RIMS Kôkyûroku

遠アーベル幾何学の数論的位相幾何学に向けて
(Toward anabelian geometry in arithmetic topology)

By

植木 潤 (Jun Ueki)
お茶の水女子大学 (Ochanomizu University)*

Abstract

本稿は研究集会「代数的整数論とその周辺 2024」での講演内容に基づいており, 現在進行中の Nadav Gropper (U. Haifa / U. Penn.) と Yi Wang (U. Illinois) との共同研究 [GUW25] の内容を主とする. 結び目と素数 (素イデアル), 3 次元多様体と代数体の整数環の類似性に端を発する体系的な研究 – 数論的位相幾何学 – の文脈で, 素数あるいは素イデアル全体の集合の類似物と見られるような無限絡み目を 3 次元多様体上に固定すると, 遠アーベル幾何学の出発点の 1 つである Neukirch–Uchida の定理の類似が定式化できる. その詳細と, 関連する幾つかの事柄を報告する.

Contents

§1. Introduction

素数と結び目, 代数体の整数環と 3 次元多様体の類似性は, Gauss の時代から重要な役割を果たしてきたと考えられる. 現代においては, Mazur が最初に文献 [Maz64] で

2020 Mathematics Subject Classification(s): Primary: 57M12, 57K10, 37D45; Secondary 11R32, 11R44, 11N05.
Key Words: *knot, link, 3-manifold, branched cover, Neukirch–Uchida theorem, Hilbert ramification theory, Chebotarev law, anabelian geometry, arithmetic topology.*
*uekijun46@gmail.com Department of Mathematics, Faculty of Science, Ochanomizu University; 2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku, 112-8610, Tokyo, Japan.

岩澤理論と Alexander–Fox 理論の類似性を指摘し, 後に Kapranov [Kap95], Reznikov [Rez97, Rez00], 森下 [Mor02, Mor12, Mor24], Kim [Kim20] 等々によって様々な類似性が辞書の形に整理・体系化されてきた.

この観点から, Artin–高木+Chevalley によるイデール的類体論の類似が, 無限絡み目を固定した 3 次元多様体に対して定式化されている [Nii14, NU19, Mih19]. さらに, 素数や素イデアル全体の集合の類似物についての研究が, Mazur [Maz12], McMullen [McM13], 本稿著者 [Uek21a, Uek20, Uek21b] によって与えられている.

以上については, RIMS 講究録別冊から出版予定の 2019 年度の同研究集会の報告集に, 日本語での概説 [NU25] が掲載予定なので, そちらを参照されたい. なお, イデール的類体論の類似の研究については, その後の進展として Hilbert 記号の類似 [NU23], Hasse ノルム原理の類似 [Tas25b], イデールを用いた Iyanaga–Tamagawa 型の種数公式の類似 [Tas25a] といった新しい結果も発表されている.

§2. Neukirch–Uchida の定理

さて, こうした文脈の先に, 京都や大阪などを中心に近年盛んに研究されている「遠アーベル幾何学」の出発点の 1 つである, 古典的な Neukirch–Uchida の定理の類似を定式化することができる [GUW25]. 以下に概略を述べる. まず, 数論側の定理は次のように述べられる.

定理 2.1 (Neukirch–Uchida [Neu69b, Neu69a, Uch76], [NSW08, Theorem 12.2.1])**.** $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ を取る. E, F を代数体, つまり $\mathbb{Q}$ の有限次拡大とし, $\overline{\mathbb{Q}}$ 内に固定されているものとする. もし同型 $\varphi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ があれば, 自然な同型 $E \overset{\cong}{\to} F$ がある, すなわち, 元 $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{Q}}$ であって, $F = \sigma(E)$ であり, かつ σ が φ を導くようなものが一意的に存在する.

今回は主に, 文献 [NSW08] の議論を参考に研究を行った. 定理の証明の鍵は, 無限次拡大に対する Hilbert の分岐理論, Tate–Poitou 双対性, Chebotarev の密度定理であり, とくに次が大切なステップである.

定理 2.2 ([NSW08, Theorem 12.2.5])**.** $F/\mathbb{Q}$ を有限次 Galois 拡大, $E/\mathbb{Q}$ を有限次拡大とする. もし E/Q に被覆次数 1 の素因子を持つような全ての素数 $p \in \mathbb{Q}$ が $F/\mathbb{Q}$ において完全分解するならば, $F \subset E$ である.

さて, M を有向連結閉 3 次元多様体とし, 基点 b_M と, 可算個の tame な連結成分からなる絡み目 $\mathcal{K} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} K_i$ を固定する. $\mathcal{K}$ の有限部分絡み目で分岐する有限次分岐被覆の全体を $\mathrm{Cov}(M, \mathcal{K})$ と書く. $(M, \mathcal{K})$ の絶対 Galois 群を $\mathrm{Gal}(M, \mathcal{K}) = \varprojlim_{h \in \mathrm{Cov}(M,\mathcal{K})} \mathrm{Gal}\, h$ によって定める. このとき無限次被覆に対する Hilbert の分岐理論が定式化できる (§ 3).

さらに $\mathcal{K}$ が Chebotarev 則を満たすとする (§ 4). このとき $\mathcal{K}$ は安定 Chebotarev 的である, つまり任意の $h \in \mathrm{Cov}(M, \mathcal{K})$ に対し, 逆像 $h^{-1}(\mathcal{K})$ は再び Chebotarev 則を満たすことが示される. 定理 2.1 の類似は以下のように述べられる.

定理 2.3 ([GUW25]). G_1, G_2 を $\mathrm{Gal}(M,\mathcal{K})$ の開部分群, $h_1, h_2 \in \mathrm{Cov}(M,\mathcal{K})$ を対応する分岐被覆とする．もし位相群の同型 $\varphi: G_1 \overset{\cong}{\rightrightarrows} G_2$ があれば, 分岐被覆自然な同型 $h_1 \cong h_2$ がある, つまり, ある $\sigma \in \mathrm{Gal}(M,\mathcal{K})$ であって, $h_2 \circ \sigma = h_1$ であり, かつ σ が φ を導くようなものが一意的に存在する．

大切なステップである定理 2.2 の類似は次のようになる．

定理 2.4 ([GUW25]). $h_1, h_2 \in \mathrm{Cov}(M,\mathcal{K})$ とし, h_1 は Galois であるとする．もし, $h_2^{-1}(K)$ が被覆次数 1 の連結成分を持つような全ての結び目 $K \subset \mathcal{K}$ が h_2 でも完全分解するならば, h_2 は h_1 を経由する．

いったん定理の主張が眼前に現れれば, 類似性の体系化を目指す研究の文脈上に, 今後取り組むべき仕事が数多く見えてくる．ちなみに, [Neu99, Chap.VII] 末尾の記述によれば, 代数体の拡大において分解する素イデアル全体の集合を決定することは一般には非常に難しく, "Langlands philosophy" の一部であるらしい．

また, トポロジーの側では双曲多様体が基本群の同型類から決定されるという Mostow 剛性が古典的によく知られており, また近年は基本群の副有限完備化の同型類からの復元問題が盛んに研究されているが [Rei18, BJZR23], このような大きな群の部分群に関する剛性定理は新たな視点であり, 類似性の文脈から離れてなお興味深いように思われる．

本稿では証明の詳細には立ち入らないが, ポイントである Hilbert の分岐理論と Chebotarev 則について, それぞれ解説していく．

§ 3. Hilbert の分岐理論

学部生向けの導入 最近何度か, 学部生向けの Galois 理論の講義を担当させていただける僥倖にあずかった．改めて理論の良さを享受することができ, 拙い解説を聞いてくださった学生たちには大変感謝している．さて, そこで思いついたクイズから始める．例えば

$$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

を証明せよ, と言われたら, どんな方法で答えたいだろうか？Kummer 理論の帰結と見るのが良いと考える人もいれば, 初等的な方法だけで再帰的に示せるということに良さを見出す人もいるだろう [Sek16] (個人的にはこれが好き). あるいは, これはひょっとしたら良い証明ではないかもしれないが, 幾何的な直感のもとで理解する方法の一つに, Hilbert の分岐理論がある．

例えば, 体の拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})/\mathbb{Q}$ を考えると, 整数環の拡大 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\mathbb{Z}$ において素イデアルの振る舞いは分解 $(2) = (2, 1+\sqrt{-5})(2, 1-\sqrt{-5})$, 分岐 $(5) = (\sqrt{-5})^2$, 惰性 $(7) = (7)$ の 3 パターンに分かれる．

同様に, 3 次元多様体の 2 次分岐被覆 $h: M \to S^3$ を取れば, 一般的な位置にある結び目 $K \subset S^3$ の振る舞いは, 分解 $h^{-1}(K) = K_1 \cup K_2$, 分岐 $h^{-1}(K) = K$ (K 上の被覆次

数は 1 で, メリディアンの被覆次数が 2), 惰性 $h^{-1}(K) = K$ (K 上の被覆次数が 2) の 3 パターンに分かれる. 以下では, トポロジー側に限って話を続ける.

有限次 Galois 被覆の場合　基本的な文献は [Uek14, Section 2], [Mor12, Section 5.1] である. $h : (N, b_N) \to (M, b_M)$ を 3 次元多様体の有限次分岐 Galois 被覆, $L \subset M$ を分岐絡み目とし, h の $Y = N - h^{-1}(L)$ への制限を $h : (Y, b_Y) \to (X, b_X)$ と書く. すると $\mathrm{Gal}\, h = \mathrm{Deck}\, h \cong \pi_1(X, b_X)/h_*\pi_1(Y, b_Y)$ となる.

$K \subset M - L$ または $K \subset L$ であるような結び目 K を取り, $K' \subset h^{-1}(K)$ を逆像の連結成分とする. K' の分解群 $D_{K'}$ と惰性群 $I_{K'}$ を

$$D_{K'} = \{g \in \mathrm{Gal}\, h \mid g(K') = K'\},$$
$$I_{K'} = \mathrm{Ker}(D_{K'} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(h|_{K'}))$$

によって定める. これらは $\mathrm{Gal}\, h$ の部分群である.

V_K を K の管状近傍とすると, $D_{K'} \cong \mathrm{Gal}(h|_{\partial V_{K'}}) = \pi_1(\partial V_K)/h_*\pi_1(\partial V_{K'})$ となる. K のメリディアンと任意に選んだロンジチュードをそれぞれ μ, λ と書けば, $\pi_1(\partial V_K) = \langle \mu, \lambda \mid [\mu, \lambda] \rangle \cong \mathbb{Z}^2$, また

$$D_{K'} = \langle \mu, \lambda \mid [\mu, \lambda], \mu^e, \lambda^f \rangle \cong \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/f\mathbb{Z},$$
$$I_{K'} = \langle \mu \mid \mu^e \rangle$$

となる. ここに e, f はそれぞれ K' の分岐指数と被覆次数を表す.

部分群の列 $\{e\} \leq I_{K'} \leq D_{K'} \leq \mathrm{Gal}\, h$ に対応する h の分解を $M_h \to T \to Z \to M$ と書けば, K は $Z \to M$ で完全分解, $T \to Z$ で完全惰性, $M_h \to T$ の中で完全分岐となる.

無限次 Galois 被覆の場合　以下は [Was97, Appendix, Section 2] の類似と見られる.

Section 1 のように $(M, \mathcal{K})$ を取る. 集合 $\mathrm{Cov}(M, \mathcal{K})$ は, 固定された普遍分岐被覆の商として得られる分岐被覆の全体を考えれば, 基点付き有限次分岐被覆の同型類の全体の完全代表系となる. $h \in \mathrm{Cov}(M, \mathcal{K})$ が Galois でなくても, h を経由する極小の Galois 被覆の Galois 群として $\mathrm{Gal}\, h$ を定める.

$\mathrm{Gal}(M, \mathcal{K})$ は群

$$\widehat{\pi}_1(M - \mathcal{K}, b_M) = \varprojlim_L \widehat{\pi}_1(M - L, b_M)$$

と自然に同型である. ここで L は $\mathcal{K}$ の全ての有限部分絡み目を走り, $\widehat{\pi}_1(M - L, b_M)$ は位相的基本群の副有限完備化を表す.

各 $h : (M_h, b_h) \to (M, b_M) \in \mathrm{Cov}(M, \mathcal{K})$ に対し $\mathcal{K}_h = h^{-1}(\mathcal{K})$ と置けば, Galois 対応により, $\mathrm{Gal}(M, \mathcal{K})$ の開部分群 $G(h) = \mathrm{Gal}(M_h, \mathcal{K}_h)$ と h が対応する.

いま $K \in \mathcal{K}$ とし, $\widetilde{K} = (K_h)_h$ を $\mathrm{Cov}(M, \mathcal{K})$ における結び目の逆系とする. Galois の推進定理により, $\mathrm{Gal}\, h$ の部分群である惰性群 I_{K_h} と分解群 D_{K_h} たちは自然に逆系をなす. $\widetilde{K}$ の惰性群と分解群を, $I_{\widetilde{K}} = \varprojlim_h I_{K_h}$, $D_{\widetilde{K}} = \varprojlim_h D_{K_h}$ によって定める. これらは $\mathrm{Gal}(M, \mathcal{K})$ の部分群である. 自然に $I_{\widetilde{K}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$, $D_{\widetilde{K}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^2$ となる.

§4. Chebotarev 則

定義と具体例を復習し, 幾つかの新しい結果と議論を述べる.

定義 4.1 (Chebotarev 則)**.** 3 次元多様体 M 内の結び目（S^1 の埋め込み）の非交列 $(K_i) = (K_i)_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$ を考える．各 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ と $j > n$ に対し，$L_n = \cup_{i \leq n} K_n$ と置き，$\pi_1(M - L_n)$ における K_j の共役類を $[K_j]$ と書く．任意の $n \in \mathbb{N}_{>0}$，任意の有限群への全射準同型 $\rho : \pi_1(M - L_n) \twoheadrightarrow G$ と任意の共役類 $C \subset G$ に対し

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\#\{n < j \leq \nu \mid \rho([K_j]) = C\}}{\nu} = \frac{\#C}{\#G}$$

であるとき，(K_i) は **Chebotarev 則**に従うという.

例 4.2 (惑星絡み目, [McM13])**.** 穴開きトーラス $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 - \{\mathbf{0}\}$ 上の $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 倍写像を考えると, その mapping torus $X = (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 - \{\mathbf{0}\}) \times [0,1]/(\boldsymbol{x}, 0) \sim (A\boldsymbol{x}, 1)$ は, 8 の字結び目の補空間 $S^3 - 4_1$ と同相である. 懸垂流 $\mathbb{R} \curvearrowright X$ が $t : (\boldsymbol{x}, s) \mapsto (\boldsymbol{x}, s+t)$ によって定められ, その閉軌道たちを一般的な計量のもとで長さで順序付けると, Chebotarev 則に従う. そこに 4_1 を込めることもできる.

注 4.3 (モジュラー結び目と Lorenz 結び目)**.** 上半平面の商 $\mathbb{H}/\mathrm{PSL}_2\mathbb{Z}$ の単位接束は三葉結び目の補空間 $S^3 - 3_1$ と同相であり, そこに定義される測地流の閉軌道はモジュラー結び目と呼ばれる. モジュラー結び目が Chebotarev 則に従う, と以前に書いたが [NU25], 実は当初想定していた議論には誤謬があり, より繊細な議論を要することがあった. 懸垂流の場合と比べ, この測地流は ∞-filling によって得られる S^3 上の一般化された擬 Anosov 流に延長されない. 自然に伸ばすと, 3_1 は 4 つの heteroclinic な軌道の合併となる. さらには, $3_1 \subset S^3$ に沿った Dehn 手術の結果は双曲多様体にならない (cf.[Sul13]) ので, 適当な手術によって双曲多様体を作るという懸垂流の場合の議論が適用できない. 代わりに, Tsang [Tsa23, Remark 6.7] によって明示的に構成された Markov 分割がカスプ付き orbifold にも適用でき, すると McMullen [McM13] の議論を直接適用できる, という方針が考えられる ([Uek21b], 最新版).

モジュラー結び目と Lorenz 結び目には密接な関係がある. $\mathbb{R}^3$ 内の古典的 Lorenz 流は

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x), \ \frac{dy}{dt} = 28x - y - xz, \ \frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z$$

によって定義される [Lor63]. この軌道について, ある幾何的なモデルがあり (cf.[BW83]), その閉軌道が Lorenz 結び目と呼ばれている. Tucker [Tuc99] と Ghys [Ghy07] の結果により, モジュラー結び目の全体と 3_1 からなる集合は, Lorenz 結び目の全体と位相的に同じものである. ただし, Lorenz 流の閉軌道には, Lorenz 結び目でないものも含まれているので注意が必要である (Bonatti–Pinsky [BP21], Pinsky [Pin23]).

適切な L 関数を考察することで, 一般に次の事実が示される.

定理 4.4 ([GUW25]). (K_i) が Chebotarev 則に従うとき, $\mathcal{K} = \bigcup_i K_i$ とすると, $h \in \mathrm{Cov}(M, \mathcal{K})$ に対し, 逆像 $h^{-1}(\mathcal{K})$ もまた Chebotarev 則に従う.

次は [Neu99, Chap.VII Corollary 13.6] の類似である.

定理 4.5 ([GUW25]). $h \in \mathrm{Cov}(M, \mathcal{K})$ に対し, h で完全分解する結び目の密度が $\frac{1}{\deg h}$ である $\underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ h が Galois である.

注 4.6 (Bauer の定理). より一般的な Bauer の定理 [Neu99, Chap.VII Proposition 13.9], またそれに連なる部分の類似も, 同様のレシピによって論じることができる.

注 4.7 (p 進類数と Lang–Trotter 予想). p を素数とする. 代数体の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 拡大の列において, 類数が p 進的に収束することが知られている. この事実は, Sinnot によって特別な場合について 1985 年の岩澤理論の研究集会での講演のなかで指摘され, 論文中では Han [Han91, Theorem 4] によって最初に述べられた. また, そのしばらく後に, 一般の大域体の場合について, p 進極限について結果が Kisilevsky によって与えられた [Kis97, Corollary 2]. 近年, 吉崎によって p 進収束の現象が再発見され [Yos23, Theorem 5.3] (see also [Yos25b]), 結び目や楕円曲線の場合などの体系的な調査が [UY25] にまとめられ, 尾崎 [Oza23] によって一般の副 p 拡大の場合の p 進収束も示された.

ここで「結び目の場合」とは, 結び目で分岐する 3 次元多様体の分岐 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 被覆の列 $(M_{p^n} \to M)_n$ における $H_1(M_{p^n}; \mathbb{Z})$ やその non-p 部分のトーションサイズの p 進収束を意味する. この結果も, $\mathbb{Z}_p^d$ 被覆の場合へと拡張されている [TU25, Yos25a]. なお, この極限値は Kionke によって提案された p 進トーションという位相不変量と密接な関係があったり, 一致していたりする [Kio20, Yos25a].

論文 [UY25] での指摘によれば, 楕円曲線において素数 p が supersinguler であることと p 進極限が 1 であることが同値であり, この観点から, 絡み方についての均一分布定理 (Chebotarev 則) を満たす無限絡み目に対する Elkies の定理や Lang–Trotter 予想の類似を定式化できると考えられる.

注 4.8 (絡み目の密度). Chebotarev 絡み目の中での mod 2 のオリンピック絡み目の密度について [NU25, Uek20] で論じたが, 絡み目の密度の定義については大きな深化の余地が残っていた. 大変興味深いことに, 数論の側で「x 以下の素数 3 つの組であって条件を満たすもの」を考えて $x \to \infty$ としたときに Borromean primes の密度が $1/2^7$ となることを示すには, 一般化されたリーマン予想が必要らしい [IKZ25]. また素数 2 つの組の密度についても, 密度定理に現れる関数の, 少し深いところまで見る必要があるらしい. なお素数の組の密度は [DKM23, Section 8] でも論じられている.

とすると, 我々の Chebotarev 絡み目の定義は, 素数全体の集合の類似物が満たすべき条件としては, まだ弱い可能性がある. 実際の具体例は, 素数定理の類似から性質が示されるので, そこには探求すべき事柄が残されていると考えられる.

§5. 研究の経緯など

そんなことには興味がないという読者も少なくないとは思うが, 研究の人間的な側面を記録しておくことが将来の振り返りに役立つ場合もあると考えられるので, 敢えて冗長さを厭わず, いま憶えている範囲で, ここに書き留めておくことにする.

COVID-19 の影響が一段落した後, フットワークを回復せねばと考えて, 積極的に海外出張を行うように心掛けた. 今回の研究は, その時期に新しく始まった関係性に基づいている. Nadav Gropper は Minhyeong Kim の Oxford での弟子で, 2023 年 3 月に Scotland の Edinburgh で開催された ICMS workshop – Gauge Fields in Arithmetic, Topology & Physics で初めて出会った. そのあと 3 月に福岡での LDT&NT, 6 月の Canada の Montreal での geometric group theory のサマースクールと Spain の Madrid での profinite rigidity の研究集会, 2024 年 4 月に再び Edinburgh, 2025 年 3,4 月に大阪の LDT&NT+anabelian で会って議論を重ねてきた. Yi Wang は Ted Chinburg の U. Penn. での弟子で, 2023 年 6 月に Madrid で最初に出会い, 以後, 自分は直接は面会していない. Nadav と Yi は時々会って議論している様子がある.

Neukirch–Uchida の定理の類似についての overleaf project は 2024 年 3 月 14 日に開始された. Nadav に指摘されて考えてみれば, これまでに築いてきた類似理論が, ほとんどちょうど基本的なレシピを与えていて, まさに自分が次に取り組むべき課題だった. いずれ役に立てばと思って以前の論文に書いておいた部分が役に立つなど, 嬉しいこともあった. 各種ライフイベントなども挟みつつ, Facebook の messenger や Discord, Zoom などを使って断続的に議論を続けてきた. とくに大きな進捗があったのは, 2024 年 4 月の Edinburgh, 2025 年 1 月の京都での集会直前, 2025 年 3,4 月の大阪という 3 つの時期だった.

コロナ禍の一時期は, オンラインで何でもできるような気にもなっていたが, いざ日常生活が再開してみると, 誰かと直接会って顔を見て話をすることの, 研究上の着想や思索への影響は非常に大きく, 研究集会のような場の意義を改めて感じている.

一方で, 例えば乳幼児などが家庭にいるなど様々な要因があれば, 必ずしもいつでも気軽に旅に出られるわけではない. 一時期は沢山あったオンラインやハイブリッド形式の研究集会が徐々に減ってきているが, それらもある程度は引き続き存在していたほうが, 様々なライフステージで研究が続けやすい, ということも改めて指摘しておきたい.

海外に共著者を持つと世界情勢へのアンテナの感度が高まる. 2023 年 10 月の某日からしばらくして, SNS 経由の生の情報に疲れて, ついに十数年ぶりに家庭にテレビを導入するに至った. 2024 年 3 月に子供が生まれ, 2024 年度秋からは子連れ通勤の開始に伴い夜型から昼型へと活動様式が矯正された. これは幾分ドラスティックな環境変化といえる. 人間の活動として数学を捉えるとき, こうした個人的な事柄も無視できない.

謝辞

貴重な発表の機会を下さった研究集会「代数的整数論とその周辺 2024」の組織委員の先生方, 有用なコメントを下さった遠アーベル幾何学周辺の多くの方々 (とくに玉川安

騎男先生, 中村博昭先生, 山下剛先生), また共同研究者である Nadav Gropper, Yi Wang, その他関係者の面々に感謝します. 本稿の推敲作業には xAI の Grok3 を援用しました. 本研究は JSPS 科研費 JP23K12969 の助成を受けたものです.

References

[BJZR23] Martin Bridson, Andrei Jaikin-Zapirain, and Alan W. Reid, *A list of problems suggested by participants of Workshop on Profinite Rigidity*, `https://www.icmat.es/RT/2023/GGTLDGT/week_3_problem_list.pdf`, 2023.

[BP21] Christian Bonatti and Tali Pinsky, *Lorenz attractors and the modular surface*, Nonlinearity **34** (2021), no. 6, 4315–4331. MR 4281447

[BW83] Joan S. Birman and R. F. Williams, *Knotted periodic orbits in dynamical system. II. Knot holders for fibered knots*, Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981), Contemp. Math., vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 1–60. MR 718132

[DKM23] Yuqi Deng, Riku Kurimaru, and Toshiki Matsusaka, *Arithmetic Dijkgraaf-Witten invariants for real quadratic fields, quadratic residue graphs, and density formulas*, Res. Number Theory **9** (2023), no. 4, Paper No. 70, 16. MR 4648746

[Ghy07] Étienne Ghys, *Knots and dynamics*, International Congress of Mathematicians. Vol. I, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, pp. 247–277. MR 2334193

[GUW25] Nadav Gropper, Jun Ueki, and Yi Wang, *Neukirch–Uchida theorem for knots (tentative)*, in preparation, 2025.

[Han91] Sang-G. Han, *On p-adic L-functions and the Riemann-Hurwitz genus formula*, Acta Arith. **60** (1991), no. 2, 97–104. MR 1139049

[IKZ25] Yuki Ishida, Atsuki Kuramoto Kuramoto, and Dingchuan Zheng, *The density of Borromean primes*, to appear in Comment. Math. Univ. St. Pauli (2025).

[Kap95] M. M. Kapranov, *Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory*, Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993), Progr. Math., vol. 131, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995, pp. 119–151. MR 1373001 (97c:11069)

[Kim20] Minhyong Kim, *Arithmetic Chern-Simons theory I*, Galois covers, Grothendieck-Teichmüller Theory and Dessins d'Enfants, Interactions between geometry, topology, number theory and algebra, Leicester, UK, June 2018 (Frank Neumann and Sibylle Schroll, eds.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 330, Springer, Cham, 2020, (cf. arXiv:1510.05818). MR 4166922

[Kio20] Steffen Kionke, *On p-adic limits of topological invariants*, J. Lond. Math. Soc. (2) **102** (2020), no. 2, 498–534. MR 4171424

[Kis97] H. Kisilevsky, *A generalization of a result of Sinnott*, Pacific J. Math. (1997), no. Special Issue, 225–229, Olga Taussky-Todd: in memoriam. MR 1610867

[Lor63] Edward N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmospheric Sci. **20** (1963), no. 2, 130–141. MR 4021434

[Maz64] Barry Mazur, *Remarks on the Alexander polynomial*, `https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.harvard.edu/dist/a/189/files/2023/01/Remarks-on-the-Alexander-Polynomial.pdf`, 1963–64.

[Maz12] ———, *Primes, Knots and Po*, Lecture notes for the conference "Geometry, Topology and Group Theory" in honor of the 80th birthday of Valentin Poenaru, `https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.harvard.edu/dist/a/189/files/2023/01/Primes-Knots-and-Po.pdf`, July 2012.

[McM13] Curtis T. McMullen, *Knots which behave like the prime numbers*, Compos. Math. **149** (2013), no. 8, 1235–1244. MR 3103063

[Mih19] Tomoki Mihara, *Cohomological approach to class field theory in arithmetic topology*, Canad. J. Math. **71** (2019), no. 4, 891–935. MR 3984024

[Mor02] Masanori Morishita, *On certain analogies between knots and primes*, J. Reine Angew. Math. **550** (2002), 141–167. MR 1925911 (2003k:57008)

[Mor12] ______, *Knots and primes*, Universitext, Springer, London, 2012, An introduction to arithmetic topology. MR 2905431

[Mor24] ______, *Knots and primes*, Universitext, Springer Singapore, 2024, An introduction to arithmetic topology, 2nd edition.

[Neu69a] Jürgen Neukirch, *Kennzeichnung der endlich-algebraischen Zahlkörper durch die Galoisgruppe der maximal auflösbaren Erweiterungen*, J. Reine Angew. Math. **238** (1969), 135–147. MR 258804

[Neu69b] ______, *Kennzeichnung der p-adischen und der endlichen algebraischen Zahlkörper*, Invent. Math. **6** (1969), 296–314. MR 244211

[Neu99] Jürgen Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder. MR 1697859 (2000m:11104)

[Nii14] Hirofumi Niibo, *Idèlic class field theory for 3-manifolds*, Kyushu J. Math. **68** (2014), no. 2, 421–436. MR 3243372

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg, *Cohomology of number fields*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008. MR 2392026 (2008m:11223)

[NU19] Hirofumi Niibo and Jun Ueki, *Idèlic class field theory for 3-manifolds and very admissible links*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), no. 12, 8467–8488. MR 3955553

[NU23] ______, *A Hilbert reciprocity law on 3-manifolds*, Res. Math. Sci. **10** (2023), no. 1, Paper No. 3, 8. MR 4519217

[NU25] ______, *Idelic class field theory for 3-manifolds and very admissible links, a precis*, Algebraic number theory and related topics 2019, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B.., Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2025.

[Oza23] Manabu Ozaki, *On the p-adic limit of class numbers along a pro-p-extension*, preprint. arXiv:2306.08407, 2023.

[Pin23] Tali Pinsky, *Analytical study of the Lorenz system: existence of infinitely many periodic orbits and their topological characterization*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **120** (2023), no. 31, Paper No. e2205552120, 8. MR 4637849

[Rei18] Alan W. Reid, *Profinite rigidity*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, pp. 1193–1216. MR 3966805

[Rez97] Alexander Reznikov, *Three-manifolds class field theory (homology of coverings for a nonvirtually b_1-positive manifold)*, Selecta Math. (N.S.) **3** (1997), no. 3, 361–399. MR 1481134 (99b:57041)

[Rez00] ______, *Embedded incompressible surfaces and homology of ramified coverings of three-manifolds*, Selecta Math. (N.S.) **6** (2000), no. 1, 1–39. MR 1771215

(2001g:57035)

[Sek16] Shin-ichiro Seki, *Integers, 2016.12.17*, `https://integers.hatenablog.com/entry/2016/12/17/000000`, December 2016.

[Tas25a] Hirotaka Tashiro, *On genus theory for 3-manifolds in arithmetic topology*, preprint. arXiv:, 2025.

[Tas25b] ———, *On Hasse norm principle for 3-manifolds in arithmetic topology*, Res. Math. Sci. **12** (2025), no. 2, Paper No. 27. MR 4884597

[Tsa23] Chi Cheuk Tsang, *Veering branched surfaces, surgeries, and geodesic flows*, New York J. Math. **29** (2023), 1425–1495. MR 4689115

[TU25] Sohei Tateno and Jun Ueki, *The Iwasawa invariants of ${\mathbb{Z}_p}^d$-covers of links*, to appear in J. Lond. Math. Soc. (2025), preprint. arXiv:2401.03258.

[Tuc99] Warwick Tucker, *The Lorenz attractor exists*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), no. 12, 1197–1202. MR 1701385

[Uch76] Kôji Uchida, *Isomorphisms of Galois groups*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), no. 4, 617–620. MR 432593

[Uek14] Jun Ueki, *On the homology of branched coverings of 3-manifolds*, Nagoya Math. J. **213** (2014), 21–39. MR 3290684

[Uek20] ———, *Olympic links in a Chebotarev link*, Proc. Int. Geom. Cent. **13** (2020), no. 4, 40–49. MR 4237777

[Uek21a] ———, *Chebotarev links are stably generic*, Bull. Lond. Math. Soc. **53** (2021), no. 1, 82–91. MR 4224512

[Uek21b] ———, *Modular knots obey the chebotarev law*, preprint. arXiv:2105.10745, May 2021.

[UY25] Jun Ueki and Hyuga Yoshizaki, *The p-adic limits of class numbers in $\mathbb{Z}_p$-towers*, to appear in Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. (2025), preprint. arXiv:2210.06182.

[Was97] Lawrence C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1997. MR 1421575 (97h:11130)

[Yos23] Hyuga Yoshizaki, *Generalized Pell's equations and Weber's class number problem*, J. Théor. Nombres Bordeaux **35** (2023), no. 2, 373–391. MR 4655363

[Yos25a] ———, *The p-adic limits of iterated p-power cyclic resultants of multivariable polynomials*, preprint. arXiv:2503.06194, March 2025.

[Yos25b] ———, *Weber's class number problem and its variants*, Low Dimensional Topology and Number Theory, Fukuoka, Japan, March 15–18, 2022. In Memory of Professor Toshie Takata (Masanori Morishita, Hiroaki Nakamura, and Jun Ueki, eds.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 456, Springer Singapore, April 2025, pp. 363–379.