On the structure of Mordell–Weil groups over large algebraic extensions

東京科学大学 教育革新センター　浅山 拓哉 *
Takuya Asayama
Center for Innovative Teaching and Learning, Institute of Science Tokyo

概要

有理数体上の有限生成体のある大きな代数拡大体における準アーベル多様体の Mordell–Weil 群の構造について, 先行研究ならびに最近得られた結果について紹介する．本稿では 2 つのタイプの拡大を取り扱う; 第一に, 準アーベル多様体を動かしてそのある点を添加して得られる拡大; 第二に, 代数閉体における有限個の体同型による固定体として得られる拡大．これらの拡大体には, 劣 p 進体ではないが, Kummer 忠実体——遠アーベル幾何学の基礎体になり得る体——であるような新しい例が含まれていることを示す．さらに, こうした体上の Mordell–Weil 群は捩れを法として階数無限の自由加群になることと, 自由でない加群になること, 両方があり得る．本稿は田口雄一郎氏 (東京科学大学) との共同研究, および著者が 2025 年 1 月に RIMS 共同研究 (公開型)「代数的整数論とその周辺」にて行った講演に基づく．

Abstract

This note provides some previous works and our recent results on the structure of the Mordell–Weil groups of semiabelian varieties over certain infinite algebraic extensions of finitely generated fields over the field of rational numbers. We deal with two types of algebraic extensions; the first one is of extensions obtained by adjoining the coordinates of certain points of various semiabelian varieties; the second one is of extensions that arise as the fixed subfield in the algebraically closed field by a finite number of field automorphisms. We show that some of these fields are not sub-p-adic, but become new examples of Kummer-faithful fields, which are expected to be suitable as ground fields of anabelian geometry. Moreover, both cases can occur, in which the Mordell–Weil groups modulo torsion over these fields are free of infinite rank and not free. This note is based on joint work with Yuichiro Taguchi (Institute of Science Tokyo) and on the author's talk at the RIMS Workshop "Algebraic Number Theory and Related Topics" held in January 2025.

1　序

体 K および K 上の準アーベル多様体 A に対し, A の K 有理点がなすアーベル群を **Mordell–Weil 群**という．Mordell–Weil 群の研究において, 次の結果は基本的である．

定理 1 (Mordell–Weil の定理, cf. [20, Chapter 6, Theorem 1])**.** K を素体上有限生成体, A を K 上のアーベル多様体とする．このとき, Mordell–Weil 群 $A(K)$ は有限生成である．

この定理から, とくに, $A(K)$ は有限の捩れ群と階数有限の自由 $\mathbb{Z}$ 加群の直和である．では, 体 K が素体上無限生成であるとき, その上の (準) アーベル多様体 A の Mordell–Weil 群 $A(K)$ の構造はどうなるであろうか．

無限生成体においては, Mordell–Weil 群が有限生成であるかはまったく保証されない (3 節参照)．しかしながら, 中には「捩れ部分群が有限」「捩れを法として自由」「非自明な可除元をもたない」といった比較的扱いやすい性質をもつことがある．ここで挙げた性質は, ある意味で体が「小さい」ことを示唆するようなものである．体論の立場にたてば, 逆に Mordell–Weil 群がこうした性質をもつことを以て, 無限生成体のあるクラスを

* Email address: asayama@citl.isct.ac.jp

特徴づけることも考えられよう.

本稿の主題のひとつである **Kummer 忠実体**という概念について紹介する. Kummer 忠実体は望月 [24] によって定義された, 遠アーベル幾何学に端を発する概念である. 遠アーベル幾何学の概説については, たとえば中村・玉川・望月 [27] や星 [10] を参照されたい. ここでは遠アーベル幾何学と本研究との関連について述べる.

1990 年代以降の望月らによる研究 ([23] など) により, 遠アーベル幾何学がその創始者である Grothendieck の当初の思惑を超えて素体上有限生成とは限らない体でも展開できることが判明し, 「どのような体の上で遠アーベル幾何学が展開できるか」という問題が生じた. Kummer 忠実体は, すでに遠アーベル幾何学が展開されている代数体や劣 p 進数体を含む概念であり, 望月 [24] や星 [9] らによって, 実際に遠アーベル幾何学の基礎体として適していることが示唆されている. Kummer 忠実体の正確な定義は 2 節で与えるが, 大雑把に述べると, その上の任意の準アーベル多様体の Mordell–Weil 群が非自明な可除元をもたないような体である (これは Kummer 写像が単射であることと同値である). そのような群は $\mathbb{Q}$ や $p^{-\infty}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ と同型な部分群をもたず, その意味で Kummer 忠実という性質は体が「大きすぎない」ことを表している.

浅山・田口 [1] では, 次の 2 つのタイプの無限生成体を扱い, それらの上の Mordell–Weil 群の構造や Kummer 忠実性について考察した:

(1) 素体上有限生成体に, 準アーベル多様体のある無限族のある点の座標を添加して得られる体;
(2) 素体上有限生成体の代数閉包において, 有限個の体同型の固定体として得られる体.

本稿では, 主に第二のタイプの拡大について詳説する. なお, 浅山・田口 [1] のプレプリント v1 では (以下で定義する記号を用いれば) $\overline{K}(\sigma)$ と書かれる体の (トーラス的) Kummer 忠実性に関する主張 (Theorems 5.2 and 5.4) が含まれるが, 残念ながら議論に不備があることが判明した. この主張 (予想 6) については本稿執筆の時点では未解決である.

本稿の構成について述べる. 2 節では, 本稿で用いる定義や記号, ならびに浅山・田口 [1] で得られた結果および上述の不備に関して当該のプレプリントの枠組みで述べられる最良の結果 (定理 8, 当初の主張より弱いがなお非自明と思われる) について紹介する. 3 節では, 無限生成体上の Mordell–Weil 群の構造に関する先行研究について述べる. そして, 4 節で上記の結果について, 証明の概要を説明する. 最後に, 5 節で最近の進展について述べる.

2 記号と主結果

この節では, 前節の最後に述べた 2 つのタイプの体について, それぞれ記号を準備し本稿における主結果を述べる. 以下, 体 F に対して, その代数閉包 $\overline{F}$ を固定しておき, F の代数拡大はすべて $\overline{F}$ の部分体とみなす. F の $\overline{F}$ における分離閉包を F^{sep} と書く. F の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$ を G_F と書き, G_F の各元を $\overline{F}$ の自己同型に一意に延長する.

$\mathbb{Z}$ 加群 X に対し, 次の記号・用語を用いる:

- X の**可除部分** $X_{\mathrm{div}} = \bigcap_{n\geq 1} nX$.
- X の部分 $\mathbb{Z}$ 加群 Y および正整数 n に対して $n^{-1}Y = \{x \in X \mid nx \in Y\}$.
- 正整数 n に対して X の n **捩れ部分加群** $X[n] = n^{-1}\{0\} = \{x \in X \mid nx = 0\}$.
- 素数 ℓ に対して X の ℓ **冪捩れ部分加群** $X[\ell^\infty] = \bigcup_{n\geq 1} X[\ell^n]$.
- X の**捩れ部分加群** $X_{\mathrm{tor}} = \bigcup_{n\geq 1} X[n]$.
- X が**捩れを法として自由**であるとは, 剰余群 X/X_{tor} が自由であることをいう.

$X_{\mathrm{div}}, n^{-1}Y, X[n], X[\ell^\infty], X_{\mathrm{tor}}$ はいずれも X の部分 $\mathbb{Z}$ 加群である.

定義 2. (1) ([24, Definition 1.5]) 完全体 k が **Kummer 忠実** (resp. **トーラス的 Kummer 忠実**) であるとは, k の任意の有限次拡大 L および L 上の任意の準アーベル多様体 (resp. トーラス) A に対し $A(L)_{\mathrm{div}} = 0$ が成り立つことをいう.

(2) ([30, Definition 2.6 (2)]) 完全体 k が**高次 Kummer 忠実**であるとは, k の任意の有限次拡大 L および L 上の任意の固有かつ滑らかな代数多様体 X に対し

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(r))_{G_L} = 0$$

が k の標数と異なる任意の素数 ℓ ならびに $i \neq 2r$ を満たす任意の整数 i, r に対し成り立つことをいう. ここで $(-)_{G_L}$ は L の絶対 Galois 群 G_L が自明に作用する $(-)$ の最大商を表す.

(3) ([23, Definition 15.4 (i)]) p を素数とする. 体 k が**劣 p 進数体**であるとは, k が p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ のある有限生成体の部分体と同型であることをいう.

Kummer 忠実とそれに関連する概念に関して, 次が成り立つ:

- 定義より Kummer 忠実体 (resp. トーラス的 Kummer 忠実体, 劣 p 進数体) の部分体は再び Kummer 忠実体 (resp. トーラス的 Kummer 忠実体, 劣 p 進数体) である. また, Kummer 忠実体 (resp. トーラス的 Kummer 忠実体, 劣 p 進数体) の有限次拡大も再び Kummer 忠実体 (resp. トーラス的 Kummer 忠実体, 劣 p 進数体) である.
- 定義より Kummer 忠実体はトーラス的 Kummer 忠実体である. 逆は成り立たない [24, Remark 1.5.3 (ii)].
- k が標数 0 の Kummer 忠実体の Galois 拡大であるとき, k が高次 Kummer 忠実ならば Kummer 忠実である [30, Proposition 2.8].
- 劣 p 進数体は Kummer 忠実体である. 逆は成り立たない [24, Remark 1.5.4, (i) and (iii)].

第一のタイプ. k を代数体, g を正整数とする. $\boldsymbol{m} = (m_p)_p$ を素数 p によって添字づけられた非負整数 m_p の族とする. 体 $k_{g,\boldsymbol{m}}, K_{g,\boldsymbol{m}}$ をそれぞれ

$$k_{g,\boldsymbol{m}} = k\left(\left\{A(\overline{k})[p^{m_p}] \middle| A \text{ は } k \text{ 上の次元 } g \text{ 以下の準アーベル多様体}, p \text{ は素数}\right\}\right)$$
$$K_{g,\boldsymbol{m}} = k\left(\left\{p^{-m_p}A(k) \middle| A \text{ は } k \text{ 上の次元 } g \text{ 以下の準アーベル多様体}, p \text{ は素数}\right\}\right)$$

で定める. 明らかな包含 $k_{g,\boldsymbol{m}} \subset K_{g,\boldsymbol{m}}$ が存在する. また, $\boldsymbol{m}$ に対して $m_p \geq 1$ となる素数 p が無限個あるならば, $k_{g,\boldsymbol{m}}$ およびその拡大である $K_{g,\boldsymbol{m}}$ は劣 p 進数体ではない [30, Remark 3.4]. 小関・田口 [30, Theorem 3.3] は $k_{g,\boldsymbol{m}}$ が高次 Kummer 忠実体であることを証明した. とくに $k_{g,\boldsymbol{m}}$ は Kummer 忠実体であることがわかる. 第一のタイプの体に関して浅山・田口 [1] では次の結果を得た.

定理 3. k を代数体, g を正整数, $\boldsymbol{m} = (m_p)_p$ を素数 p によって添字づけられた非負整数 m_p の族とする.

(1) 体 $K_{g,\boldsymbol{m}}$ は高次 Kummer 忠実体である. とくに $K_{g,\boldsymbol{m}}$ は Kummer 忠実体である.

(2) $\boldsymbol{m}$ に対して $m_p \geq 1$ となる素数 p が無限個あるとする. A を k 上の次数 g 以下の準アーベル多様体とする. A が捩れでない k 有理点をもつ (i.e., $\mathrm{rank}(A(k)) \geq 1$) ならば, Mordell–Weil 群 $A(K_{g,\boldsymbol{m}})$ は捩れを法として自由ではない. とくに $A(K_{g,\boldsymbol{m}})$ は有限生成ではない.

第二のタイプ. K を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体, e を正整数とする. G_K の元の e 個組 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_e) \in G_K^e$ に対し, $\overline{K}(\sigma)$ を $\overline{K}$ における σ の固定体とする. すなわち

$$\overline{K}(\sigma) = \{x \in \overline{K} \mid \text{各 } 1 \leq i \leq e \text{ に対し } \sigma_i x = x\}.$$

さらに, 拡大 $\overline{K}(\sigma)/K$ における最大 Galois 部分拡大を $\overline{K}[\sigma]$ と書く.

G_K は Krull 位相 (K の任意の有限次 Galois 拡大 K' に対する G_K の部分群 $G_{K'}$ を単位元における基本近傍系とする位相) によりコンパクト位相群となり, その上の確率測度 μ で次を満たすものが一意に定まる (cf. [4, Proposition 21.2.1]):

(1) (両側不変性) G_K の任意の可測集合 B および任意の $\sigma \in G_K$ に対し, $\mu(\sigma B) = \mu(B\sigma) = \mu(B)$;
(2) (正則性) G_K の任意の可測集合 B および任意の $\varepsilon > 0$ に対し, G_K の開集合 U および閉集合 C であって, $C \subset B \subset U$ かつ $\mu(U \smallsetminus C) < \varepsilon$ を満たすものが存在する.

この μ を G_K の (正規化された) **Haar 測度**とよぶ. G_K^e にも同様に位相および Haar 測度 (これも μ とかく) を入れる.「**ほとんどすべての** $\sigma \in G_K^e$」と書いたら,「G_K^e のある測度零集合を除いたすべての $\sigma \in G_K^e$」を意味することとする.

注意 4. $\sigma \in G_K^e$ に対し, 明らかな包含 $\overline{K}[\sigma] \subset \overline{K}(\sigma)$ があるが, この 2 つの体は, 次の意味で異なる体である: ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 拡大 $\overline{K}(\sigma)/\overline{K}[\sigma]$ は無限次拡大である. さらに, ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, $\overline{K}(\sigma)/K$ は Galois 拡大ではない. 実はより強く, 次が成り立つことが知られている [2, Theorems 7.9 and 7.10]: ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, $\overline{K}(\sigma)$ を有限次拡大または Galois 拡大にもつ $\overline{K}(\sigma)$ の真の部分体は存在しない.

大溪 ([28, Corollary 1], 訂正論文 [29, Corollary 1] も参照) は $e \geq 2$ のとき, ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}[\sigma]$ は Kummer 忠実であることを証明した. このタイプの体について浅山・田口 [1] では, この大溪の結果を拡張し, $e = 1$ での体 $\overline{K}[\sigma]$ の Kummer 忠実性に関する主張を得た. また, $e \geq 2$ の場合には, $\overline{K}[\sigma]$ 上の Mordell–Weil 群の構造定理に相当する主張が得られた.

定理 5. K を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体, e を正の整数とする.

(1) ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}[\sigma]$ は Kummer 忠実である.
(2) $e \geq 2$ とする. ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 次が成り立つ: $\overline{K}[\sigma]$ の任意の有限次拡大 L および L 上の任意の準アーベル多様体 A に対し, 群 $A(L)$ は有限の捩れ群と階数可算の自由 $\mathbb{Z}$ 加群との直和である.

(2) において, 浅山・田口 [1] が証明したのは「群 $A(L)/A(L)_{\mathrm{tor}}$ は自由 $\mathbb{Z}$ 加群」であることである.「$A(L)_{\mathrm{tor}}$ は有限」「$A(L)$ の階数は可算」であることはそれぞれ Jacobson and Jarden [16], Geyer and Jarden [6] による (後述の定理 13 参照).

次に $\overline{K}(\sigma)$ の Kummer 忠実性について考える. 定理 5 の一般化として, 次の予想は自然である.

予想 6. K を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体, e を正の整数とする.

(1) ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}(\sigma)$ はトーラス的 Kummer 忠実である.
(2) ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}(\sigma)$ は Kummer 忠実である.

この予想における最終的な目標は (2) を証明することであるが, その途中段階として (1) を設けている. なお, 詳細は省くが, 定理 5 の証明は体 $\overline{K}[\sigma]$ が K 上 Galois であることに依ったものとなっている. 一方で, 注意 4 で述べたように, 体 $\overline{K}(\sigma)$ は Galois 拡大とは対極にあるような体であるため, 予想 6 に対しては別のアプローチが必要となる.

先述の通り, Kummer 忠実性は準アーベル多様体の Mordell–Weil 群の構造によって定義されるが, 実は次の命題により, アーベル多様体とトーラスのそれぞれの場合について考えれば十分である.

命題 7 (小関・田口 [30, Proposition 2.3])**.** 完全体 K に対し K が Kummer 忠実であることは次の 2 条件が

ともに成り立つことと同値である:

(1) K 上の任意のアーベル多様体 A に対し $A(K)_{\mathrm{div}} = 0$;
(2) K の任意の有限次拡大 L に対し $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(L)_{\mathrm{div}} = 0$ (i.e., K はトーラス的 Kummer 忠実).

アーベル多様体の場合について, Jarden and Petersen [19] は , $e \geq 2$ の場合にほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ および K 上の任意のアーベル多様体 A に対し $A(\overline{K}(\sigma))_{\mathrm{div}} = 0$ であることを証明している (後述の定理 13 (4) 参照). 命題 7 より, 予想 6 (1) が $e \geq 2$ で成り立てば, この場合における予想 6 (2) が従う. 本稿における主結果は以下の通りである.

定理 8. K を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体, e を正の整数とする.

(1) ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}(\sigma)$ の乗法群 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{K}(\sigma))$ は非自明な可除元をもたない.
(2) ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ およびその任意の有限次拡大 M に対し, $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(M)_{\mathrm{div}} \cap \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(K) = 0$ が成り立つ.

注意 9. 上の定理の状況で, $\overline{K}(\sigma)$ がトーラス的 Kummer 忠実であることを言うには, $\overline{K}(\sigma)$ の任意の有限次拡大 M に対し, $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(M)_{\mathrm{div}} = 0$, すなわち, 任意の $a \in \overline{K}^{\times} \smallsetminus \{1\}$ に対し $a \notin \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(M)_{\mathrm{div}}$ が成り立つことを示す必要がある. 浅山・田口 [1] のプレプリント v1 には, この主張の証明が含まれるが, $a \in \overline{K}^{\times} \smallsetminus \{1\}$ が K に属していないときの議論が不正確であった. 詳細については 4 節で述べる.

3 先行研究

本節では, 無限生成体上の Mordell–Weil 群の構造について, 主に本稿で考えるような体に関連する先行研究をまとめる. まず, 無限生成体のもっとも極端な例である代数閉体を考えよう.

定理 10 (cf. [3, Theorem 10.1])**.** K を代数閉体とし, A を K 上のアーベル多様体とする. A の次元を $g > 0$ とすると, Mordell–Weil 群 $A(K)$ に対して次が成り立つ:

(1) K の標数が 0 ならば
$$A(K) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\oplus 2g} \oplus \mathbb{Q}^{\oplus \# K}.$$
(2) K の標数が $p > 0$ であるとする.
　(2-i) K が p 元体 $\mathbb{F}_p$ の代数閉包と同型ならば, ある $0 \leq a \leq g$ に対し
$$A(K) \cong \left(\bigoplus_{\ell \neq p:\ \text{素数}} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \right)^{\oplus 2g} \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\oplus a}.$$
　(2-ii) K が p 元体 $\mathbb{F}_p$ の代数閉包と同型でないならば, ある $0 \leq a \leq g$ に対し
$$A(K) \cong \left(\bigoplus_{\ell \neq p:\ \text{素数}} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \right)^{\oplus 2g} \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\oplus a} \oplus \mathbb{Q}^{\oplus \# K}.$$
ただし, $\# K$ は K の濃度である.

素体上有限生成の体上の Mordell–Weil 群は, Mordell–Weil の定理 (定理 1) より, 捩れを法として自由であった. 素体上無限生成の体においても, その上の Mordell–Weil 群が捩れを法として自由である例が知られている. トーラス (とくに乗法群) の場合と, アーベル多様体の場合のそれぞれにおける先行研究を以下に紹介する. 体 F に対し, F の最大アーベル拡大を F^{ab} と書く. また, 正整数 d に対し, F の d 次以下の代数拡大をすべて合成して得られる体を $F^{(d)}$ と書く.

定理 11. k を代数体, d を正整数とする．次の体 K について, その乗法群 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(K)$ は捩れを法として自由である:

(1) (岩澤 [13, Theorem 2]) $K = k^{\mathrm{ab}}$;
(2) (Schenkman [31, Theorem A]) $K = \mathbb{Q}^{(d)}$;
(3) (May [22, Theorem 2]) $K = (k^{\mathrm{ab}})^{(d)}$;
(4) (堀江 [8, Proposition 1]) $\mathbb{Q}$ の代数拡大 K で, その $\mathbb{Q}$ 上の Galois 閉包が 1 の冪根を有限個しか含まないもの (e.g., $\mathbb{Q}$ の最大総実拡大 $\mathbb{Q}^{\mathrm{tf}}$).

定理 12. k を代数体, d を正整数とする．

(1) (Moon [25, Proposition 7]) K を k の Galois 拡大, A を k 上のアーベル多様体とする．群 $A(K)$ の捩れ部分加群 $A(K)_{\mathrm{tor}}$ が有限ならば, $A(K)$ は捩れを法として自由である．
(2) (Moon [26, Proposition 2]) k 上の任意のアーベル多様体 A に対し, 群 $A(K^{(d)})$ は捩れを法として自由である．
(3) (Grizzard–Habegger–Pottmeyer [7, Theorem 1.2]) $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上の有限次 Galois 拡大で, その Galois 群が対称群または交代群であるようなものたちをすべて合成して得られる体を $(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{sa}}$ とする．$\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線 E に対し, 群 $E(((\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{sa}})^{(d)})$ は捩れを法として自由である．

本稿の主題から外れてしまうが, 定理 12 (3) について, 群 $E(((\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{sa}})^{(d)})$ は E に付随する標準的高さ関数 $\widehat{h}_E$ に関する Bogomolov 性を満たさないことに言及したい．すなわち

$$\inf_{\substack{P \in E(((\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{sa}})^{(d)}) \\ \text{非捩れ点}}} \widehat{h}_E(P) = 0$$

が成り立っている ($P \in E(\overline{\mathbb{Q}})$ に対し $\widehat{h}_E(P) \geq 0$ であり, P が捩れ点であることは $\widehat{h}_E(P) = 0$ と同値であることに注意)．Bogomolov 性から Mordell–Weil 群が捩れを法として自由であることが導かれるので [7, Proposition 1.1], この例はその逆が成り立たないことを示している．

次に, 体 $\overline{K}(\sigma)$ および体 $\overline{K}[\sigma]$ 上の Mordell–Weil 群の構造についての先行研究を以下にまとめる．正整数 n に対し ζ_n を 1 の原始 n 乗根とする．

定理 13. K を素体上有限生成体, e を正整数とする．

(1) (Geyer–Jarden [6, Theorem 2.4] (resp. Frey–Jarden [3, Theorem 9.1])) K は無限体であるとする．ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ と $\overline{K}[\sigma]$ (resp. $\overline{K}(\sigma)$) 上の次元正の任意のアーベル多様体 A に対し, 群 $A(\overline{K}[\sigma])$ (resp. $A(\overline{K}(\sigma))$) は階数可算である．
(2) (Jarden [17, Theorems 8.1 and 8.2])
    (2-i) $e = 1$ とする．ほとんどすべての $\sigma \in G_K$ と任意の正整数 d に対し $[\overline{K}(\sigma)(\zeta_\ell) : \overline{K}(\sigma)] = d$ となる素数 ℓ が無限個存在する．とくに, ほとんどすべての $\sigma \in G_K$ および $\overline{K}(\sigma)$ の任意の有限次拡大 M に対し, M は 1 の冪根を無限個含み, かつ, $\zeta_\ell \notin M$ となる素数 ℓ が存在する．
    (2-ii) $e \geq 2$ とする．ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ と任意の正整数 d に対し $[\overline{K}(\sigma)(\zeta_n) : \overline{K}(\sigma)] \leq d$ となる正整数 n は有限個である．とくに, ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ および $\overline{K}(\sigma)$ の任意の有限次拡大 M に対し, M は 1 の冪根を有限個しか含まない．
(3) K に関する次の主張を考える:
    (a) $e = 1$ とする．ほとんどすべての $\sigma \in G_K$ および $\overline{K}(\sigma)$ 上の任意の次元正のアーベル多様体 A に対し, 群 $A(\overline{K}(\sigma))_{\mathrm{tor}}$ は無限群である．より詳しく, $A(\overline{K}(\sigma))[\ell] \neq 0$ となる素数 ℓ が無限個存在する．

(b) $e \geq 2$ とする．ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ および $\overline{K}(\sigma)$ 上の任意のアーベル多様体 A に対し, 群 $A(\overline{K}(\sigma))_{\mathrm{tor}}$ は有限群である.

(c) ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ および $\overline{K}(\sigma)$ 上の任意のアーベル多様体 A および任意の素数 ℓ に対し, 群 $A(\overline{K}(\sigma))[\ell^\infty]$ は有限群である.

主張 (a)–(c) は次の場合に成り立つ:

(3-i) (Geyer–Jarden [5, Theorem 1.1]) 「任意の (次元正の) アーベル多様体」を「任意の楕円曲線」に置き換えると, 主張 (a)–(c) が成り立つ.

(3-ii) (Jacobson–Jarden [14, Proposition 4.2]) K が有限体のとき, 主張 (a)–(c) が成り立つ.

(3-iii) (Jacobson–Jarden [16, Main Theorem], Zywina [32, Theorem 1.1], Jarden–Petersen [18, Theorem C]) K の標数が 0 のとき, 主張 (a)–(c) が成り立つ.

(3-iv) (Jacobson–Jarden [16, Main Theorem]) 任意の K に対して主張 (c) が成り立つ.

(4) (Jarden–Petersen [19, Theorem 1.3 (ii)]) $e \geq 2$ とする．ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$, および $\overline{K}(\sigma)$ の任意の有限次拡大 M, ならびに M 上の任意のアーベル多様体 A に対し, $A(M)_{\mathrm{div}} = 0$ が成り立つ.

Larsen [21] は体 $\overline{K}(\sigma)$ に関する定理 13 (1) の主張が**すべての** $\sigma \in G_K^e$ に対して成り立つと予想した．Im and Larsen [11, Theorem 1.4] は $e = 1$ かつ K の標数が 2 でないときにこの予想が成り立つことを証明した. Larsen の予想に関しては, 彼らによるサーベイ論文 [12] に詳しい.

定理 13 (3) について, Geyer and Jarden [5] は主張 (a)–(c) が任意の素体上有限生成体 K で成り立つと予想した. 上で述べた通り, この予想は K が標数正の無限体の場合の主張 (a)・(b) を除いて肯定的に解決されている．なお Jacobson and Jarden [14] は K が標数正の場合の主張 (a) の証明を与えたが, 彼ら自身により当該証明が誤りであることが報告されている [15].

4 定理 8 の証明の概略

本節では, 主結果の証明の概略を述べる．はじめに $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_e) \in G_K^e$ に対し $\overline{K}(\sigma) = \bigcap_{i=1}^e \overline{K}(\sigma_i) \subset \overline{K}(\sigma_1)$ であるから, $e = 1$ の場合に主結果を証明すれば十分であることに注意しよう. 以下では $e = 1$ とする.

定理 8 (1), (2) の主張を満たさない $\sigma \in G_K$ の集合をそれぞれ S, S' とおく．このとき, 定理 8 (1), (2) はそれぞれ S, S' の測度が 0 であることと同値である．$a \in \overline{K}^\times \setminus \{1\}$ に対し

$$S_a = \{\sigma \in G_K \mid a \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{K}(\sigma))_{\mathrm{div}}\}$$
$$S'_a = \{\sigma \in G_K \mid \text{ある有限次拡大 } M/\overline{K}(\sigma) \text{ に対し } a \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(M)_{\mathrm{div}}\}$$

とおくと

$$S = \bigcup_{a \in \overline{K}^\times \setminus \{1\}} S_a, \quad S' = \bigcup_{a \in K^\times \setminus \{1\}} S'_a$$

がそれぞれ成り立つ．$\overline{K}^\times \setminus \{1\}$, $K^\times \setminus \{1\}$ はそれぞれ可算なので

$$\text{定理 8 (1)} \Longleftrightarrow \text{任意の } a \in \overline{K}^\times \setminus \{1\} \text{ に対し } \mu(S_a) = 0 \tag{$*$}$$
$$\text{定理 8 (2)} \Longleftrightarrow \text{任意の } a \in K^\times \setminus \{1\} \text{ に対し } \mu(S'_a) = 0 \tag{$**$}$$

が成り立つ．なお $e = 1$ において

$$\text{予想 6 (1)} \Longleftrightarrow \text{任意の } a \in \overline{K}^\times \setminus \{1\} \text{ に対し } \mu(S'_a) = 0 \tag{$***$}$$

である. 以下, ($*$)–($***$) はそれぞれ “$\Longleftrightarrow$” の右側の主張を表すものとする.

まず $a \in \overline{K}^{\times} \setminus \{1\}$ が 1 の冪根であるときを考える．一般に, 体 M に対し $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(M)_{\mathrm{div}}$ が 1 以外の 1 の冪根を含むことは, M がある素数 ℓ に対する 1 の ℓ 冪乗根をすべて含むことと同値である．Jarden [17] による結果を利用することで, 次の主張が得られ, S_a および S'_a の測度が 0 であることがわかる．

命題 14. K を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体とする．ほとんどすべての $\sigma \in G_K$, および $\overline{K}(\sigma)$ の任意の有限次拡大 M, ならびに任意の素数 ℓ に対し, M は 1 の ℓ 冪乗根をすべては含まない．

次に $a \in \overline{K}^{\times} \setminus \{1\}$ が 1 の冪根でないとする．素数 ℓ に対し

$$T_a^{(\ell)} = \{\sigma \in G_K \mid a \text{ のある } \ell \text{ 乗根は } \overline{K}(\sigma) \text{ に含まれる }\}$$

とおく．$T_a^{(\ell)}$ の任意の元は a を固定するから, $T_a^{(\ell)} \subset G_{K(a)}$ が成り立つ．定義とあわせて

$$S_a \subset \bigcap_{\ell:\ \text{素数}} T_a^{(\ell)} \subset G_{K(a)}$$

を得る．$S_a \subset S'_a$ であるから, K を $K(a)$ に置き換えることで, $(*)$ は $(**)$ に帰着される．なお, $(***)$ が $(**)$ に帰着されるかどうかは現時点では不明で, 浅山・田口 [1] のプレプリント v1 における誤謬はこれを帰着できると思い違ったことに起因する．

$(**)$ を示そう．a は K の元であって, 1 の冪根ではないとする．G_K の可測集合の族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が μ **独立**であるとは, I の任意の有限部分集合 J に対し

$$\mu\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mu(A_i)$$

が成り立つことをいう．μ 独立性を示すための鍵になるのは, 次の補題である．

補題 15. 整数 $N \geq 3$ で次を満たすものが存在する: $\ell_1, \ldots, \ell_r \geq N$ を相異なる素数とし $n = \ell_1 \cdots \ell_r$ をそれらの積とする．このとき K 上の多項式 $X^n - a$ の最小分解体の拡大次数は $n\varphi(n)$ である．ただし, φ は Euler のトーシェント関数である．

補題 15 から, 素数 $\ell \geq N$ に対する多項式 $X^\ell - a$ の最小分解体たちが線形無関連であることがわかる．このことから, 集合族 $\{T_a^{(\ell)}\}_{\ell \geq N}$ の μ 独立性が導かれる．

正整数 m および素数 ℓ に対して

$$\begin{aligned} U_{a,m} &= \{\sigma \in G_K \mid a \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{K}(\sigma^m))_{\mathrm{div}}\} = \{\sigma \in G_K \mid \sigma^m \in S_a\}, \\ V_{a,m}^{(\ell)} &= \{\sigma \in G_K \mid a \text{ のある } \ell \text{ 乗根は } \overline{K}(\sigma^m) \text{ に含まれる }\} = \{\sigma \in G_K \mid \sigma^m \in T_a^{(\ell)}\} \end{aligned}$$

とおく．$U_{a,1} = S_a$, $V_{a,1}^{(\ell)} = T_a^{(\ell)}$ である．実は $\overline{K}(\sigma)$ の任意の有限次拡大は $\overline{K}(\sigma^m)$ という形のものに限る, ということが証明できるので

$$S'_a = \bigcup_{m \geq 1} U_{a,m}$$

が成り立つ．よって $\mu(S'_a) = 0$ を言うには, 各 $m \geq 1$ に対し $\mu(U_{a,m}) = 0$ を示せばよい．また, 定義から, 各 m に対して

$$U_{a,m} \subset \bigcap_{\ell:\ \text{素数}} V_{a,m}^{(\ell)}$$

が成り立つ．補題 15 を使うことにより, $V_{a,m}^{(\ell)}$ に関して次を証明することができる．

補題 16. 正整数 m を固定する．整数 $N \geq 3$ で次を満たすものが存在する:

(1) 集合族 $\{V_{a,m}^{(\ell)}\}_{\ell\geq N}$ は μ 独立である;
(2) 素数 $\ell\geq N$ に対し $\mu(V_{a,m}^{(\ell)})=1-1/\ell$.

定理 8 の証明. 補題 16 より, 各 $m\geq 1$ に対して, 整数 $N\geq 3$ で集合族 $\{V_{a,m}^{(\ell)}\}_{\ell\geq N}$ が μ 独立であるものが存在する. 再び補題 16 より

$$\mu(U_{a,m})\leq \mu\left(\bigcap_{\ell\geq N} V_{a,m}^{(\ell)}\right)=\prod_{\ell\geq N}\mu(V_{a,m}^{(\ell)})=\prod_{\ell\geq N}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)=0$$

を得る. よって, 各 $m\geq 1$ に対し $\mu(U_{a,m})=0$ なので

$$\mu(S'_a)=\mu\left(\bigcup_{m\geq 1} U_{a,m}\right)\leq \sum_{m\geq 1}\mu(U_{a,m})=0$$

である. したがって, $\mu(S'_a)=0$ より, $(**)$ が成り立つ. □

5 最近の進展

予想 6 に関する最近の進展について簡単に述べて, 本稿の締めくくりにしたい. 「代数的整数論とその周辺」での講演では, 体 K が代数体のとき, Jarden and Petersen [19] の結果 (定理 13 (4)) が $e=1$ でも成り立つことを紹介した. すなわち, 次が成り立つ.

定理 17. K を代数体とする. ほとんどすべての $\sigma\in G_K$, および $\overline{K}(\sigma)$ の任意の有限次拡大 M, ならびに M 上の任意のアーベル多様体 A に対し, $A(M)_{\mathrm{div}}=0$ が成り立つ.

この定理の証明は, Jarden and Petersen [19] の証明において, 仮定 $e\geq 2$ を用いる補題 (Lemma 5.2) を $e=1$ に拡張することによって行われる. 鍵となるのは, 前節の定理 8 の証明における $T_a^{(\ell)}$ や $V_{a,m}^{(\ell)}$ に相当する集合についての, 補題 16 にあるような μ 独立性と測度の評価である.

その後, 著者は K が代数体の場合に限ってではあるが, 浅山・田口 [1] のプレプリント v1 における誤謬を修正することができた. 命題 7 と上の定理から, 次の結果が得られる.

定理 18. K を代数体, e を正の整数とする. このとき予想 6 が成り立つ. すなわち:

(1) ほとんどすべての $\sigma\in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}(\sigma)$ はトーラス的 Kummer 忠実である;
(2) ほとんどすべての $\sigma\in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}(\sigma)$ は Kummer 忠実である.

4 節で, 上述の誤謬は $(**)$ から $(***)$ が導出できると思い違ったことに起因すると述べたが, $(**)$ において考える a の範囲を少し拡張することにより, $(***)$ が導出できるようになることが示される. そして, この拡張した $(**)$ を証明することで, 上記の結果を得ることができる.

謝辞

RIMS 共同研究 (公開型)「代数的整数論とその周辺」での講演ならびに本稿執筆の機会を与えてくださった, プログラム委員の三枝洋一先生, 中村健太郎先生, 杉山真吾先生に心より感謝申し上げます. 本研究は京都大学数理解析研究所 (数学・数理科学の先端的共同利用・共同研究拠点) の支援を受けたものです.

参考文献

[1] T. Asayama and Y. Taguchi, *Mordell–Weil groups over large algebraic extensions of fields of characteristic zero*, preprint, 2024. arXiv:2408.03495

[2] L. Bary-Soroker, *On pseudo algebraically closed extensions of fields*, J. Algebra **322** (2009), 2082–2105.

[3] G. Frey and M. Jarden, *Approximation theory and the rank of abelian varieties over large algebraic fields*, Proc. Lond. Math. Soc. **28** (1974) 112–128.

[4] M. D. Fried and M. Jarden, *Field Arithmetic*, fourth edition, revised by M. Jarden, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics **11**, Springer, Cham, 2023.

[5] W.-D. Geyer and M. Jarden, *Torsion points of elliptic curves over large algebraic extensions of finitely generated fields*, Isr. J. Math. **31** (1978) 257–297.

[6] W.-D. Geyer and M. Jarden, *The rank of abelian varieties over large algebraic fields*, Arch. Math. **86** (2006), 211–216.

[7] R. Grizzard, P. Habegger, and L. Pottmeyer, *Small points and free abelian groups*, Int. Math. Res. Not. **2015** (2015), 10657–10679.

[8] K. Horie, *Multiplicative groups in some infinite algebraic number fields*, Arch. Math. **54** (1990), 32–35.

[9] Y. Hoshi, *On the Grothendieck conjecture for affine hyperbolic curves over Kummer-faithful fields*, Kyushu J. Math. **71** (2017), 1–29.

[10] 星 裕一郎, 遠アーベル幾何学の進展, 数学 **74** (2022), 1–30.

[11] B.-H. Im and M. Larsen, *Abelian varieties over cyclic fields*, Am. J. Math. **130** (2008), 1195–1210.

[12] B.-H. Im and M. Larsen, *Abelian varieties and finitely generated Galois groups*, in: M. Jarden and T. Shaska (eds.), Abelian Varieties and Number Theory, Contemp. Math. **767** (2021), 1–12.

[13] K. Iwasawa, *A note on Kummer extensions*, J. Math. Soc. Japan **5** (1953), 253–262.

[14] M. Jacobson and M. Jarden, *On torsion of abelian varieties over large algebraic extensions of finitely generated fields*, Mathematika **31** (1984), 110–116.

[15] M. Jacobson and M. Jarden, *On torsion of abelian varieties over large algebraic extensions of finitely generated fields: Erratum*, Mathematika **32** (1985), 316.

[16] M. Jacobson and M. Jarden, *Finiteness theorems for torsion of abelian varieties over large algebraic fields*, Acta Arith. **98** (2001), 15–31.

[17] M. Jarden, *Roots of unity over large algebraic fields*, Math. Ann. **213** (1975), 109–127.

[18] M. Jarden and S. Petersen, *Torsion of abelian varieties over large algebraic extensions of* $\mathbb{Q}$, Nagoya Math. J. **234** (2019), 46–86.

[19] M. Jarden and S. Petersen, *The section conjecture over large algebraic extensions of finitely generated fields*, Math. Nachr. **295** (2022), 890–911.

[20] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[21] M. Larsen, *Rank of elliptic curves over almost separably closed fields*, Bull. Lond. Math. Soc. **35** (2003), 817–820.

[22] W. May, *Multiplicative groups of fields*, Proc. Lond. Math. Soc. **24** (1972), 295–306.

[23] S. Mochizuki, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138** (1999), 319–423.

[24] S. Mochizuki, *Topics in absolute anabelian geometry III: Global reconstruction algorithms*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **22** (2015), 939–1156.

[25] H. Moon, *On the Mordell-Weil groups of Jacobians of hyperelliptic curves over certain elementary abelian* 2*-extensions*, Kyungpook Math. J. **49** (2009), 419–424.

[26] H. Moon, *On the structure of the Mordell-Weil groups of the Jacobians of curves defined by* $y^n = f(x)$, Math. J. Okayama Univ. **54** (2012), 49–52.

[27] 中村博昭・玉川安騎男・望月新一, 代数曲線の基本群に関する Grothendieck 予想, 数学 **50** (1998), 113–129.

[28] S. Ohtani, *Kummer-faithful fields which are not sub-p-adic*, Res. Number Theory **8** (2022), Paper No. 15, 7 pp.

[29] S. Ohtani, *Corrigendum to: Kummer-faithful fields which are not sub-p-adic*, Res. Number Theory **9** (2023), Paper No. 36, 7 pp.

[30] Y. Ozeki and Y. Taguchi, *A note on highly Kummer-faithful fields*, Kodai Math. J. **45** (2022), 49–64.

[31] E. Schenkman, *On the multiplicative group of a field*, Arch. Math. **15** (1964), 282–285.

[32] D. Zywina, *Abelian varieties over large algebraic fields with infinite torsion*, Isr. J. Math. **211** (2016), 493–508.