mapsto (\mathrm{d}h_w(x), \mathrm{d}h_w(y))$$

と同型であり，$D \geq 3$ ならアフィン空間束になっていることが 1 と同様の計算で分かる．$C_i \times C_i$ の次元は $2\dim(X)$ となっているので，$\dim(Z \times_W Z) = \dim(W) = \dim(Z)$ となることが分かり $e$ が $Z$ に生成的に準有限であることがわかる．

さて，$C' := \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} C_j$ とすれば $\mathrm{d}H$ が全射な平坦射であることから $Z \setminus \delta^{-1}(C')$ は空でない $Z$ の開集合となる．よって，$e$ が誘導する射 $e'\colon Z \setminus \delta^{-1}(C') \to W_D$ も生成的に準有限である．$\dim(Z) = \dim(W_D)$ から $W_D$ の空でない開集合 $V$ が存在して $e'^{-1}(V) \to V$ が全射な有限射となる．$W_D$ は $k$ 上なめらかなので $V$ の中には $k$ の有限次分離拡大に値を持つ点が存在し，その点に対応する関数を取ってくれば題意を満たす． $\square$

定理の証明を完成させよう．まず，定理 3.2 の主張は局所的なので $X$ をアフィンとしてよい．$i\colon X \hookrightarrow \mathbb{A}^N$ を取ってくる．補題 4.8.2 を $C = \mathrm{SS}(i_*\mathcal{F})$ として適用すると，$k$ の有限次分離拡大 $k'$ と $X \otimes_k k'$ 上の孤立特性組で補題の条件を満たすようなものが取れる．定理 3.2 の主張はエタール局所的であるので，$X$ を $X \otimes_k k'$ に取り換えてもよい．よって，補題の条件を満たすような孤立特性組 $\{\zeta_i, g_i\}_{i \in I}$ が $X$ **上**に取れると仮定してよい．大切なのであえて強調するが Beilinson の定理より $\mathrm{SS}(\mathcal{F})$ は等次元 $N$ の閉部分スキームになっていることから補題が適用でき，欲しい孤立特性組の存在が担保されるのである．このように関数が存在していれば唯一性は立ち所に示せる．つまり

$$m_i := -\frac{\mathrm{totdim}_\Lambda \Phi_{g_i}(\mathcal{F})_{\pi(\overline{\zeta}_i)}}{\deg \langle C_i, \mathrm{d}g_i \rangle_{\mathrm{T}^*X, \zeta_i}} = \frac{\dim(\mathcal{P}_{g_i})_{\pi(\overline{\zeta}_i)}}{\deg \langle C_i, \mathrm{d}g_i \rangle_{\mathrm{T}^*X, \zeta_i}}$$

とする**以外ない**のである．これを用いて $\mathrm{CC}' := \sum m_i[C_i]$ と置き，Milnor 公式を満たすことを示せば十分である．そのためテスト組 $X \leftarrow U \xrightarrow{h} \mathbb{A}^1$ を取ってくる．Milnor 公式はエタール射と両立的，つまり $h$ が $X$ の関数 $h'$ から来ていたとすると $h'$ に対する Milnor 公式の成立と $h$ に対するものは同値である．よって，$X$ 上で構成した $\mathrm{CC}'$ と同じ関数 $\{g_i\}$ を使って $U$ 上で構成する $\mathrm{CC}'$ は同じものとなり，$U = X$ として Milnor 公式を示せば十分である．$X = \mathbb{A}^N$ として証明すれば十分．

孤立特性組 $\{\alpha, h\}$ が与えられたとき Milnor 公式を満たすことを示そう．そのため以後 $D \geq \max_{i \in I}\{\deg(h), \deg(g_i)\}$ と取って固定する．$D$ の取り方から $w_h$, $w_i$ $(i \in I)$ という $W_D$ の $k$ 有理点が存在して $h_{w_h} = h$, $h_{w_i} = g_i$（命題 4.4 の記号を用いた）となる．つまり $H$ によって $h$ と $g_i$ を連続変形する関数の族としてつないだわけである．$\{\alpha, h\}$, $\{\zeta_i, g_i\}$ が孤立特性組であったことを思い出すと $(\pi(\alpha), w_h)$, $(\pi(\zeta_i), w_i) \in X \times W_D$ は $Z^\circ_{\mathrm{SS}(\mathcal{F})}$ に属していることが分かる．さらに構成より $Z^\circ_{\mathrm{SS}(\mathcal{F})} \to W_D$ は準有限である．このことから命題 4.4 を $(U, T) = ((X \times W_D)^\circ, W_D)$ として適用できる．よって，$\xi$ を $W_D$ の生成点としたとき $\mathcal{P}_{h_\xi}$ は台の次元が $0$ の $X^\circ_{\overline{\xi}}$ の構成可能複体で任意の $w \in W_D$ に対して $\Psi_{\overline{w} \leftarrow \overline{\xi}}(\mathcal{P}_{h_\xi}) = \mathcal{P}_{h_w}$ となる．こ

こまで準備すれば交叉理論を少し使うだけで証明は簡単である．$w \in W_D$ を任意にとる．大きな図式 (4.2) を見ながら計算すると

$$(\mathrm{d}h_w)^!(\mathrm{CC}') = i^!_{X,w}\,\mathrm{d}H^!(\mathrm{CC}') = i^!_{X,w}\,\delta^*(\mathrm{CC}') = i^!_w\,\delta^*(\mathrm{CC}') \tag{4.3}$$

となる．ここで始めの等号は推移性，二つ目は [F, Prop 6.6 (b)], 三番目は [F, Prop 6.2 (c)] から分かる．

さて，補題 4.7 の記号を用いる．補題 4.5.2 から $[\mathcal{P}_h]_{\{w_h\}}$ の $\pi(\alpha)$ における値が Milnor 公式で消滅輪体が現れる側の式と一致している．一方で $\mathrm{CC}(\mathcal{F}) := \mathrm{CC}'$ としたときの交点数が現れる側の式は $\mathrm{d}h^!_{w_h}(\mathrm{CC}')$ と等しい．つまり $\{\alpha, h\}$ に対する Milnor 公式を確かめることは $[\mathcal{P}_h]_{\{w_h\}} = \mathrm{d}h^!_{w_h}(\mathrm{CC}')$ を確かめることと同値である．ここで左辺 $[\mathcal{P}_h]_{\{w_h\}}$ は補題 4.7 から $i^!_{w_h}[\mathcal{P}_{h_\xi}]_{W_D}$ と一致しており，右辺 $\mathrm{d}h^!_{w_h}(\mathrm{CC}')$ は (4.3) より $i^!_{w_h}\,\delta^*(\mathrm{CC}')$ と一致している．これらを合わせると $[\mathcal{P}_{h_\xi}]_{W_D} = \delta^*\mathrm{CC}'$ を確認することに帰着される．

補題 4.5.1 から $[\mathcal{P}_{h_\xi}]_{W_D} = \sum m'_i\,\delta^*([C_i])$ と書けることが分かる．よって $i^!_{w_i}([\mathcal{P}_{h_\xi}]_{W_D})_{\pi(\zeta_i)} = i^!_{w_i}(\delta^*\mathrm{CC}')_{\pi(\zeta_i)}$ であることを示せばよいことが分かる．これは

$$\begin{aligned} i^!_{w_i}(\delta^*\mathrm{CC}')_{\pi(\zeta_i)} &= \big((\mathrm{d}g_i)^!(\mathrm{CC}')\big)_{\pi(\zeta_i)} = \big((\mathrm{d}g_i)^!(m_i[C_i])\big)_{\pi(\zeta_i)} = \dim(\mathcal{P}_{g_i})_{\pi(\zeta_i)} \\ &= [\Psi_{w_i \leftarrow \xi}(\mathcal{P}_{h_\xi})]_{\pi(\zeta_i)} = i^!_{w_i}([\mathcal{P}_{h_\xi}]_{W_D})_{\pi(\zeta_i)} \end{aligned}$$

から分かり，Milnor 公式が成立すると結論付けられる．

**注．** 正確にはここまでで証明されたことは $\mathbb{Z}[1/p]$ 係数の特性サイクルが構成できるということである．$k$ が完全の場合これが実際に整数になっていることは微分が特異台と横断的に交差するような関数を取ってくることで示される．証明はここまでの議論と独立で [S1, §5.4] を参照されたい．

# 5 おわりに

研究集会では谷口隆先生が特性サイクルがどのように数論に役立つ可能性を持っているかとの質問をくださった．とても大切な問いかけだと思うが，恥ずかしながらあまり説得力のある答えをできなかったのが心残りであった．この概説の終わりに私ながらの特性サイクルを研究する数論的意義について考察したい．

まず 1 つ目として，正標数体上のコホモロジー論自体は本当に知りたいことの始めのステップであるということである．本来は $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上の多様体について知りたいのは言うまでもない．例えば $\mathbb{Q}$ 上の多様体が与えられたときそのコホモロジーの各素点での分岐がどうなっているかを幾何学的に計算する術があればラングランズ・プログラムなどでも役に立つであろう．このような問題は混標数離散付値環上の問題に置き換えられるが，$\mathbb{F}_1$ がない（見つかっていない？）ことから統一的な取り扱いは難しい．一方で正標数体上は満足な幾何学があるので，まずそこで理論を完成させて混標数の場合に理論を拡張するというのが標準的な道筋だろう．実際，正標数の場合ですら当初は全くとっかかりがなかったわけだが，微分方程式論で現れる特性方程式や wave front set から動機を得て特性多様体の理論が複素幾何で発展し，類似のものが正標数体上でも実現できることが明らかになったということは驚き以外の何物でもない．残念ながら，究極の目的の混標数の幾何における特性サイクルの理論は斎藤毅先生などが精力的に研究なさっているものの，全体像がまだ見えているとはいいがたいだろう．真に数論的な状況下での特性サイクルの理論はこれからの重要課題ともいえる．

このように究極の目標から考えると特性サイクルの理論は発展途上なわけだが，既に重要な応用がいくつもある．例えば特性サイクルの理論のもっとも簡単なケースである古典的な分岐理論は $\varepsilon$ 因子の積公式を証明するのに使われ，それは L. Lafforgue のラングランズ対応の証明の鍵になっている．また，W. Sawin の Quantitative sheaf theory [Sw+] では特性サイクルを本質的に用いる．この理論を用いると有限体上の（分

岐を抑えた）局所系の個数の有限性など従来は保形表現の理論を用いることでしか示せなかった数論的な情報を引き出せる．数論的というよりホモトピー論的な結果ではあるが，Achinger [Ac] は特性サイクルを用いることで正標数体上の滑らかなアフィンスキームは $\mathrm{K}(\pi, 1)$ 空間であることを示した．この様に特性サイクルはコホモロジー論の基本的な道具としてこれからどんどん重要性が増していくに違いない．

## 謝辞

この概説を書くにあたり斎藤毅先生，谷田川友里さん，竹内大智さんが多くのコメントや助言をくださいました．それにより本論説が格段に読みやすくなったものと思いますが，それのみならず私自身いろいろ勉強させていただきました．この場を借りて感謝したいと思います．

## 参考文献

[AS] Abbes, A., Saito, T.: *The characteristic class and ramification of an $\ell$-adic étale sheaf*, Invent. Math. **168**, p.567–612 (2007).

[A] Abe, T.: *Ramification theory from homotopical point of view, I*, preprint `arxiv.org/abs/2206.02401v1`.

[Ac] Achinger, P.: *Wild ramification and $K(\pi, 1)$ spaces*, Invent. Math. **210**, p.453–499 (2017).

[B] Beilinson, A.: *Constructible sheaves are holonomic*, Selecta Math. **22**, p.1797–1819 (2016).

[D] Deligne, P.: *Notes sur Euler-Poincaré: brouillon project*, Feb. 8th, 2011.

[F] Fulton, W.: *Intersection theory*, second edition, Springer (1998).

[I] Illusie, L.: *From Pierre Deligne's secret garden: looking back at some of his letters*, Japan. J. Math. **10**, p.237–248 (2015).

[K] Kato, K.: *Class field theory, $\mathcal{D}$-modules, and ramification on higher dimensional schemes, Part I*, Amer. J. Math. **116**, p.757–784 (1994).

[KS] Kato, K., Saito, T.: *Ramification theory for varieties over a perfect field*, Ann. Math. **168**, p.33–96 (2008).

[KL] Katz, N., Laumon, G.: *Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles* Publ. Math. IHES **62**, p.145–202 (1985).

[L] Laumon, G.: *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Publ. Math. IHES **65**, p.131–210 (1987).

[LZ] Lu, Q., Zheng, W.: *Categorical traces and a relative Lefschetz-Verdier formula*, Forum Math. Sigma **10**, p.1–24 (2022).

[O] Orgogozo, F.: *Modifications et cycles proches sur une base générale*, Int. Math. Res. Not. **2006**, (2006).

[S1] Saito, T.: *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*, Invent. Math. **207**, p.597–695 (2017).

[S1'] Saito, T.: *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*, preprint `arxiv.org/abs/1510.03018v1`.

[S2] Saito, T.: *Characteristic cycle of the external product of constructible sheaves*, Manuscripta Math. **154**, p.1–12 (2017).

[S3] Saito, T.: *Characteristic cycles and the conductor of direct image*, JAMS **34**, p.369–410 (2021).

[Sw+] Sawin, W., Forey, A., Fresán, J., Kowalski, E.: *Quantitative sheaf theory*, JAMS **36**, p.653–726 (2023).

[T] Takeuchi, D.: *Characteristic epsilon cycles of $\ell$-adic sheaves on varieties*, preprint `arxiv.org/abs/1911.02269`.

[YZ] Yang, E., Zhao, Y.: *Cohomological Milnor formula and Saito's conjecture on characteristic classes*, Invent. Math. **240**, p.123–191 (2025).

[Y] Yatagawa, Y.: *Singular support and Characteristic cycle of a rank one sheaf in codimension two*, preprint `arxiv.org/abs/2206.02989`.