ルートナンバーと岩澤理論

小林　真一 (九州大学大学院数理学研究院)
Shinichi Kobayashi (Faculty of Mathematics, Kyushu University)

1　はじめに

モチーフに対しては L-関数が定まり, 解析接続や関数等式の存在が予想されている. 関数等式を記述するためには, Γ-因子と ε-因子 (導手 + ルートナンバー) の概念が必要になるが, これらはいかなる予想とも独立に定義することが可能で, それ自体が重要な数論的不変量になっている. そしてこれらを用いて, 関数等式が曖昧さをもたない形で精密に予想されている. (cf. [8].) Weil の逆定理などから, 精密で関手的な関数等式が存在することと, L-関数が然るべき保型表現からくることには密接な関係があると考えられ, これが Langlands 予想の起源になっている. 特にルートナンバーは, 非常に間接的な形で定義される最も繊細な量であり, Langlands と Deligne により, 苦労の末にその存在が確定したミステリアスな量である. とくにモチーフが symplectic self-dual であるときは, ルートナンバーは ± 1 の量であるが, その符号は Chow 群などの (適当な)Motivic cohomology の階数の偶奇性と結びつくと予想されている. (Parity 予想.)

岩澤理論は, 広義には, モチーフの p 進族に関する研究をする理論である. その背景には, L-関数の特殊値や数論的不変量が, p 進族の中である種の連続性や規則性をもって振る舞うことがある. 例えば有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E の円分 p 進族の場合は, $\mathbb{Q}$ の円分拡大 $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ に対して, Mordell-Weil 群 $E(\mathbb{Q}_n)$, Tate-Shafarevich 群 $\text{Ш}(E/\mathbb{Q}_n)$, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q})$ の指標 χ に対し特殊値 $L(E/\mathbb{Q},\chi,1)/\Omega_E$ などを考え, n や χ を動かしたときの, これらの不変量の漸近的な振る舞いを研究する. ε-因子はこれらの振る舞いに影響を及ぼす. 特に symplectic self-dual の場合はその影響が著しい. 例えば反円分族などの (conjugate) symplectic self-dual な p 進族に対しては, ルートナンバーが -1 になるような点が組織的に含まれていることがある. このような点では, Parity 予想により Motivic cohomology の階数が奇数となり, 特に 0 ではないので, 非自明な有理点や代数的サイクルの組織的な存在が予想される. 例えば Heegner 点の岩澤理論はこのような場合である. また Nekovář による楕円曲線や Hilbert 保型形式の p-Parity 予想の証明は, symplectic self-dual な p 進族におけるルートナンバーの振る舞いを調べることによってなされている.

歴史的には, 自己双対的な岩澤理論は, ルートナンバーが $+1$ か -1 のどちらか一方に固定されているような補間領域を調べることから始まった．しかし近年は Bertolini-Darmon-Parasanna [1] らの仕事を皮切りに, ルートナンバーが $+1$ と -1 の両方にまたがっている領域の研究が活発になっている．このような領域においては, 特殊値と代数的サイクルがより密接に交わっており, BSD 型の定理へ応用する上でも非常に重要である．また symplectic な自己双対的表現は, Gan-Gross-Prasad 予想などを通して極めて重要なクラスの表現になっている．(cf. [10]).

本稿では, ルートナンバーという観点から岩澤理論を振り返りながら, モチーフの自己双対的な p 進変形族に関して, ルートナンバーがその岩澤理論に及ぼす影響について解説する．そして筆者らの最新の成果についても述べる．

2 楕円曲線のルートナンバーと岩澤理論的不変量

ここでは具体例として楕円曲線の場合を考える．

2.1 ルートナンバー

E を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線とする．E の Hasse-Weil L-関数は次で定義される変数 s の複素関数である．

$$L(E/\mathbb{Q}, s) := \prod_{p \nmid \Delta} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}} \cdot \prod_{p \mid \Delta} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

ここで Δ は E の極小判別式で, $p \nmid \Delta$ ならば, a_p は $1 + p - \sharp E(\mathbb{F}_p)$ で与えられる．$p|\Delta$ のときは, $a_p \in \{0, \pm 1\}$ で, E の mod p 還元型によって決まる．E は modular であることが知られているので, $L(E/\mathbb{Q}, s)$ は全平面に解析接続され, 次の関数等式をもつ．

$$\Lambda(E/\mathbb{Q}, s) = \varepsilon(E/\mathbb{Q}, s)\Lambda(E/\mathbb{Q}, 2-s).$$

ここで $\Lambda(E/\mathbb{Q}, s)$ は無限素点からくる Γ-因子を補ってできる関数

$$\Lambda(E/\mathbb{Q}, s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s)L(E/\mathbb{Q}, s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(E/\mathbb{Q}, s)$$

である．また $E/\mathbb{Q}$ の導手を N と書くとき, ε-因子は

$$\varepsilon(E/\mathbb{Q}, s) = w(E/\mathbb{Q}) \cdot N^{1-s}.$$

であり, $w(E/\mathbb{Q}) \in \{\pm 1\}$ がルートナンバーと呼ばれる量である．ルートナンバーが $+1$ になるか -1 になるかは, E の整数論的情報と密接に関わっている．実際, $w(E/\mathbb{Q}) = -1$ ならば, 関数等式において $s = 1$ を代入すれば, $L(E/\mathbb{Q}, 1) = 0$ がわかる．Birch and

Swinnerton-Dyer 予想によれば, この場合, E は無限位数の有理点をもつと予想される. より精密には, 関数等式から

$$w(E/\mathbb{Q}) = (-1)^{\mathrm{ord}_{s=1} L(E/\mathbb{Q},s)}$$

がわかる. よって Birch and Swinnerton-Dyer 予想の mod 2 版として次が期待される.

Conjecture 2.1 (Parity 予想)**.** r_E を $E/\mathbb{Q}$ の Mordell-Weil 群の階数 $\mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q})$ とする. このとき

$$w(E/\mathbb{Q}) = (-1)^{r_E}.$$

つまりルートナンバーは Mordell-Weil 群の階数の偶奇を表す量である.

データベースなどの数値計算例によると, $r_E \geq 2$ となることは稀で, 一般的には $r_E = 0, 1$ であり, ほぼ 50% の確率で $r_E = 0$ または $r_E = 1$ となっている. これより楕円曲線を適当なアルキメデス的オーダーで並べると, Mordell-Weil 群の階数の一般的振る舞いは, ルートナンバー $w(E/\mathbb{Q})$ によって決められると予想される. また $r_E = 1$ のときは, Heegner 点などを使って, 非自明な有理点を組織的に構成する方法があることに注意しておく. ちなみに r_E はいくらでも大きくなりうるという予想が昔からあるが, 近年はそうではないかもしれないという予想もある. 現時点での最高記録は 2024 年に発見された楕円曲線で, $r_E \geq 29$ となるものがある. (GRH を仮定すると $r_E = 29$ が示せる.) 約 18 年ぶりの記録更新であった.

2.2 p 進族における Mordell-Weil 階数の振る舞い

前節の最後に楕円曲線をアルキメデス的大きさで並べたときの Mordell-Weil 階数の分布について述べたが, ここでは楕円曲線を 1 つ固定して, 基礎体を p 進的に動かしたときの Mordell-Weil 階数の振る舞いについて述べる.

岩澤理論においては $\mathbb{Z}_p$-拡大が基本的である. 歴史的に楕円曲線の岩澤理論は, 与えられた楕円曲線の基礎体を $\mathbb{Z}_p$-拡大に沿って拡大していったとき, Mordell-Weil 階数や Tate-Shafarevich 群の p-sylow 部分群の位数がどう変化するか調べる問題から出発している. (代数体の岩澤理論は, $\mathbb{Z}_p$-拡大に沿って拡大していったときのイデアル類群の p-sylow 部分群の位数の振る舞いから出発していた.) 楕円曲線の基礎体を $\mathbb{Z}_p$-拡大して考えることは, p 進 Tate 加群を $\mathbb{Z}_p$-拡大に付随する岩澤代数でテンソルした大きな p 進表現族を考えることに相当する.

ここでは非常に興味深い現象が起こる最も簡単な場合である虚二次体上の場合を考える. p を 5 以上の素数, K を虚二次体とする. また K_∞/K を任意の $\mathbb{Z}_p$-拡大, K_∞^{ac}/K を反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする. また K_n, K_n^{ac} でその n-th layer を表す. 反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大は $\mathbb{Q}$ 上ガロワで, $\mathrm{Gal}(K_\infty^{ac}/\mathbb{Q})$ が自然な二面体群の構造をもつ (複素共役が $\mathrm{Gal}(K_\infty^{ac}/K)$ に -1 倍で作用する) ただ一つの K の $\mathbb{Z}_p$-拡大である. 次はよく知られている.

Theorem 2.2 (Mazur (I.C.M. 1983)). *E を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線で, p で良通常還元をもつと仮定する. このときある整数 a, e が存在して, 十分大きなすべての n に対し, 次が成り立つ.*

$$\operatorname{rank} E(K_n) = ap^n + e.$$

つまり Mordell-Weil 階数はミステリアスな量であるが, 岩澤理論的な振る舞いは規則的である. このような事実が楕円曲線の岩澤理論を考える動機の一つになっている. e は誤差項 (といっても応用上非常に重要) であるが, a については次が知られている.

- K_∞ が円分拡大のときは $a = 0$. これより $E(K_\infty)$ は有限生成アーベル群.
- $K_\infty = K_\infty^{ac}$ のときは,

$$a = \begin{cases} \frac{1-w(E/K)}{2} & (\mathrm{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \neq K) \\ 1 - w(E/\mathbb{Q}) & (\mathrm{End}(E) \otimes \mathbb{Q} = K) \end{cases}$$

  E が K で虚数乗法 (CM) を持つときは, $\mathbb{Q}$ 上のルートナンバーが関係することに注意する. (K で CM を持つときは, 常に $w(E/K) = +1$.)

最近は K_∞ が円分でも反円分でもないときに $a = 0$ を示す研究も始まっている.

E が p で超特異還元を持つときも, $\mathrm{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \neq K$ のときは上と同じ振る舞いになることが知られている. K で CM を持つときは状況が異なる. 次の定理の i) は Greenberg が 80 年代に発見 (unpublish) したものである. (cf. [11].) 証明は出版された論文としては, [6, Corollary 3.11] がある. 定理の ii) は最近の結果 [4] である.

Theorem 2.3 (Greenberg, Burungale-K.-Nakamura-Ota). *E は K で虚数乗法を持つと仮定する. また $\varepsilon := w(E/\mathbb{Q})$ とおく. このときある整数 c が存在して, 十分大きな n に対し次が成り立つ.*
i) p で超特異良還元をもつとき. ($p \nmid \Delta$ かつ p が K で惰性的.)

$$\operatorname{rank} E(K_n) = c + 2 \sum_{1 \le i \le n, (-1)^i = \varepsilon} (p^i - p^{i-1}).$$

ii) p が K の分岐素数のとき.

$$\operatorname{rank} E(K_n) = p^n + c.$$

ii) は一見無害な式に見えるが, 実際は少し不思議なことが起こっている. $\mathcal{O} := \mathrm{End}(E)$ を K に埋め込むと, $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $E(K_n) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}$ は, 自然に $\mathrm{Gal}(K_n^{ac}/K)$ の表現と思えるので, その指標分解を考える. $\mathrm{Gal}(K_n^{ac}/K)$ の位数 p^n の指標全体を Ξ_n とおく. このとき

$$(E(K_n)/E(K_{n-1})) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C} = \oplus_{\chi \in \Xi_n} (E(K_n) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C})^\chi.$$

i) の場合は, χ にはよらず, n の偶奇にのみ依存して $\dim_{\mathbb{C}}(E(K_n)\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{C})^{\chi}$ は, 0 または 1 となる．ここで $\sharp\Xi_n = p^n - p^{n-1}$ なので, i) が出る．一方, ii) の場合は, Ξ_n の半分の指標に対し $\dim_{\mathbb{C}}(E(K_n)\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{C})^{\chi}$ は 0 で, 残りの半分に対しては 1 となる．$\mathbb{C}$ の自己同型によって χ-成分は移り合いそうであるが, ii) のときは $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-p})\subset\mathbb{Q}(\zeta_p)$ であるので, ここから制限が加わることに注意する．つまり χ の共役は χ^a という形であるが, K を固定するような自己同型で移り合うためには, $a \mod p$ が平方剰余という条件が必要である．一方が他方の平方剰余倍になっているという条件で Ξ_n を 2 つのグループに分けると, $\dim_{\mathbb{C}}(E(K_n)\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{C})^{\chi}$ が 0 か 1 かは, χ がどちらのグループに族しているかによって決まる．どちらのグループの χ に対し $\dim_{\mathbb{C}}(E(K_n)\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{C})^{\chi}=0$ となるかは, E の Hecke 指標 ϕ_E と χ から定まるある種のガウス和の符号によって決められる．この不思議な分解は Hecke L-関数 $L(\phi_E\chi, s)$ のルートナンバーから来るものである．

2.3 CM 反円分変形のルートナンバー

反円分族の特徴は自己双対性にある．これについて少し説明する．E を代数体 K 上定義された楕円曲線とし, $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\to\mathbb{C}^{\times}$ を有限指標とする．このとき G_K の p 進表現 $V_\chi := V_pE\otimes\chi$ に対応する L-関数 $L(E/K,\chi,s)$ は, 以下の形の関数等式を持つと予想されている．(例えば E が $\mathbb{Q}$ 上定義されており, K が虚二次体なら, 証明されている.)

$$\Lambda(E/K,\chi,s)=\varepsilon(E/K,\chi,s)\Lambda(E/K,\chi^{-1},2-s).$$

ルートナンバー

$$w(E/K,\chi):=\varepsilon(E/K,\chi,1)/|\varepsilon(E/K,\chi,1)|$$

は, 一般には 1 の冪乗根であり, 必ずしも ±1 とは限らない．またこの関数等式も, 左辺と右辺が少なくとも見かけ上ずれており, 仮に $s=1$ を代入したとしても, Parity 予想のような現象は期待しにくい．対称性が保たれる場合, すなわち自己双対的な場合として見やすいのは, $\chi=\chi^{-1}$ のとき, つまり χ が 2 次指標の場合である．楕円曲線の 2 次 twist での変化を調べることは, 広く行われている重要な研究で, χ の導手に現れる素数たちを変化させるという方向の水平的変化をみるものである．一方, χ の導手に現れる素数を固定して, 指数の部分を上げて垂直方向の変化をみるのが, 岩澤理論的方向である．最も基本的な場合として, K_∞/K を $\mathbb{Z}_p$-拡大とし, χ として $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ を経由するものを考える．円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大の場合は, $p=2$ のときの 2 次指標を除けば, V_χ は自己双対的ではない．しかし K が虚二次体で, K_∞/K が反円分拡大のときは, ほぼその定義から $\chi(\overline{\mathfrak{a}})=\chi^{-1}(\mathfrak{a})$ が成り立ち, これから

$$\Lambda(E/K,\chi^{-1},s)=\Lambda(E/K,\overline{\chi},s)=\Lambda(E/K,\chi,s)$$

となる．また $\varepsilon(E/K,\chi,1)=w(E/K,\chi)=\pm1$ が成り立つ．これより対称性の高い関数等式が成り立ち, V_χ は共役自己双対的 (conjugate self-dual) と言われる．(V_χ の $\mathbb{Q}$ 上への誘

導表現は, 後で説明する symplectic self-dual になる.) よって $s = 1$ 付近の挙動をみることで, $w(E/K, \chi) = -1$ のときは V_χ に関する Parity 予想が期待される. このような意味で, 反円分方向は 2 次 twist の垂直方向の類似物ともいえる. 一般的な (conjugate または symplectic な) 自己双対族に対してもこのような現象が起こっており, ルートナンバーがその族の中でどう振る舞うかが, 整数論的にとりわけ重要な意味をもつ.

K が虚二次体で χ が反円分であるときに, ルートナンバーの挙動をまとめておく.

p が E の良い素数ならば, $w(E/K, \chi) = w(E/K)$. とくに $w(E/K) = -1$ となるときは, どんな反円分有限指標 χ に対しても $L(E, \chi, 1) = 0$ が成り立つ. BSD 予想によれば, 反円分方向に大量の有理点が組織的に存在することが示唆されるが, K が Heegner 条件を満たすときの (様々な導手をもつ)Heegner 点の存在がそれである.

p が良い素数で $w(E/K) = +1$ のときも, 組織的な有理点の存在が期待されることがある. E が K で CM を持つときを考える. E/K は K 上定義された CM 作用を持つので, $w(E/K) = +1$ である. このとき ϕ_E を E に付随する Hecke 指標とすると,

$$L(E/K, \chi, s) = L(\phi_E \chi, s) L(\phi_E \chi^{-1}, s).$$

よって $w(E/K, \chi) = w(E/K) = +1$ ではあるが, $w(\phi_E \chi) = w(\phi_E \chi^{-1}) = -1$ となることはある. $w(\phi_E \chi)$ の振る舞いについては次が知られている.

(a) p が good ordinary (split) のとき, $w(\phi_E \chi) = w(E/\mathbb{Q})$.

(b) p が good supersingular (inert) のとき, $\operatorname{ord} \chi = p^n > 1$ ならば, $w(\phi_E \chi) = (-1)^n$.

(c) p が K の分岐素数の場合は, $w(\phi_E \chi^a) = \left(\frac{a}{p}\right) w(\phi_E \chi)$, $w(\phi_E \chi^{-p}) = w(\phi_E \chi)$.

Theorem 2.2 と Theorem 2.3 の Mordell-Weil 群の振る舞いは上記のルートナンバーの振る舞いによって説明される.

3 p 進ガロワ表現の変形族と局所ルートナンバー

ここでは p 進変形族の中で, ルートナンバーがどのように動く可能性があるのか, 局所ルートナンバーの観点から説明する.

素数 p を固定し, $\mathscr{F}$ を $G_\mathbb{Q}$ の自己双対的な p 進ガロワ表現の変形族とする. 自然に生じる変形族においては, 十分多くの幾何学的な特殊化を持っていることが普通である. 幾何学的とは, $\mathbb{Q}_p$ の拡大体を係数にもつ表現で, ほとんどの素数において不分岐, p の上の素点では de Rham 条件を満たすものである. このような表現は代数幾何からエタールコホモロジーなどを通じて生じると考えられている. 逆に幾何的対象からくる p 進ガロワ表現が上の意味で幾何学的であることは知られている. 例えば

$$\operatorname{Ind}_{K/\mathbb{Q}}(V_p E \otimes \mathbb{Z}_p[\![\operatorname{Gal}(K_\infty^{\mathrm{ac}}/K)]\!])$$

という反円分変形族の場合, $\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{ac}}/K)$ の有限指標 χ で特殊化して得られる表現 $\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}}(V_pE\otimes\chi)$ は幾何学的である. また幾何学的な 1 次元表現 $\phi:\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{ac}}/K)\to 1+p\mathbb{Z}_p$ に対し, $s\in\mathbb{Z}_p$ をパラメーターとする変形族 $\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}}(V_pE\otimes\phi^s)$ は, s を整数に特殊化すると幾何学的であるが, s が整数でないときは, ほとんどの場合幾何学的ではない. $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}_p$ の中で稠密であるので幾何学的な点は豊富にある. p 進連続的な変形族の中に, 稠密だが離散的な香りのする幾何学的な特殊化が多くあるというのが, よくある状況である.

V を $G_{\mathbb{Q}}$ の幾何学的な symplectic self-dual p 進表現とする. このような V に対しては, (大域) ルートナンバー $w(V)$ が局所ルートナンバー $w_v(V)$ の積として定義される:

$$w(V):=\prod_{v:\text{全素点}} w_v(V)=w_\infty(V)\times w_p(V)\times\prod_{l\neq p}w_l(V).$$

$w(V)$ は $L(V,s)$ の関数等式の符号になると予想されている. 局所ルートナンバーの定義は込み入っているのでここでは述べないが (well-defined 性がまったく非自明), 次の性質を持っている.

- $w_v(V)=\pm1$ であり, 有限個の v を除き $w_v(V)=1$.
- $w_l(V)$ $(l\nmid p)$ は, V を $G_{\mathbb{Q}_l}$ の表現とみなした局所「ℓ 進」表現から定まる. (Grothendiedck のモノドロミー定理を使って Weil-Deligne 群の表現を作る. Weil-Deligne 群の表現に対しては, Langlands-Deligne による局所ルートナンバーの定義がある.)
- $w_p(V)$ は, V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現とみなした局所 p 進 de Rham 表現から定まる. (Fontaine の $D_{\mathrm{pst}}(V)$ を使って Weil-Deligne 群の表現を作る. この際, V が持っている Hodge filtration の情報は使わないので, 出てくる Weil-Deligne 群の表現は情報がかなり落ちている.)
- $w_\infty(V)$ は, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の局所 p 進 de Rham 表現 V から定まる $D_{\mathrm{dR}}(V)$ の Hodge filtration の情報 (のみ) を使って定義される. なぜこれが無限素点 ∞ の局所ルートナンバーと思えるかというと, V が symplectic self-dual なモチーフ M の p 進実現になっているときは, $w_\infty(V)$ は M の (アルキメデス的な)Hodge 実現を使って定義される素点 ∞ における局所ルートナンバーと一致する. 自己双対的でないときは, 一般的には, p 進実現のみから M の無限素点のルートナンバーを復元できない.

p 進族 $\mathscr{F}$ の中の幾何学的な特殊化 V を動かしたときの局所ルートナンバーの変化は, おおよそ次のようになっている.

- $w_l(V)$ $(l\nmid p)$ は, ほぼ定数. (ほとんど動かない.)
- $w_\infty(V)$ は Hodge-Tate weight によって明示的に記述される. (よって変化の具合は容易にわかる.)

- $w_p(V)$ は, $V|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が trianguline 表現のときは比較的記述が容易. 例えばクリスタル表現なら $+1$. non-trianguline 表現のときは挙動不審.

2 節の大域ルートナンバーの挙動例 (a), (b), (c) においては, $w_l(\phi_E\chi)$ も $w_\infty(\phi_E\chi)$ も定数で, 局所ルートナンバー $w_p(\phi_E\chi)$ の挙動が大域ルートナンバーの挙動になっている. (a) のときは trianguline 表現, (b), (c) のときは non-trianguline 表現になっている.

岩澤理論の歴史を振り返ると, 初期においては, p 進変形族において大域ルートナンバーが $+1$ か -1 のどちらかに固定されているような特殊化たちを調べていた. 例えば変形族の中で, ルートナンバーが $+1$ の幾何学的な特殊化を稠密に含む領域においては, L 関数の特殊値がほとんどの場合消えていない (と予想される) ので, それを補間する p 進 L 関数を考える. 一方, ルートナンバーが -1 の幾何学的な特殊化を稠密に含む領域においては, L-関数の特殊値が消えている代わりに, Heegner 点などの有理点や代数的サイクルが大量にある (と予想される). これより p 進 L-関数の代わりに, それらを使って岩澤理論を展開する. 2013 年の Bertolini-Darmon-Prasanna [1] の仕事から, ルートナンバーが $+1$ と -1 の両方にまたがる領域の岩澤理論が始まった. 典型的なスタイルは, ルートナンバーが $+1$ の特殊化たちを使って p 進 L 関数を構成し, その p 進 L-関数の, ルートナンバーが -1 の特殊化に対応する点での値をみる. このような点には代数的サイクルがあるので, この点における p 進 L 関数の特殊値をその代数的サイクルの p 進 regulator と結びつける p 進 Gross-Zagier 的な公式を示す (期待する) というものである. 最初は $w_l(V)$, $w_p(V)$ が定数で $w_\infty(V)$ が変化するような領域での研究 ([1] など) からスタートしたが, 現在は non-trianguline で $w_p(V)$ が激しく変動するような場合 (2 節の (b), (c) など) も, 研究が進んでいる. (cf. [4], [6].)

4 主結果

今回得られた我々の主結果を述べるために, まずは基本的な概念の復習をしておく.

4.1 Bloch-Kato 局所部分空間

Φ, L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, $\mathcal{O}$ を L の整数環とする. V を L-係数の G_Φ の p 進 de Rham 表現とする. このとき Bloch-Kato の局所部分空間が次で定義される.

$$H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, V) := \mathrm{Ker}\left(H^1(\Phi, V) \to H^1(\Phi, V \otimes B_{\mathrm{crys}})\right).$$

(cf. [2].) 例えば V が Φ 上の楕円曲線の p 進 Tate 加群 V_pE の場合は, $H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, V_pE) = E(\Phi)\hat{\otimes}\mathbb{Q}_p$ になることが知られている. つまり局所 Mordell-Weil 群を p 進表現の言葉で表したものである. 大域的な Mordell-Weil 群はディオファントス的対象で, 純粋に p 進表現の言葉で捉えることが難しい. しかし局所有理点の集合は指数写像などを通じて接空間と同一

視できるので, p 進 Hodge 理論の言語で記述が可能であり, それが Bloch-Kato 局所部分空間である. 大域的な Selmer 群は, p 上の素点の局所条件として Bloch-Kato 局所部分空間を使うことで, p 進表現の言葉のみで定義が可能になる.

ここで V が symplectic self-dual とする. つまりガロワ作用と可換な非退化交代ペアリング $V \times V \to L(1)$ をもつと仮定し, これにより V と $V^*(1)$ を同一視する. このとき Tate pairing から次の非退化 symmetric pairing が得られる.

$$H^1(\Phi, V) \times H^1(\Phi, V) \to L$$

このペアリングに対して, $H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, V)$ は Lagrangian になる. つまり直交補空間が自分自身になる: $H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, V)^{\perp} = H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, V)$. Lagrangian という言葉は交代形式に対して使われることが多いが, 考えている Tate pairing は対称形式であることに注意する. Lagrangian をもつ対称形式はメタボリック空間と呼ばれることがある.

$T \subset V$ をガロワ安定的な $\mathcal{O}$-格子とすると, 自然な写像 $H^1(\Phi, T) \to H^1(\Phi, V)$ による $H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, V)$ の逆像として, $H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, T)$ が定義される. V のペアリングにより $T \cong T^*(1)$ となっていると仮定する. このとき Tate pairing

$$H^1(\Phi, T) \times H^1(\Phi, T) \to \mathcal{O}$$

が定義されるが, $H^1(\Phi, T)$ が自由 $\mathcal{O}$-加群でないときは非退化ではない. $H^1(\Phi, T)$ が自由であるときは, 非退化で $H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, T)$ は Lagrangian になる.

さて $H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, V)$ は局所 Mordell-Weil 群を一般化した対象であるが, V の局所ルートナンバーと何か関係があるだろうか？ Parity 予想によれば, 大域的なルートナンバーは Mordell-Weil 群の階数の偶奇を記述していた. 局所的な場合は, $H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, V)$ は Lagrangian なので, その次元は全空間 $H^1(\Phi, V)$ の次元の半分であり, ミステリアスな量ではない. ただ p 進族における幾何的特殊化 V を動かすときの $H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, V)$ の振る舞いは非自明で, 昔から岩澤理論の研究対象になってきた. 例えば楕円曲線 E の基礎体を $\mathbb{Z}_p$-拡大 Φ_∞/Φ に沿って動かしたときに出てくる Universal norm 群

$$\varprojlim_n H^1_{\mathrm{f}}(\Phi_n, T_pE) = \varprojlim_n E(\Phi_n) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_p \subset H^1(\Phi, T_pE \otimes \Lambda)$$

である. これは岩澤代数 Λ 上の有限生成加群になる. E が通常還元をもつときは, その階数は $[\Phi : \mathbb{Q}_p]$ であり, $H^1(\Phi, T_pE \otimes \Lambda)$ が自由ならば, その Lagrangian になる. E が超特異還元をもつときは, $\varprojlim_n E(\Phi_n) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_p = 0$ となる. しかし norm compatible ではないが, ある種のノルム関係式を満たすようなシステム $(c_n)_n \in \prod_n E(\Phi_n) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_p$ が存在し, 超特異岩澤理論において重要な役割を果たす.

本稿での基本的な主題は, 大域 p 進族の中での大域的 Modrdell-Weil 群の振る舞いと大域ルートナンバーの関係の局所類似である:

問: $G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進表現の変形族において, 幾何学的な特殊化 V を動かすとき, $H^1_{\mathrm{f}}(\Phi, V)$ と局所ルートナンバー $w_p(V)$ の振る舞いに何かの関係があるだろうか？

加藤の局所 ε-予想 ([9], [13]) はこの問いへの解答を与えるものであるが, 局所 ε-予想は極めて抽象的に定式化されているので, 関係が見やすいとは言い難い. (自己双対的でない場合にも定式化されている.) 後で述べる我々の最近の結果は, 自己双対的な場合の上記の問いに対して, より関係が見やすい形での解答を与えるものである. 加藤の局所 ε-予想と同値であることも示せる.

4.2 Symplectic な自己双対的表現

ここでは表現の係数環として, 一般の p 進的な環を考える. 以下では簡単のため $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現のみを考えるが, $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の場合もほぼ同様である. ただし我々の主結果は p 進 Langlands を使うため, $G_{\mathbb{Q}_p}$ でなければばならない. また加藤の ε-予想の定式化は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現でなされている.

奇素数 p を固定する. R を可換な Noether 局所 $\mathbb{Z}_p$-代数で, 剰余環が $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大になっているものとする. 基本的な例は冪級数環 $\mathbb{Z}_p[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ やその商である.
$\mathcal{T}$ を連続的な $G_{\mathbb{Q}_p}$ の作用をもつ有限生成自由 R-加群とする.

Definition. *$\mathcal{T}$ が, 交代的で $G_{\mathbb{Q}_p}$-作用と可換な R-加群の完全ペアリング $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to R(1)$ を持つとき, シンプレクティックな自己双対的表現という. $R(1)$ は R の Tate 捻りで, 完全の意味は次が成り立つことである: $\mathcal{T} \cong \mathrm{Hom}_R(\mathcal{T}, R(1))$.*

以下はシンプレクティックな自己双対的表現の典型例である.

- $\mathbb{Q}_p$ 上の楕円曲線の p 進 Tate 加群 T_pE.
- $\Gamma_0(N)$ の重さ k の保型形式 f に付随する表現 $V_p(f)(\frac{k}{2})$.
- $\mathbb{Q}_p$ 上の奇数次元 $2n+1$ の固有で滑らかな代数多様体 X のエタールコホモロジー $H^{2n+1}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p(n+1))$.
- $\mathbb{Q}_p$ の 2 次拡大上の反円分表現族の $\mathbb{Q}_p$ への誘導表現.
- $\mathrm{rank}_R\mathcal{T} = 2$ ならば, $\mathcal{T}$ がシンプレクティックな自己双対的表現になるための必要十分条件は, $\det_R\mathcal{T}$ が p 進円分指標になることである.

4.3 完備イプシロン因子

L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, V を L-係数の $G_{\mathbb{Q}_p}$ の de Rham なシンプレクティック自己双対的表現とする.

4.3.1 自己双対的な de Rham 表現のイプシロン因子

以前に述べたように局所ルートナンバー $w_p(V)$ は, Fontaine の $D_{\mathrm{pst}}(V)$ から作られる Weil-Deligne 表現を用いて定義される．まず $D_{\mathrm{pst}}(V)$ は $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$-係数のベクトル空間になっている．$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}/\mathbb{Q}_p)$ のフロベニウスを σ とすると, $D_{\mathrm{pst}}(V)$ はモノドロミー作用素 N と σ-semilinear なフロベニウス φ と $G_{\mathbb{Q}_p}$-作用をもつ．いわゆる $(\varphi, N, G_{\mathbb{Q}_p})$-加群である．$G_{\mathbb{Q}_p}$ の部分群である Weil 群 $W_{\mathbb{Q}_p}$ の $D_{\mathrm{pst}}(V)$ への作用を, ϕ を使って $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$-linear にすることで, $W_{\mathbb{Q}_p}$ の表現を得ることができる．これと N の作用により Weil-Deligne 群の表現ができる．ただし係数は $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ なので, 埋め込み $\tau : L \otimes \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}} \to \mathbb{C}$ を選ぶ．$w_p(V)$ を定義するためには, さらに $\mathbb{Q}_p$ の非自明な加法的指標 ψ を選び, ψ に関して自己双対的な Haar 測度 d_ψ を選ぶ必要がある．このときシンプレクティック自己双対性より, $w_p(V)$ は ± 1 になる．$w_p(V)$ が ψ や d_ψ, および τ に依存しないことが知られている．

4.3.2 Γ-因子

$w_p(V)$ の定義には, V に付随するフロベニウスとモノドロミーの情報を使ったが, Hodge filtration の情報は使っていなかった．それを補正するために, Γ-因子を次で定義する．

$$\Gamma(V) := (-1)^{\sum_{i>0} i \dim \mathrm{gr}^i D_{\mathrm{dR}}(V)}.$$

これは加藤-深谷 [9] のものを, 自己双対的な場合に書き下したものである．また V が自己双対的なモチーフから来る場合は, これは (複素の)Hodge 理論を使って定義される無限素点のルートナンバーを, p 進 Hodge 理論によって取り出したものである．(symplectic self-dual でないときは, V だけからは, 必ずしも無限素点のルートナンバーを復元できないことに注意しておく．とくに $\mathbb{Q}$ の有限次拡大 F 上のモチーフの場合は, 一般には F の $\mathbb{C}$ への埋め込みと, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込みの数にも相違が生じるので, 単純な比較はできない.)

p における完備イプシロン因子を次で定義する．

$$\hat{\varepsilon}_p(V) := \Gamma(V) w_p(V).$$

$G_{\mathbb{Q}}$ の p 進表現の変形族においては, de Rham 特殊化 V を動かすとき, $w_l(V)(l \neq p)$ は定数であることが多かったので, 大域的なルートナンバーの振る舞いは, ほぼ $\hat{\varepsilon}_p(V)$ の振る舞いといってよい．

4.4 局所符号分解 (主結果)

p を奇素数とする．$\mathcal{T}$ を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進環 R 上のシンプレクティックな自己双対的表現とする．剰余表現 $\mathcal{T} \otimes (R/\mathfrak{m}_R)$ を $\overline{\mathcal{T}}$ で表す．$\mathcal{T}$ が次の条件を満たすとき, generic ということに

する.

$$H^0(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathcal{T}}) = \{0\}.$$

このとき自己双対性より $H^2(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathcal{T}}) = \{0\}$ であり, $\mathcal{T}$ は 1 次コホモロジーのみを持ち, $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T})$ は R 上自由であり, R に関する base change とも可換になる. また簡単のため, p 進環 R と $G_{\mathbb{Q}_p}$ の R 上のシンプレクティックな自己双対的表現 $\mathcal{T}$ の組 $(R, \mathcal{T})$ を symplectic self-dual pair ということにする.

Theorem 4.1 (Burunagale, K., Nakamura, Ota [3])**.** *すべての generic で階数 2 の symplectic self-dual pair* $(R, \mathcal{T})$ *に対し, 関手的な分解*

$$H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T}) = H^1_+(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T}) \oplus H^1_-(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T})$$

で, 次の性質を満たすものが存在する.

1. $H^1_\pm(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T})$ *は階数 1 の自由* R*-加群.*
2. $H^1_\pm(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T})$ *は Tate ペアリング*

$$H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T}) \times H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T}) \to R$$

   に関して Lagrangian. (直交補空間が自分自身.)
3. *射* $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *は自然な射* $H^1_\pm(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T}) \to H^1_\pm(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T}')$ *を誘導する.*
4. p *進環の射* $R \to R'$ *に関して, 自然な射により*

$$H^1_\pm(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T}) \otimes_R R' \cong H^1_\pm(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T} \otimes_R R').$$

5. $R \otimes \mathbb{Q}_p$ *が* $\mathbb{Q}_p$ *の有限次拡大で,* $V := \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}_p$ *が de Rham 表現のときは,*

$$H^1_{-\hat{\varepsilon}_p(V)}(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T}) = H^1_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T}).$$

またこの分解は上記の性質によって一意的に決まる.

この定理のポイントは, すべての symplectic self-dual pair に対して, 組織的な分解が一斉にあることであり, 1 つのペア $(R, \mathcal{T})$ に限定してしまうとあまり意味がない. 実際, $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T})$ はラグランジアンをちょうど 2 つ持っており, 定理はそれらを符号によりラベリングしている. (定義より $\mathcal{T}$ は交代ペアリングをもつが, それから誘導される $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T})$ の Tate ペアリングは対称的であることに注意しておく.) de Rham のときは性質 5 によりラベリングを決めるが, この定理は, de Rham の場合と両立する形で, すべての表現に対してラグランジアンを組織的にラベリングする方法があることを主張している. ルートナンバーや $H^1_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}_p, T)$ は T が幾何学的なときにしか定義できないが, $H^1_\pm(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T})$ は, 幾何学的な特殊化 T に対して, $H^1_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}_p, T)$ をルートナンバー条件に基づいて補間することで, 任意の表現に拡張したものといえる.

ガロワ表現の p 進族に付随する p 進 L 関数は, モチーフから来る L 関数の特殊値を補間する形で定義されるが, Bloch-Kato Selmer 群の局所条件である $H^1_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}_p, T)$ を補間するのが $H^1_{\pm}(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T})$ であり, これを用いてガロワ表現の p 進族に対して, よい Selmer 群 (の族) が作れる. また $H^1_{\pm}(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T})$ を利用して, 任意のペア $(R, \mathcal{T})$ に対して, Coleman/Perrin-Riou 写像の類似物を構成することができる. 中村健太郎氏によって構成された保型形式の普遍変形族に対するゼータ元族 (cf. [16]) を使えば, 普遍変形環の中に (integral な)p 進 L 関数を構成できる.

4.5 主結果の証明のアイデア

この定理は加藤和也氏による ε-予想と密接に関係している. (cf. [9].) ε-予想は岩澤主予想を体現しているゼータ元 (cf. [12]) の関数等式を記述するものであった. 定式化は ε-因子や $H^1_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}_p, T)$ などが, 複雑に入り組んだものであった. 我々の定理は, 階数が 2 の symplectic self dual な場合は, p-局所 ε-予想がより見やすい形で表現できることを主張している. また階数が 2 の場合は中村健太郎氏 (cf. [15]) によって p-局所 ε-予想は証明されている.

階数 2 の場合の p-局所 ε-予想を, 抽象的に書き換えていくことで主結果を証明することもできるが, ここでは背景にあるアイデアを説明する. まず問題の根源は p 進表現に伴う ε-因子の定義の複雑さにある. Fontaine の関手によって, p 進表現から Weil-Deligne 群の表現が得られるが, Weil-Deligne 群の表現に関する ε-因子も, Brauer の誘導定理を non-canonical に使うもので, well-defined 性でさえまったく非自明である. (cf. [8].) とくにガロワ表現が p で non-trianguline であるときは, ε-因子が非常に複雑になり, 明示的公式を与えるのも難しいし, 明示的公式があったとしても使いやすい形とは言い難い. Parity 予想など重要な結果がすでに証明されている場合は, 実際のところ ε-因子が簡単な明示式で表せるための条件が課されているのが常である.

一方で局所 Langlands 対応により, Weil-Deligne 群の表現に対応する保型表現があるが, そちらの ε-因子は, 適当な関数の局所関数等式として自然に定義される. 例えば GL_2 の場合は Kirillov モデルを使って計算される. 中村氏の証明は p 進 Langlands 予想を使って, ε-因子の計算を Kirillov モデルの計算に帰着させるものである. これにより ε-因子の明示計算が不要になるのと同時に, p 進族レベルでの議論も可能になる. 証明の流れは以下の通りである.

I. $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{T})$ 上によい involution w を構成する. 局所符号分解は w の固有分解として与えられる. w の構成は次の通りである. まず任意の p 進環 R 上の (φ, Γ)-加群 $D(\mathcal{T})^{\psi=0}$ 上に定義される Colmez の w 作用素に注目する. (cf. [7].) そしてこの w が

$$D(\mathcal{T})^{\psi=1}/(\gamma - 1) \cong H^1(\mathbb{Q}_p, T)$$

を不変にすることを示す. w が p 進族レベルで定義されていることが肝要である.

II. de Rham 表現の場合は, この w が ε-因子と関係することを示す. 次がポイントである.

• p 進 Langlands 予想により, w は対応する GL_2 の表現の $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の作用に相当する. (特に関数等式と関係ありそうな形をしている. p 進 Langlands 予想において, p 進ガロワ表現から出発して, 上三角行列の作用をもつ表現を作るのは比較的容易である. それを GL_2 の表現に伸ばすために w が必要になる. p 進 Langlands 予想の証明の肝でもある.)

• Emerton の local-global compatibility (大域的手法) と Colmez の局所代数的ベクトルの理論を用いて, p 進世界で Kirillov モデルを使うことで, w と ε-因子を結びつける.

5 応用

主結果の主な応用としては, 次の 2 つがある.

a) Parity 予想やその相対版である相対 Parity 予想, 相対局所 Parity 予想.

b) symplectic self-dual 表現に対する岩澤理論がある.

a) T_1, T_2 を symplectic self-dual な $G_{\mathbb{Q}_p}$ の de Rham 表現 V_1, V_2 のガロワ格子とする. また剰余表現は symplectic self-dual 表現として同型と仮定する. $\overline{T}_1 \cong \overline{T}_2 =: \overline{T}$. このとき $H^1_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}_p, T_i)$ の $H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{T})$ への像を $\overline{H^1_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}_p, T_1)}$ と書く. Mazur-Rubin [14] は次の数論的定数 $\delta_p(T_1, T_2) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を考えた:

$$\delta_p(T_1, T_2) := \dim_{\mathbb{F}_p} \overline{H^1_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}_p, T_1)} / \overline{H^1_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}_p, T_1)} \cap \overline{H^1_{\mathrm{f}}(\mathbb{Q}_p, T_2)} \mod 2.$$

(正確には彼らはアーベル多様体の場合のみを扱っており, 一般の de Rham 表現に対しては Nekovář [18] に定義がある.) T_i が楕円曲線 $E_i/\mathbb{Q}_p$ から来るときは, Kummer 写像により $\overline{E_i(\mathbb{Q}_p)} := E_i(\mathbb{Q}_p)/p \subset H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{T})$ であり, 数論的定数は次のようになる.

$$\delta_p(E_1, E_2) := \dim_{\mathbb{F}_p} \overline{E_1(\mathbb{Q}_p)} / (\overline{E_1(\mathbb{Q}_p)} \cap \overline{E_2(\mathbb{Q}_p)}) \mod 2.$$

彼らはこの不変量を使って, 基礎体が拡大すると Mordell-Weil 群が大きくなるような例を多く構成している. Mazur-Rubin は $\delta_p(T_1, T_2)$ と局所ルートナンバーは関係があるのではないかと問題提起をしたが, 具体的には予想を述べなかった. 今回, 我々は次の予想を立てた.

Conjecture 5.1.

$$(-1)^{\delta_p(T_1, T_2)} = \hat{\varepsilon}_p(V_1)/\hat{\varepsilon}_p(V_2).$$

我々の予想の前に, Nekovář [19] は, かなり特別な状況でかつ V_1 と V_2 の Hodge-Tate weight が等しい場合に, 上記を $\hat{\varepsilon}_p(V_i)$ ではなく $\varepsilon_p(V_i)$ に換えた等式を証明していた. そし

て Hodge-Tate weight が等しくない場合は, 修正が必要であることも認識していたようであるが, どう修正すべきかは述べていなかった. 主結果の応用として, 今回我々は階数が 2 の場合に上記の予想を証明した. Mazur-Rubin の局所定数は素点 $l \neq p$ 上でも定義されており, このときは l における通常の局所ルートナンバーを用いて, $(-1)^{\delta_l(T_1,T_2)} = \varepsilon_l(V_1)/\varepsilon_l(V_2)$ であることが, Nekovář [18] により示されている.

この予想は p-Parity 予想と密接に関わっている. p-Parity 予想とは, symplectic self-dual な幾何学的 p 進ガロワ表現に付随する Selmer 群の階数の偶奇が, (大域的) ルートナンバーになるというものである. 確立されている場合の p-Parity 予想の証明手法の一つは, 2 つの表現に関する相対 p-Parity 予想を証明し, p-Parity 予想がわかっている V_1 から, まだ知られていない V_2 の Parity 予想を導くという形をしている. 我々の予想は相対局所 p-Parity 予想というべきものであり, 我々の予想を使って相対大域的 p-Parity 予想を証明することができる. これより主結果の応用として, 階数 2 の場合には相対大域的 Parity 予想も証明できる. とくに p が完全分解するような総実体上の一般の (パラレルとは限らない) 重さの Hilbert モジュラー形式の p-Parity 予想を, かなり弱い仮定のもとで証明することができる. 例えば p が supercuspidal の場合が新しい.

b) T が高さが 2, パラメターが $-p$ の Lubin-Tate 加群の Tate module からくる場合は. 我々の主結果は Rubin [20] によって予想されたものである. この予想は [5] で証明された. 今回の中村氏の結果を使う方法は別証明を与えたことになる. Rubin [20] は, この分解を使って CM 楕円曲線の反円分岩澤理論を p が inert なときに展開している. とくに p 進 L 関数を構成した. 我々の結果を使えば, CM 楕円曲線の反円分岩澤理論を p が ramified なときにも展開できる. とくに p 進 L 関数も構成できる. このような悪い素数 p に対して, 岩澤代数の中によい p 進 L 関数が構成できたのは特筆すべきことである. 前述のように中村氏の階数 2 の universal deformation に関するゼータ元の族 (cf. [16]) を使えば, 普遍変形環の中にも (integral な)p 進 L 関数を構成できる. また符号付き Selmer 群の理論や岩澤主予想の定式化も可能である.

参考文献

[1] M. Bertolini, H. Darmon and K. Prasanna, *Generalized Heegner cycles and p-adic Rankin L-series*, Duke Math. J. 162 (2013), no. 6, 1033–1148.

[2] S. Bloch and K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, Progr. Math., 86 Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990, 333–400.

[3] A. Burungale, S. Kobayashi, K. Nakamura and K. Ota, *A local sign decomposition for symplectic self-dual Galois representations of rank two*, preprint.

[4] A. Burungale, S. Kobayashi, K. Nakamura and K. Ota, *Anticyclotomic CM Iwasawa theory at ramified primes*, preprint.

[5] A. Burungale, S. Kobayashi, and K. Ota, *Rubin's conjecture on local units in the anticyclotomic tower at inert primes*, Ann. of Math. (2) **194** (2021), no. 3, 943–966.

[6] A. Burungale, S. Kobayashi, K. Ota, *p-adic L-functions and rational points on CM elliptic curves at inert primes*, J. Inst. Math. Jussieu 23 (2024), no. 3, 1417–1460.

[7] P. Colmez, *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ,Γ)*-modules*, Astérisque (2010), no. 330, 281–509.

[8] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), 1973, pp. 501–597.

[9] K. Kato T.Fukaya, *A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory*, Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XII, 2006, pp. 1–85.

[10] W. T. Gan. B. H. Gross and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, Astérisque **346** (2012), 1–109.

[11] R. Greenberg, *Introduction to Iwasawa theory for elliptic curves*, Arithmetic algebraic geometry (Park City, UT, 1999), 407–464, IAS/Park City Math. Ser., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[12] K. Kato, *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse–Weil L-functions via* B_{dR}*. I*, Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991), Lecture Notes in Math. 1553, 50–163, Springer, Berlin, 1993.

[13] K. Kato, *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse–Weil L-functions via* B_{dR}*. II*, preprint.

[14] B. Mazur and K. Rubin, *Finding large Selmer rank via an arithmetic theory of local constants*, Ann. of Math. (2) **166** (2007), no. 2, 579–612.

[15] K. Nakamura, *Local* ε*-isomorphisms for rank two p-adic representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ *and a functional equation of Kato's Euler system*, Camb. J. Math. **5** (2017), no. 3, 281–368.

[16] K. Nakamura, *Zeta morphisms for rank two universal deformations*, Invent. Math. 234 (2023), no. 1, 171–290.

[17] Jan Nekovář, *Some consequences of a formula of Mazur and Rubin for arithmetic local constants*, Algebra Number Theory **7** (2013), no. 5, 1101–1120, DOI 10.2140/ant.2013.7.1101. MR3101073

[18] ———, *Compatibility of arithmetic and algebraic local constants (the case* $\ell \neq p$*)*, Compos. Math. **151** (2015), no. 9, 1626–1646, DOI 10.1112/S0010437X14008069. MR3406439

[19] ———, *Compatibility of arithmetic and algebraic local constants, II: the tame abelian potentially Barsotti-Tate case*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **116** (2018), no. 2, 378–427, DOI 10.1112/plms.12085. MR3764064

[20] K. Rubin, *Local units, elliptic units, Heegner points and elliptic curves*, Invent. Math. **88** (1987), no. 2, 405–422.