Local ε-conjecture and p-adic differential equations

石田　哲也（佐賀大学）
Tetsuya Ishida (Saga University)

概要

$G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進ガロア表現に対して，加藤和也氏と深谷太香子氏は局所イプシロン予想を定式化した．中村健太郎氏はこの予想を，p 進ガロア表現の一般化である Robba 環上のファイガンマ加群に対して定式化した．本稿では，このファイガンマ加群に対する局所イプシロン予想の文脈で，Bernadette Perrin-Riou 氏が定義した big exponential map を定式化し，その補完公式を説明する．これは中村健太郎氏との共著論文 [10] の内容の概要を，講演の流れに沿って説明したものである．

1　イントロダクション

p 進ガロア表現に関する重要な予想として，（p 進）局所イプシロン予想がある．そもそも p 進ガロア表現は多くの情報を持つ数論的な対象である．例えば，代数多様体の様々な幾何学的な情報が，そのエタールコホモロジーという p 進ガロア表現に反映される．エタールコホモロジーとして得られる p 進ガロア表現は de Rham 表現であることが知られているが，de Rham 表現とは限らない一般の p 進ガロア表現に関する予想として，加藤および加藤–深谷による局所イプシロン予想がある [11][8]．局所イプシロン予想の主張は，p 進ガロア表現 M に対してガロアコホモロジーから定義される基本直線と呼ばれる一次元空間 $\Delta_L(M)$ を考えるとき，その自然な基底が整合的に存在するというものである．この基底は重要で，同じく加藤による，ゼータ同型の関数等式（大域イプシロン予想）に現れる補正項の局所因子として現れる．

ファイガンマ加群は Fontaine によって定義された p 進ガロア表現の一般化であり [9]，p 進ガロア表現それ自体を調べる強力な手法でもある．実際，Colmez による p 進局所 Langlands 対応の構成にはファイガンマ加群が用いられている．また，中村は局所イプシロン予想を相対 Robba 環上のファイガンマ加群に対して一般化する形で定式化し議論することで，三角表現という広いクラスの表現に対する局所イプシロン予想を証明している．

[10] では，Perrin–Riou の big exponential 射をファイガンマ加群に対する局所イプシロン予想の文脈で定式化し，その補完公式を証明した．そもそも big exponential 射は，

Coleman による p 進 L 関数の円単数からの構成を大幅に一般化する形で crystalline 表現に対して Perrin–Riou によって発見された写像であり [18]，その後 Colmez によって de Rham 表現に対して一般化され [5]，その後 Berger によるファイガンマ加群を介した研究を経て [2]，中村によって de Rham ファイガンマ加群に対して一般化された [15]．中村による一般化では，de Rham なファイガンマ加群 M を取るとき，M 自身の一次岩澤コホモロジーと，Berger により定義された M に付随する p 進微分方程式 N の一次岩澤コホモロジーの間の写像として big exponential 射は定式化され，これが $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu^{p^\infty})/\mathbf{Q})$ の de Rham な指標捻りで得られる族 $(M(\eta))_{\eta \in \hat{\Gamma}_{L,\mathrm{dR}}}$ の Bloch–加藤射 $\exp, \exp^*$ を補完することが示されていた．[10] では，この中村の big exponential 射を M と N それぞれの円分変形に対する基本直線の間の同型写像

$$\mathrm{Exp}(M) : \Delta_L^{\mathrm{Iw}}(N) \xrightarrow{\sim} \Delta_L^{\mathrm{Iw}}(M)$$

として改めて定式化し，さらにこの同型が適切な意味で族 $(M(\eta))_{\eta \in \hat{\Gamma}_L}$ の（局所イプシロン予想に現れる）整合的な基底を補完することを証明した．

本稿では講演の流れに沿って，上述した [10] における主定理の定式化を説明し，その証明の概略を述べることを目標とする．

ここで，本稿で用いる記法についてまとめておく．p は簡単のため奇素数とする．$\mathbf{Q}_p$ の代数的閉包 $\overline{\mathbf{Q}}_p$ を一つ固定する．L は $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体とし，その整数環を $\mathcal{O}_L$ で表す。μ_{p^∞} で 1 の p 冪乗根全体がなす群を表す．1 の原始 p^n 乗根の系列 $(\zeta_{p^n})_{n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}}$ で，任意の n で $(\zeta_{p^{n+1}})^p = \zeta_{p^n}$ を満たすものを一つ固定する．$\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ とし，その位相的生成元 γ_0 を一つ固定する．$\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ で L に係数をもつ解析的岩澤代数，すなわち $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L[[\Gamma]])$ の Berthelot 生成ファイバーの大域切断を表す．$\chi : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_p^\times$ で p 進円分指標を表す．$\hat{\Gamma}_L$ で L に値を持つ Γ の連続指標全体がなす集合を表し，その部分集合 $\hat{\Gamma}_{L,\mathrm{dR}}$ を

$$\hat{\Gamma}_{L,\mathrm{dR}} = \left\{ \chi^i \delta : i \in \mathbf{Z}, \delta \in \hat{\Gamma}_L \text{ は有限指標} \right\}$$

で定める．

2 Robba 環上のファイガンマ加群

L に係数をもつ Robba 環 $\mathcal{R}_L$ を

$$\mathcal{R}_L = \left\{ \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n : a_n \in L, [r, 1) \text{ で収束}(\exists r \in (0,1)) \right\}$$

で定義する．$\mathcal{R}_L$ には Γ が次のように作用する：

$$\gamma(\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n ((1+T)^{\chi(\gamma)} - 1)^n.$$

加えて $\mathcal{R}_L$ には，次のフロベニウス作用 φ が備わっている：

$$\varphi(\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n T^n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n((1+T)^p-1)^n.$$

φ は L 代数の準同型になる．これに関して $\mathcal{R}_L$ は $\mathcal{R}_L = \oplus_{i=0}^{i=p-1}(1+T)^i\varphi(\mathcal{R}_L)$ と分解することがわかる．そこで，$x \in \mathcal{R}_L$ に対して分解 $x = \sum_{i=0}^{i=p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)$ を用いて写像 $\psi : \mathcal{R}_L \to \mathcal{R}_L$ を $\psi(x) = x_0$ と定義する．

次がファイガンマ加群の定義である．なお，Robba 環以外の係数環を持つファイガンマ加群を考えることも重要だが，本稿では Robba 環上のファイガンマ加群のみを扱う．

Definition 1　$\mathcal{R}_L$ 上のファイガンマ加群とは，有限生成自由 $\mathcal{R}_L$ 加群 M と，M 上の半線形連続写像 $\varphi_M : M \to M$ と，M への連続半線形群作用 $\Gamma \times M \to M$ との三つ組で，以下を満たすもの．

1. M は $\mathcal{R}_L$ 上 $\varphi_M(M)$ で生成される．
2. φ_M と Γ 作用は可換．

本稿では p 進ガロア表現を直接扱うことはないものの，次の重要な定理はファイガンマ加群を考察する動機を与える．

Theorem 2（[9],[4],[1],[12]）　$G_{\mathbf{Q}_p}$ の連続線形な作用を持つ有限次元 L ベクトル空間の圏から，$\mathcal{R}_L$ 上のファイガンマ加群のなす圏への，忠実充満な関手が存在する．

上の定理に関連して，階数 1 のファイガンマ加群が以下のように $\mathbf{Q}_p^\times$ 上の連続指標で分類されることを紹介する [6]．$\eta : \mathbf{Q}_p^\times \to L^\times$ を連続群準同型とする．このとき，形式的な元 e_η を基底にもつ $\mathcal{R}_L$ 加群 $\mathcal{R}_L(\eta) := \mathcal{R}_L e_\eta$ に対し

$$\varphi_{\mathcal{R}_L(\eta)}(fe_\eta) := \varphi(f)\eta(p)e_\eta,\ \gamma(fe_\eta) := \gamma(f)\eta(\chi(\gamma))e_\eta$$

と定めると，これはファイガンマ加群となっている．実は階数 1 のファイガンマ加群はこのような形のものに限ることがわかる．なお，$\eta(p) \in \mathcal{O}_L^\times$ の場合，η を局所類体論により一次元表現とみなすと，η に上述の関手で対応するファイガンマ加群が $\mathcal{R}_L(\eta)$ となっている．

3　ファイガンマ加群に対する局所イプシロン予想

本節では，中村による，Robba 環上のファイガンマ加群に対する局所イプシロン予想の一部を紹介する．具体的には，主定理の定式化に必要な，de Rham なファイガンマ加群の円分変形族という限られた場合の予想を述べる．紙面の都合上，p 進表現に対する元々の予想 [11][8] や，リジッド解析的なファイガンマ加群の族に対する正確な予想 [16] は割愛する．

まず，p 進表現のガロアコホモロジー及び岩澤コホモロジーを一般化する，ファイガンマ加群の複体二種類を導入する．ファイガンマ加群 M に対し，L 上の線形空間からなる複体として $\mathrm{C}^\bullet_{\varphi,\gamma_0}(M)$ を

$$\mathrm{C}^\bullet_{\varphi,\gamma_0}(M) := [M \xrightarrow{(\gamma_0-1,\varphi_M-1)} M \oplus M \xrightarrow{(\varphi_M-1)+(1-\gamma_0)} M]$$

と定義する．更に，$\mathcal{R}^+_L(\Gamma)$ 上の加群からなる複体として $\mathrm{C}^\bullet_\psi(M)$ を

$$\mathrm{C}^\bullet_\psi(M) := [M \xrightarrow{\psi_M-1} M]$$

と定義する．ここで注意として，M への $\mathcal{R}^+_L(\Gamma)$ 加群としての構造は Γ 作用を連続線形に延長するものとして定義されることを挙げておく．これらの i 番目のコホモロジー群をそれぞれ $\mathrm{H}^i_{\varphi,\gamma}(M)$ と $\mathrm{H}^i_\psi(M)$ で表す．M が p 進表現 V に付随する場合，各 $i \in \mathbf{Z}$ に対し自然な同型 $\mathrm{H}^i_{\varphi,\gamma}(M) \cong \mathrm{H}^i(\mathbf{Q}_p, V)$ および $\mathrm{H}^i_\psi(M) \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$ が成立する [14][13].

局所イプシロン予想の定式化の基礎には，ガロアコホモロジーをある意味で束ねた，次の基本直線がある．まず $\mathrm{C}^\bullet_{\varphi,\gamma_0}(M)$ について，そのコホモロジーは有限次元 [14]，特に完全複体になるので，行列式関手を取ることで次数付き一次元 L ベクトル空間 $\Delta_L(M)$ が定義できる：

$$\Delta_{L,1}(M) := \mathrm{Det}_L(\mathrm{C}^\bullet_{\varphi,\gamma_0}(M)).$$

また，$\mathrm{C}^\bullet_\psi(M)$ についても，これは完全複体になることが示されており [13]，行列式関手を取ることで次数付き可逆 $\mathcal{R}^+_L(\Gamma)$-加群 $\Delta^{\mathrm{Iw}}_L(M)$ が定義できる：

$$\Delta^{\mathrm{Iw}}_{L,1}(M) := \mathrm{Det}_{\mathcal{R}^+_L(\Gamma)}(\mathrm{C}^\bullet_\psi(M)).$$

注意として，$\Delta^{\mathrm{Iw}}_{L,1}(M)$ は以下の主張より $(M \otimes_{\mathcal{R}_L} \mathcal{R}_L(\eta))_{\eta\in\hat{\Gamma}_L}$ に対する $\Delta_{L,1}$ の族とみなせる：任意の連続指標 $(\eta : \Gamma \to L^\times) \in \hat{\Gamma}_L$ に対し，自然な同型

$$\mathrm{can}_\eta : \Delta^{\mathrm{Iw}}_{L,1}(M) \otimes_{\mathcal{R}^+_L(\Gamma), f_\eta} L \xrightarrow{\sim} \Delta_{L,1}(M \otimes_{\mathcal{R}_L} \mathcal{R}_L(\eta))$$

が存在する．ただし左辺の底変換は $f_\eta : \mathcal{R}^+_L(\Gamma) \to L; [\gamma] \mapsto \eta(\gamma)^{-1}$ に関するものである．具体的な can_η の構成については，[16] を参照のこと．なお，講演では省略したが，正確な基本直線の定義には以下のように $\Delta_{L,1}(M)$ を修正したものを採用する必要がある：

$$\Delta_L(M) = \Delta_{L,1}(M) \otimes \Delta_{L,2}(M),$$

$$\Delta_{L,2}(M) = \left\{ x \in \det_{\mathcal{R}_L}(M) : \varphi_{\det_{\mathcal{R}_L}(M)}(x) = \eta_{\det_{\mathcal{R}_L}(M)}(p)x, \gamma(x) = \eta_{\det_{\mathcal{R}_L}(M)}(\chi(\gamma))(x) \right\}.$$

以降，不正確ではあるが煩雑さを避けるため，次数付き可逆加群の次数を無視し，また $\Delta_L(M)$ と $\Delta_{L,1}(M)$ を区別せずに議論する．

M が de Rham な場合，自然な基本直線の自明化 $\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M) : L \xrightarrow{\sim} \Delta_L(M)$ が定義できる．そもそも de Rham 性について補足すると，$\mathcal{R}_L$ 上のファイガンマ加群 M に対し，$\dim_L(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(M)) \leqslant \mathrm{rank}_{\mathcal{R}_L} M$ を満たす整数で添字づけられた減少フィルトレーション付き L ベクトル空間 $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(M)$ が定義でき，この不等式が等式の場合に M を de Rham であると定義する．そして M が de Rham な場合に，自然な同型 $\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M) : L \xrightarrow{\sim} \Delta_L(M)$ を，様々な不変量を組み合わせて定義することができる．ここでは $\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M)$ の定義に用いられる不変量のいくつかにのみ言及するが，その正確な定義は [16] で与えられている．

- 一般化された Bloch–加藤射 $\exp_M : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(M)/\mathrm{Fil}^0(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(M)) \to \mathrm{H}^1_{\varphi,\gamma}(M)$ および $\exp^*_{M^*} : \mathrm{H}^1_{\varphi,\gamma}(M) \to \mathrm{Fil}^0(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(M))$ および $\exp_{f,M} : \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(M) \to \mathrm{H}^1_{\varphi,\gamma}(M)$: p 進表現の場合に定義される Bloch–加藤射を，中村がファイガンマ加群に対して一般化したもの [16]．本稿では用いないが，注意として $\exp_M$ や $\exp_{f,M}$ については de Rham とは限らない一般のファイガンマ加群に対して定式化されることを挙げておく．
- Γ 定数 $\Gamma(M) \in \mathbf{Q}$: これは M の Hodge–Tate 重さの多重集合によって決まる不変量である．ここで Hodge–Tate 重さは $\mathrm{Fil}^i(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(M))/\mathrm{Fil}^{i+1}(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(M)) \neq 0$ なる整数 i として定義される．
- ε 定数 $\varepsilon(M) \in \big(L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})\big)^\times$ [7] : 固定した $\mathbf{Q}_p$ の加法指標 $1/p^n \mapsto \zeta_{p^n}$ と $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(M)$ とから定義される．詳しい定義は割愛するが，その定義は M そのものではなく $M[1/t]$ に依存することを後で用いる，ただし $t := \log(1+T) \in \mathcal{R}_L$．

主定理の設定に現れる局所イプシロン予想は，de Rham なファイガンマ加群 M に対して，族 $\big((\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M \otimes_{\mathcal{R}_L} \mathcal{R}_L(\eta)))\big)_{\eta \in \hat{\Gamma}_{L,\mathrm{dR}}}$ が以下の意味で補完されることを主張する．

Conjecture 3（[16, Conjecture 3.8]） M を de Rham な $\mathcal{R}_L$ 上のファイガンマ加群とする．このとき，次を満たす同型 $\varepsilon_L^{\mathrm{Iw}}(M) : \mathcal{R}_L^+(\Gamma) \to \Delta_L^{\mathrm{Iw}}(M)$ が一意的に存在する：任意の de Rham 指標 $(\eta : \Gamma \to L^\times) \in \hat{\Gamma}_{L,\mathrm{dR}}$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\varepsilon_L^{\mathrm{Iw}}(M)\otimes_\eta \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M(\eta))"] & \\ \Delta_L^{\mathrm{Iw}}(M) \otimes_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma),\eta} L \arrow[rr, "\mathrm{can}_\eta"'] & & \Delta_L(M(\eta)). \end{tikzcd}$$

は可換である．

本節冒頭で述べたように，実際の予想はより一般のリジッド解析的なファイガンマ加群の族に対して定式化されている．本稿での予想は，de Rham な M に対する族 $(M \otimes_{\mathcal{R}_L} \mathcal{R}_L(\eta))_{\eta \in \hat{\Gamma}_L}$ を特に考えていることになる．予想について知られている主な結果の

一部に，三角表現の場合 [16] と二次元表現の場合 [17][19] がある：他の結果についてはたとえば [10] を参照のこと．

4　主定理

本節では主定理の主張を述べ，その証明についてごく簡単に概略を示す．はじめに主定理の定式化に登場する，de Rham なファイガンマ加群に付随する p 進微分方程式について述べる．その後主定理の主張を述べ，その証明の流れを説明する．

Berger は，de Rham ファイガンマ加群を補正することで p 進微分方程式を構成した．$\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ の元 ∇ を $\nabla := \log\left(\gamma_0^{p-1}\right)/\log\left(\chi(\gamma_0^{p-1})\right)$ で定義する．$t = \log(1+T) \in \mathcal{R}_L$ を思い出しておく．

Theorem 4（[3, Theorem III.2.3]）　M を de Rham なファイガンマ加群とする．このとき，以下の二条件を満たす部分ファイガンマ加群 $N \subseteq M[1/t]$ がただ一つ存在する．

- $N[1/t] \subseteq M[1/t]$.
- $\nabla(N) \subseteq tN$.

N は ∇/t を接続とするフロベニウス作用付きの p 進微分方程式となっており，以降これを M に付随する p 進微分方程式と呼ぶ．上記の特徴づけから，$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(N) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(M)$ であること，特に N もまた de Rham になることがわかる．またその構成から，N の Hodge–Tate 重さはすべて 0 になることもわかる．注意だが，N は本稿の主定理を定式化するのに必要となる一方，N は一般に p 進ガロア表現に対応しないため，主定理はファイガンマ加群に対する局所イプシロン予想の文脈でのみ意味を持つ．

次が [10] の主定理であり，de Rham な M とこれに付随する p 進微分方程式 N について，二種類の族 $\left(\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M \otimes_{\mathcal{R}_L} \mathcal{R}_L(\eta))\right)_{\eta\in\hat{\Gamma}_{L,\mathrm{dR}}}$ と $\left(\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(N \otimes_{\mathcal{R}_L} \mathcal{R}_L(\eta))\right)_{\eta\in\hat{\Gamma}_{L,\mathrm{dR}}}$ の違いが以下の意味で補完されることを主張する．

Theorem 5（[10, Theorem 4.1.1]）　M を de Rham な $\mathcal{R}_L$ 上のファイガンマ加群とし，N を M に付随する p 進微分方程式とする．このとき，次を満たす同型 $\mathrm{Exp}(M) : \Delta_L^{\mathrm{Iw}}(N) \to$

$\Delta_L^{\mathrm{Iw}}(M)$ が一意に存在する：任意の de Rham 指標 $(\eta : \Gamma \to L^\times) \in \hat{\Gamma}_{L,\mathrm{dR}}$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& L \arrow[dl, "\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(N(\eta))"'] \arrow[dr, "\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M(\eta))"] & \\
\Delta_L(N(\eta)) & & \Delta_L(M(\eta)) \\
\Delta_L^{\mathrm{Iw}}(N) \otimes_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma),\eta} L \arrow[u, "\mathrm{can}_\eta"] \arrow[rr, "\mathrm{Exp}(M)\otimes f_\eta"'] & & \Delta_L^{\mathrm{Iw}}(M) \otimes_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma),\eta} L \arrow[u, "\mathrm{can}_\eta"']
\end{tikzcd}$$

は可換である．

主定理は，局所イプシロン予想と p 進微分方程式の理論とを結びつけているとみなせる．実際主定理より，$\varepsilon_L^{\mathrm{Iw}}(N)$ が存在すれば，$\varepsilon_L^{\mathrm{Iw}}(M) = \mathrm{Exp}(M) \circ \varepsilon_L^{\mathrm{Iw}}(N)$ が従う．すなわち，主定理の系として，M に対する局所イプシロン予想が N に対する局所イプシロン予想に帰着できることがわかる．

5　主定理の証明の概要

主定理の証明の流れと，証明の鍵となる定理を述べる．

まず主定理に現れる $\mathrm{Exp}(M)$ の定義を概観し，[15] の主定理の一つである $\delta(M)$ 定理がどう用いられるかを説明する．そもそも，[15] では十分大きな $h \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対し写像

$$\mathrm{Exp}_{M,h} : N^{\psi=1} \to M^{\psi=1}$$

が，$((\nabla - (h-1)) \cdots (\nabla - 1) \cdot \nabla)(N) \subseteq M$ の制限として定義されていた．（この定義は，$\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ の作用でクリスタリン表現に対する big exponential 射を記述できるという [2] の指摘を受けたものである [15, Remark. 3.8]．）$\mathrm{Exp}_{M,h}$ は同型

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(N^{\psi=1}) \xrightarrow{\sim} \det_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(\mathrm{Exp}_{M,h})\mathrm{Det}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(M^{\psi=1})$$

を誘導するが，$\delta(M)$ 定理は

$$\begin{aligned}
&\det_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(\mathrm{Exp}_{M,h}) \\
&\quad = \left(\prod_{i=0}^{\mathrm{rk}M} \prod_{j_i=0}^{h-h_i-1} \nabla_{h_i+j_i}\right) \mathrm{char}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(N/(\psi-1)N)^{-1} \mathrm{char}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(M/(\psi-1)M)
\end{aligned}$$

という主張のため，さらに同型

$$\mathrm{char}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(N/(\psi-1)N)\mathrm{Det}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(N^{\psi=1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{char}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(M/(\psi-1)M)\mathrm{Det}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(M^{\psi=1})$$

を誘導する．特性イデアルが行列式の逆イデアルとして記述できることから，同型

$$\begin{aligned}&\mathrm{Det}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(N/(\psi-1)N)^{-1}\mathrm{Det}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(N^{\psi=1})\\ &\qquad\qquad\xrightarrow{\sim}\mathrm{Det}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(M/(\psi-1)M)^{-1}\mathrm{Det}_{\mathcal{R}_L^+(\Gamma)}(M^{\psi=1})\end{aligned}$$

が得られ，これから所望の同型 $\mathrm{Exp}(M):\Delta_L^{\mathrm{Iw}}(N)\to\Delta_L^{\mathrm{Iw}}(M)$ が得られる．

主定理は N と M の指標捻りに関する局所イプシロン同型を比較するが，その証明で重要となるのは N と M の Bloch–加藤射の比較である．そもそも主定理では任意の $\eta\in\hat{\Gamma}_{L,\mathrm{dR}}$ に対する補完性質を扱うが，これより先では本質的となる自明指標 $\eta=\mathbf{1}$ の場合に Bloch–加藤射の比較が重要になることを説明する．この場合，主定理の主張は次の図式

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(N)"'] \arrow[dr, "\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M)"] & \\ \Delta_L(N) \arrow[rr, "\mathrm{Exp}(M)\otimes f_1"'] & & \Delta_L(M)\end{tikzcd} \tag{1}$$

の可換性になる．同型 $\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(-)$ の定義には ε 定数をはじめとする様々な不変量が用いられるが，図式に現れる二つの同型 $\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(N)$ と $\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M)$ の比較に関しては N と M の Bloch–加藤射の比較，特に $\exp_N$ および $\exp_{N^*}^*$ と $\exp_M$ および $\exp_{M^*}^*$ の比較が重要となる．実際，定理 4 より $N[1/t]=M[1/t]$ なので ε 定数に関して両者は一致し，また $\exp_f(M)$ に関してはこれが 0 写像になる場合（より強く，generic と呼ばれる場合）の証明に帰着できることがわかる：後者に関しては本稿最後も参照のこと．

異なる Bloch–加藤射を比較する次の定理は，主定理の証明の鍵となる．この定理は，異なるファイガンマ加群に対する Bloch–加藤射と $\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ の元の作用の関係を記述する．この定理に現れる $\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ の元として微分作用素 $\nabla-i(i\in\mathbf{Z})$ の場合を用いて細かな計算を実行することで主定理を証明することができる．なお，一般の $\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ の元を対象として議論することで一般的かつ見通しの良い証明が得られることに注意しておく．

Theorem 6（[10, Theorem 2.2.5]）　D,D' を de Rham な $\mathcal{R}_L$ 上のファイガンマ加群とし，$D[1/t]=D'[1/t]$ と仮定する．元 $\lambda=f([\gamma]^{p-1}-1)\in\mathcal{R}_L^+(\Gamma)$ が $\lambda(D)\subseteq D'$ を満たすとき，次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(D) \arrow[r, equal, "{[x\mapsto ?(x)]}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\alpha"'] & \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(D') \arrow[d, leftrightarrow, "\beta"] \\ \mathrm{H}^1_{\varphi,\gamma}(D) \arrow[r, "\lambda"'] & \mathrm{H}^1_{\varphi,\gamma}(D'). \end{tikzcd}$$

ただし，$\lambda:\mathrm{H}_{\varphi,\gamma}(D)\to\mathrm{H}_{\varphi,\gamma}(D');[x,y]\mapsto[\lambda(x),\lambda(y)]$ とし，$\alpha,\beta,?(x)$ は以下のものとする．

1. $\alpha = \exp^*_D$, $\beta = \exp^*_{D'}$, $?(x) = f(0) \cdot x$
2. $\alpha = \exp_D$, $\beta = \exp_{D'}$, $?(x) = f(0) \cdot x$
3. $\alpha = \exp^*_D$, $\beta = \exp_{D'}$, $f(0) = 0$, $?(x) = \log \chi_{\mathrm{cyc}}(\gamma_0^{p-1}) f'(0) \cdot x$.

概して言えば，我々の big exponential 射は $\mathcal{R}^+_L(\Gamma)$ の元を乗じる形で定義されることから，Theorem 6 を用いることで主定理を示すことができる．実際，Theorem4 に注意すると，Theorem 6 を，$D = N, D' = M$，十分大きな正の整数 h,

$$\lambda = \prod_{i=0}^{h-1} \nabla - i$$

の場合に適用できる．$\log(1+X)$ の定数項は 0 であるため Theorem 6 の三番目の状況が考察可能であり，ライプニッツ則から次の図式が可換になることが導かれる：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(N) \arrow[r, equal, "{[x \mapsto (h-1)!x]}"] & \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(M) \\ \mathrm{H}^1_{\varphi,\gamma}(N) \arrow[u, leftrightarrow, "\alpha"] \arrow[r, "\lambda"'] & \mathrm{H}^1_{\varphi,\gamma}(M). \arrow[u, leftrightarrow, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

ここで二種類の Bloch–加藤射の違いとして現れた $(h-1)!$ は，$\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M)$ の定義に現れるガンマ定数と関係しており，このような考察からきちんと主定理を証明する事ができる．

以上が主定理の証明の概略だが，正確に議論する際には $\prod_{i=0}^{h-1} \nabla - i$ 以外の元も考える必要があることに注意しておく．まず，その定義より $\mathrm{Exp}(M)$ は $\mathrm{Exp}_{M,h}$ の行列式そのものではなくこれを補正したものであり，補正により初めて基本直線間の同型が得られたのであった．たとえば M の Hodge–Tate 重さがすべて -1 の場合には $\nabla + 1 \in \mathcal{R}^+_L(\Gamma)$ を乗じる逆向きの写像 $M \to N$ に対して Theorem 6 を適用するなどの工夫が必要になる．一般には単一の λ に関する議論だけで可換性を直接示すことはできず，Theorem 6 の全ての場合の議論が必要になる．

最後に，実際の主定理の証明には，中村による一次元の局所イプシロン予想に関する先行結果が用いられていることについて補足し，本稿を終える．まず，上述の説明で留意すべき点として $\exp_f(M)$ と $\exp_f(N)$ の比較が含まれていないことがあるが，先に述べたようにこれは M に generic 性があると仮定しても良いことによる．ファイガンマ加群 M に対しこれが generic であることを，

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(M \otimes_{\mathcal{R}_L} \mathcal{R}_L(\eta)) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(M^* \otimes_{\mathcal{R}_L} \mathcal{R}_L(\eta)) = 0$$

が任意の $\eta : \Gamma \to \overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ で成立することと定義する．（このような M に対し $\exp_{f,M}$ の始域 $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(M)$ は 0 となっており，またそのコホモロジーも扱いやすいものになっている．）generic かつ de Rham な M に対し主定理を示せば良いことが，以下のようにしてわかる．

generic かつ de Rham な M に対して，その非自明な部分ファイガンマ加群 M' で，M/M' もまたファイガンマ加群の構造を持つものが存在するとわかるため，短完全列

$$0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$$

が得られる．本稿で説明している big exponential 射は Hodge–Tate 重さで適切に補正しているため短完全列と整合的であり，上の短完全列に対しても $\mathrm{Exp}(M) = \mathrm{Exp}(M') \otimes \mathrm{Exp}(M/M')$ が成立する．加えて $\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}$ もまた短完全列と整合的 (!) であり，上の短完全列に対しても $\varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M) = \varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M') \otimes \varepsilon_L^{\mathrm{dR}}(M/M')$ が成立する．故に M の階数に関する帰納法から，M が generic な場合と，M の階数が 1 の場合とを考えれば，一般の場合が従うことがわかる．そして階数 1 の場合には，[16, Proposition 4.13, Lemma 4.14] においてすでに $\exp_f$ などを含め無条件で主定理は証明されており，ゆえに M が generic な場合に帰着できることがわかる．なお，[16] においてこれらの命題はそこでの階数 1 のファイガンマ加群に対する局所イプシロン予想の証明で重要な役割を果たしており，今回の主定理が一般の局所イプシロン予想の証明にも役立てられることを期待している．

謝辞

講演の機会をいただいたことを，プログラム委員の三枝洋一氏，中村健太郎氏，杉山真吾氏，そして運営に携わられたスタッフの皆様に感謝いたします．また，中村健太郎氏には今回の講演に際し多くのアドバイスをいただきました．改めて感謝いたします．

参考文献

[1] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles. *Invent. Math.* **148** (2002), 219–284

[2] L. Berger, Bloch and Kato's exponential map: three explicit formulas. *Doc. Math.* (2003), no. Extra Vol., 99–129 (electronic), Kazuya Kato's fiftieth

[3] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés. *Astérisque* **319** (2008), 13–38

[4] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques dun corps local. *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), 241–268

[5] P. Colmez,Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local. *Ann. of Math.* **148** (1998), 485–571

[6] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2. *Astérisque* **319** (2008), 213–258

[7] P. Deligne, Les constantes des équations fonctionelles des fonctions L. In *Modular functions of one variable II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, pp. 501–597, Lecture Notes in Math. 349, Springer, Berlin, 1973

[8] T. Fukaya, K. Kato, A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in non commutative Iwasawa theory. In *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XII*, pp. 1–85, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 219, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006

[9] J. M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux. I. In *The Grothendieck Festschrift II*, pp. 249–309, Progr. Math., 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990

[10] T. Ishida, K. Nakamura, Local ε-conjecture and p-adic differential equations. *Doc. Math.* **29** (2024), no. 5, pp. 1125–1156

[11] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. Part II. Local main conjecture. unpublished preprint.

[12] K. Kedlaya, Slope filtrations for relative Frobenius. *Astérisque* **319** (2008), 259–301

[13] K. Kedlaya, J. Pottharst, L. Xiao, Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ)-modules. *J. Amer. Math. Soc.* **27** (2014), 1043–1115

[14] R. Liu, Cohomology and duality for (φ, Γ)-modules over the Robba ring. *Int. Math. Res. Not. IMRN.* (2008), no. 3, Art. ID rnm150, 32

[15] K. Nakamura, Iwasawa theory of de Rham (φ, Γ)-modules over the Robba ring. *J. Inst. Math. Jussieu* **13** (2014), no. 1, 65–118

[16] K. Nakamura, A generalization of Kato's local ε-conjecture for (φ, Γ)-modules over the Robba ring. *Algebra and Number Theory* 11 (2017), no. 2, 319–404

[17] K. Nakamura, Local ε-isomorphisms for rank two p-adic representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ and a functional equation of Kato's Euler system. *Camb. J. Math.* **5** (2017), no. 3, 281–368

[18] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local. *Invent. Math.* **115** (1994), 81–161

[19] J. Rodrigues Jacinto, La conjecture ε locale de Kato en dimension 2. *Math. Ann.* **372** (2018), no. 3-4, 1277–1334