# 代数体上の楕円曲線に対する数論的同値について

東京電機大学・未来科学部 千田雅隆
Masataka Chida
School of Science and Technology for Future Life,
Tokyo Denki University

この論説では伊藤哲史氏（京都大学）と吉川祥氏（東京理科大学）との共同研究によって得られた楕円曲線に対する数論的同値性に関する結果について紹介する．

## 1　背景と主結果

### 1.1　代数体に対する数論的同値性

代数体 $K$ に対し，Dedekind の $\zeta$ 関数を $\zeta_K(s)$ とあらわすこととする．二つの代数体 $K_1$，$K_2$ が $\zeta_{K_1}(s) = \zeta_{K_2}(s)$ を満たすとき，$K_1$ と $K_2$ は数論的同値であるという．$K_1$ と $K_2$ が同型な体であれば，$\zeta_{K_1}(s) = \zeta_{K_2}(s)$ となるが逆は必ずしも成立しない．Gassman [G26] は 1926 年に出版された論文において，同型でない 180 次体の $K_1$ と $K_2$ で数論的同値になるようなものが存在することを示した．Perlis [P77] は $K_1$ と $K_2$ が数論的同値であるとき，$\mathbb{Q}$ 上の拡大次数，実素点と複素素点の個数，判別式は等しく，単数群が同型になることを示した．この事実と類数公式から単数基準と類数の積が等しくなることが従うが，各々の単数基準や類数は（一般には）異なることが知られている．例えば，$K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{-33})$，$K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{-16 \times 33})$ とすると $K_1$ と $K_2$ は数論的同値だが，$K_1$ の類数は 256 で $K_2$ の類数は 128 となることが知られている（de Smit-Perlis [dSP94]）．この場合，$\mathbb{A}_{K_1}$ と $\mathbb{A}_{K_2}$ が位相環及び $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ 代数として同型になるという興味深い例を与えている（ただし，$\mathbb{A}_K$ は代数体 $K$ のアデール環をあらわす）．また，Perlis [P77] は $K_1$ と $K_2$ の次数が 6 以下の場合には非自明な数論的同値な例が存在せず，7 次の代数体に対しては非自明な例が存在することを示した．

### 1.2　Hecke 指標に対する数論的同値性

$i = 1, 2$ に対し，$K_i$ を代数体とし，$\xi_i$ を $K_i$ 上の Hecke 指標とする．このとき，$\xi_i$ から定まる $L$ 関数 $L(\xi_i, s)$ が等しくなるような例は Hecke により考察されていた．

**例 1.1** (Hecke [H25])**.** $K_1=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$，$K_2=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ として，$M=\mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt[4]{12})$ とおくと $M$ は $K_1, K_2$ を含む $\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大体で Galois 群 $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ は位数 8 の二面体群 $D_4$ と同型になる．このとき，$M$ の部分体 $L_1=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{12})$, $L_2=\mathbb{Q}((1+\sqrt{-1})\sqrt[4]{3})$ を考え，$\xi_i$ を二次拡大 $L_i/K_i$ に対応する二次 Hecke 指標とすると，$L(\xi_1,s)=L(\xi_2,s)$ が成立する．$\xi_i$ に対応する Galois 群の表現を $\chi_i: G_{K_i}\to\mathbb{C}^\times$ と書くことにすると

$$\mathrm{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}}\chi_1\cong\mathrm{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}}\chi_2$$

が成り立つ．さらに，$K_3=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ とおいて，$\chi_3$ を $\mathrm{Gal}(M/K_3)\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の指標群の生成元（四次指標）とすると

$$\mathrm{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}}\chi_1\cong\mathrm{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}}\chi_2\cong\mathrm{Ind}_{G_{K_3}}^{G_{\mathbb{Q}}}\chi_3$$

が成り立つ．

新谷 [S78] がこのような Hecke の考察を用いて Stark 予想の研究を行っていることから，上の例のように 3 通りの誘導表現であらわされるような既約二次元表現は Hecke-新谷表現とも呼ばれており，Rohrlich [R15, R19] などをはじめ，様々な研究にあらわれる．Hecke 指標に対する数論的同値性については石井 [I86]，Li-Rudnick [LR21]，片山-木田 [KK22] などにより研究が行われており，例えば Li-Rudnick [LR21] は与えられた二次体 $K_1$ と ${}^c\chi_1\neq\chi_1$ という条件を満たすような有限位数 Hecke 指標 $\chi_1$ の組 $(K_1,\chi_1)$ に対し，$L(\chi_1,s)=L(\chi_2,s)$ となるような組 $(K_2,\chi_2)(\neq(K_1,\chi_1))$ が存在するための必要十分条件を与え，具体的な例の構成についても詳しく調べている．

## 1.3 楕円曲線に対する数論的同値性

$K_1$，$K_2$ を代数体とする．$K$ 上の楕円曲線 $E$ の $L$ 関数を $L_K(E,s)$ と書くことにする．$K_1$ 上の楕円曲線 $E_1$ と $K_2$ 上の楕円曲線 $E_2$ に対し，$L_{K_1}(E_1,s)=L_{K_2}(E_2,s)$ が成り立つとき，$E_1/K_1$ と $E_2/K_2$ は数論的同値であると定義する．

$K_1$ と $K_2$ を固定したとき，$K_1$ 上の楕円曲線 $E_1$ と $K_2$ 上の楕円曲線 $E_2$ で数論的同値になるものは存在するであろうか？

すぐに分かる事実として，Euler 因子の比較から $E_1/K_1$ と $E_2/K_2$ が数論的同値であるためには $[K_1:\mathbb{Q}]=[K_2:\mathbb{Q}]$ でなければならないことが分かる．まず初めに $K_1=K_2=\mathbb{Q}$ の場合に考えてみる．このときは Chebotarev の密度定理を用いた議論と Faltings によって証明された楕円曲線の場合の Tate 予想を使うことにより，二つの $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E_1$ と $E_2$ が数論的同値であることと $E_1$, $E_2$ が $\mathbb{Q}$ 上同種であることが同値な条件であることが分かる（以下，$K$ 上の楕円曲線 $E$, $E'$ が $K$ 上同種であるとき，$E\sim_K E'$ と書くことにする）．もう少し一般に $K_1\cong K_2$ の場合に数論的同値な楕円曲線 $E_1/K_1$ と $E_2/K_2$ は存在

するかという問題が考えられるが，$E$ を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線として $E$ を $K_1$ に基底変換した $E_{K_1} = E_1 \otimes_{\mathbb{Q}} K_1$ と $E$ を $K_2$ に基底変換した $E_{K_2} = E \otimes_{\mathbb{Q}} K_2$ を考えると，これらは数論的同値であることが分かる．もし，$K_1 \not\cong K_2$ の場合に数論的同値な楕円曲線が存在するとしたら，その楕円曲線はどのような性質を持つかという問いに答えるのが次の結果である．

**定理 1.2** (伊藤-千田-吉川)**.** $K_1$ と $K_2$ は $\mathbb{Q}$ 上線型無関連とし，$E_1/K_1$ と $E_2/K_2$ は虚数乗法を持たない楕円曲線と仮定する．このとき，$L_{K_1}(E_1,s) = L_{K_2}(E_2,s)$（つまり $E_1/K_1$ と $E_2/K_2$ が数論的同値）ならば $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E_0$ と二次指標 $\chi_i : G_{K_i} \to \{\pm1\}$ $(i=1,2)$ が存在して，$E_i \sim_{K_i} (E_{0,K_i})^{\chi_i}$ かつ $\mathrm{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_1 \cong \mathrm{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_2$ を満たす（ここで，$(E_{0,K_i})^{\chi_i}$ は $E_{0,K_i}$ の $\chi_i$ による二次捻りであり，代数体 $K$ に対し，$G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ とおいた）．逆に $E_1, E_2$ が上の条件を満たせば $E_1$ と $E_2$ は数論的同値である．

# 2　主定理の証明

ここでは主定理の証明の概略を述べる．$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E_0$ と二次指標 $\chi_i : G_{K_i} \to \{\pm1\}$ $(i=1,2)$ が存在して $E_i \sim_{K_i} (E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} K_i)^{\chi_i}$ かつ $\mathrm{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_1 \cong \mathrm{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_2$ を満たすなら $E_1$ と $E_2$ は数論的同値であることは容易に分かるので，この逆を示す．$E_1$ と $E_2$ は数論的同値であると仮定する．$\mathrm{Res}_{K_i/\mathbb{Q}}$ を $K_i$ から $\mathbb{Q}$ への Weil 制限とする．まず，$L_{K_i}(E_i,s) = L_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Res}_{K_i/\mathbb{Q}} E_i, s)$ であることから，Chebotarev の密度定理を用いた議論と Abel 多様体に対する Tate 予想より $\mathrm{Res}_{K_1/\mathbb{Q}} E_1 \sim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Res}_{K_2/\mathbb{Q}} E_2$ であることが分かる．このことから，さらに $\overline{\mathbb{Q}}$ 上に基底変換することで

$$\prod_{\sigma_1 : K_1 \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}} {}^{\sigma_1}E_{1,\overline{\mathbb{Q}}} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} \prod_{\sigma_2 : K_2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}} {}^{\sigma_2}E_{2,\overline{\mathbb{Q}}}$$

であることが分かる．このことと $K_1, K_2$ は $\mathbb{Q}$ 上線型無関連であることを用いると次のことが分かる．

**補題 2.1.** 任意の $\sigma_1, \sigma_1' : K_1 \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ と $\sigma_2, \sigma_2' : K_2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ に対し，

$${}^{\sigma_1}E_{1,\overline{\mathbb{Q}}} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} {}^{\sigma_1'}E_{1,\overline{\mathbb{Q}}} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} {}^{\sigma_2}E_{2,\overline{\mathbb{Q}}} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} {}^{\sigma_2'}E_{2,\overline{\mathbb{Q}}}$$

が成り立つ．つまり，${}^{\sigma_1}E_{1,\overline{\mathbb{Q}}}$ および ${}^{\sigma_2}E_{2,\overline{\mathbb{Q}}}$ は同じ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の同種類を定める．

このことから $E_{1,\overline{\mathbb{Q}}}$ と $E_{2,\overline{\mathbb{Q}}}$ は $\mathbb{Q}$ 曲線[*1]であることが分かる．$\mathbb{Q}$ 曲線については次のようなことが知られている．

[*1] 全ての $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対し，${}^{\sigma}E \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} E$ を満たすような $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の楕円曲線 $E$ のことを $\mathbb{Q}$ 曲線というのであった．

**定理 2.2** (Elkies [E04], Quer [Q00], Ribet [R92]). $E$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の $\mathbb{Q}$ 曲線とする．このとき，$E$ の定める $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の同種類の中で最小の定義体を持つものが存在する．つまり，ある代数体 $K_0$ と $K_0$ 上の楕円曲線 $E_0$ が存在して，

(1) $E \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{0,\overline{\mathbb{Q}}}$,
(2) もし，ある代数体 $K'$ 上の楕円曲線 $E'$ が $E_{\overline{\mathbb{Q}}} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} E'_{\overline{\mathbb{Q}}}$ を満たすなら $K_0 \subset K'$

という性質が成り立つ．

我々が考えている状況では $E_{1,\overline{\mathbb{Q}}}$ と $E_{2,\overline{\mathbb{Q}}}$ は同じ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の同種類を定める $\mathbb{Q}$ 曲線なので，その最小定義体を $K_0$ とすると $K_0$ は $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$ の部分体であるから，$K_0 = \mathbb{Q}$ であることが分かる．つまり，ある $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E_0$ が存在して，任意の $\sigma_1, \sigma_2$ に対し，${}^{\sigma_1}E_{1,\overline{\mathbb{Q}}} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{0,\overline{\mathbb{Q}}} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} {}^{\sigma_2}E_{2,\overline{\mathbb{Q}}}$ となる．特に，$E_{1,\overline{\mathbb{Q}}} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{0,\overline{\mathbb{Q}}} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{2,\overline{\mathbb{Q}}}$ である．次の補題はよく知られている結果である．

**補題 2.3.** $E, E'$ を虚数乗法を持たない代数体 $K$ 上の楕円曲線とし，$E_{\overline{K}} \sim_{\overline{K}} E'_{\overline{K}}$ とする．このとき，ある二次指標 $\chi : G_K \to \{\pm 1\}$ が存在して，$E \sim_K (E')^{\chi}$ となる．

この補題により，二次指標 $\chi_1 : G_{K_1} \to \{\pm 1\}$, $\chi_2 : G_{K_2} \to \{\pm 1\}$ が存在して $E_i \sim_{K_i} (E_{0,K_i})^{\chi_i}$ $(i = 1, 2)$ となることが分かる．あとはこの $\chi_1$ と $\chi_2$ が $\operatorname{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_1 \cong \operatorname{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_2$ を満たすことを示せばよい．素数 $\ell$ に対して，$\rho_{E_0,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ を $E_0$ に付随する Galois 表現とする．$L_{K_i}(E_i, s)$ を $\rho_{E_0,\ell}$ の $L$ 関数と捉えて書き直すと

$$L_{K_i}(E_i, s) = L_{K_i}((E_{0,K_i})^{\chi_i}, s) = L_{K_i}(\rho_{E_0,\ell}|_{G_{K_i}} \otimes \chi_i, s)$$

となる．$G_{\mathbb{Q}}$ への誘導をとっても $L$ 関数は変わらないので，

$$L_{K_i}(\rho_{E_0,\ell}|_{G_{K_i}} \otimes \chi_i, s) = L_{\mathbb{Q}}(\operatorname{Ind}_{G_{K_i}}^{G_{\mathbb{Q}}}(\rho_{E_0,\ell}|_{G_{K_i}} \otimes \chi_i), s)$$

であり，さらに Frobenius 相互律により，

$$L_{\mathbb{Q}}(\operatorname{Ind}_{G_{K_i}}^{G_{\mathbb{Q}}}(\rho_{E_0,\ell}|_{G_{K_i}} \otimes \chi_i), s) = L_{\mathbb{Q}}(\rho_{E_0,\ell} \otimes \operatorname{Ind}_{G_{K_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_i, s)$$

となることが分かる．ゆえに Chebotarev の密度定理を用いた議論により，$G_{\mathbb{Q}}$ の表現として $\rho_{E_0,\ell} \otimes \operatorname{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_1 \cong \rho_{E_0,\ell} \otimes \operatorname{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_2$ となることが分かる．特に $\ell$ と異なるほとんど全ての素数 $p$ に対して

$$\operatorname{Tr}\rho_{E_0,\ell}(\mathrm{Frob}_p)\operatorname{Tr}\operatorname{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}}\chi_1(\mathrm{Frob}_p) = \operatorname{Tr}\rho_{E_0,\ell}(\mathrm{Frob}_p)\operatorname{Tr}\operatorname{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}}\chi_2(\mathrm{Frob}_p)$$

となる（$\mathrm{Frob}_p$ は $p$ での Frobenius 元をあらわす）．$E_0$ は虚数乗法を持たないので，Serre の結果により $\rho_{E_0,\ell}$ の像は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ の開部分群となる．このことから密度が 1 の素数 $p$ の集合に対して $\operatorname{Tr}\rho_{E_0,\ell}(\mathrm{Frob}_p) \neq 0$ となることが分かる．これを用いると $\operatorname{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_1 \cong \operatorname{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_2$ であることが従う．これで定理の主張が得られた．

## 3　数論的同値な楕円曲線の存在性

§1 で紹介した Hecke による Hecke 指標の $L$ 関数の一致に関する例と主定理を用いると数論的同値となる楕円曲線の例を作ることができる．$K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$，$K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ として $M = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{12})$ とおくと $M$ は $K_1$, $K_2$ を含む $\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大であり，$\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ は位数 8 の二面体群 $D_4$ と同型になるのであった．また，$M$ の（$\mathbb{Q}$ 上非 Galois な）部分体 $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{12})$, $L_2 = \mathbb{Q}((1+\sqrt{-1})\sqrt[4]{3})$ を考え，$\chi_i$ を二次拡大 $L_i/K_i$ に対応する二次指標とすると $L(\chi_1, s) = L(\chi_2, s)$ が成り立つことから，$\mathrm{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_1 \cong \mathrm{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_2$ となることが分かる．$E$ を任意の $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とすると，主定理より $(E_{K_i})^{\chi_i}$ $(i = 1, 2)$ は数論的同値な楕円曲線となる．

もう少し一般に $K_1$ と $K_2$ が異なる二次体の場合に数論的同値な楕円曲線が存在するかどうかという問題を考えてみる．$K_1$ と $K_2$ を両方含むような $\mathbb{Q}$ 上の $D_4$ 拡大体 $M$ が存在し，$M$ に含まれるような $K_i$ の二次拡大体 $L_i$ で $\mathbb{Q}$ 上非 Galois になっているようなものがとれると仮定する．$\chi_i : G_{K_i} \to \{\pm 1\}$ を $L_i/K_i$ に対応する二次指標とし，$\rho_i = \mathrm{Ind}_{G_{K_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_i$ とおくと $\rho_1 \cong \rho_2$ となることがわかる（$D_4$ の二次元既約表現が唯一つ存在するという事実から従う）．よって，この場合は主定理により数論的同値な楕円曲線 $E_1/K_1$, $E_2/K_2$ を作ることができる．逆に二次指標 $\chi_i : G_{K_i} \to \{\pm 1\}$ $(i = 1, 2)$ が存在して，$\rho_1 \cong \rho_2$ が成立すると仮定すると $\rho_i$ は既約表現で $M = \overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Ker}\,\rho_i}$ は $\mathbb{Q}$ 上の $D_4$ 拡大体になることがわかる．$K_1$, $K_2$ を両方含むような $\mathbb{Q}$ 上の $D_4$ 拡大体 $M$ で上の条件を満たすようなものが存在するかどうかについては次のような判定条件が知られている．

**命題 3.1.** $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$ と $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{b})$ は異なる二次体とする．このとき，次は同値な条件になる．

(1) $K_1$, $K_2$ をともに含むような $\mathbb{Q}$ 上の $D_4$ 拡大体 $M$ が存在し，$M$ に含まれるような $K_i$ の二次拡大体 $L_i$ で $\mathbb{Q}$ 上非 Galois になるものがとれる．
(2) $ab$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q}$ のノルムの像に入る．

**注意 3.2.** 上の命題の (2) の条件は方程式 $aX^2 + bY^2 = Z^2$ に非自明な有理数解が存在するという条件と同値である．

次に $K_i/\mathbb{Q}$ が奇数次の Galois 拡大の場合に考える．

**命題 3.3.** $d > 1$ を奇数とし，$K_i$ $(i = 1, 2)$ は $\mathbb{Q}$ 上の $d$ 次 Galois 拡大で $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$ を満たすとする．このとき, $\mathrm{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_1 \cong \mathrm{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_2$ を満たすような二次指標 $\chi_i : G_{K_i} \to \{\pm 1\}$ は存在しない．

この命題と主定理により次のことが分かる．

**系 3.4.** $d > 1$ を奇数とし，$K_i$ $(i = 1, 2)$ は $\mathbb{Q}$ 上の $d$ 次 Galois 拡大で $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$ を満たすとする．このとき任意の $K_i$ 上の虚数乗法を持たない楕円曲線 $E_i$ $(i = 1, 2)$ に対して $L_{K_1}(E_1, s) \neq L_{K_2}(E_2, s)$ が成り立つ．つまり，数論的同値な虚数乗法を持たない楕円曲線 $E_1/K_1$ と $E_2/K_2$ は存在しない．

$[K_i : \mathbb{Q}]$ が奇素数の場合（$K_i/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大とは仮定しない）には次のことが分かる．

**命題 3.5.** $K_i$ $(i = 1, 2)$ は $\mathbb{Q}$ 上の奇素数次拡大で，$K_1$ と $K_2$ は $\mathbb{Q}$ 上線型無関連とする．このとき，$\mathrm{Ind}_{G_{K_1}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_1 \cong \mathrm{Ind}_{G_{K_2}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_2$ を満たすような二次指標 $\chi_i : G_{K_i} \to \{\pm 1\}$ は存在しない．

**系 3.6.** $K_i$ $(i = 1, 2)$ は $\mathbb{Q}$ 上の奇素数次拡大で，$K_1$ と $K_2$ は $\mathbb{Q}$ 上線型無関連とする．このとき任意の $K_i$ 上の虚数乗法を持たない楕円曲線 $E_i$ $(i = 1, 2)$ に対して $L_{K_1}(E_1, s) \neq L_{K_2}(E_2, s)$ が成り立つ．つまり，数論的同値な虚数乗法を持たない楕円曲線 $E_1/K_1$ と $E_2/K_2$ は存在しない．

## 4 BSD 予想への応用

Darmon-Rotger-Zhao [DRZ12] は Hecke の例のような実二次体の指標から誘導される二次元表現と虚二次体の指標から誘導される二次元表現が一致するという現象を利用して実二次体上の $\mathbb{Q}$ 曲線に対する BSD 予想の研究を行った．この研究のように楕円曲線の数論的同値性は BSD 予想や Bloch-加藤予想の研究にも役立つことが期待される．例えば，すぐに分かる事実として次のようなものがある．

**定理 4.1.** $K_1$ を代数体とし，$E_1/K_1$ を虚数乗法を持たない楕円曲線とする．総実代数体 $K_2$ と虚数乗法を持たない楕円曲線 $E_2/K_2$ が存在して，$K_1$ と $K_2$ は $\mathbb{Q}$ 上線型無関連であり，$E_1$ と $E_2$ が数論的同値になると仮定する．このとき，次が成立する．

(1) $L_{K_1}(E_1, s) = L_{K_2}(E_2, s)$ は $\mathbb{C}$ 上に正則に解析接続される．
(2) $L_{K_1}(E_1, 1) \neq 0$ ならば $\operatorname{rank} E_1(K_1) = 0$ が成り立つ．
(3) $E_2/K_2$ の導手を $\mathfrak{n}$ とする．$[K_2 : \mathbb{Q}]$ が奇数，またはある有限素点 $v$ に対し $\mathrm{ord}_v(\mathfrak{n})$ が奇数になると仮定する．このとき，$\mathrm{ord}_{s=1} L_{K_1}(E_1, s) = 1$ ならば $\operatorname{rank} E_1(K_1) = 1$ が成り立つ．

証明の方針は以下の通りである．定理 1.2 より，$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E_0$ と二次指標 $\chi_i : G_{K_i} \to \{\pm 1\}$ $(i = 1, 2)$ が存在して，$E_i \sim_{K_i} (E_{0,K_i})^{\chi_i}$ となる．よって $L_{K_2}(E_2, s) =$

$L_{K_2}((E_{0,K_2})^{\chi_2}, s)$ となる．$E_0$ は $\mathbb{Q}$ 上保型的であるから重さ 2 の楕円保型形式 $f$ が存在して，$L(E_0, s) = L(f, s)$ となる．このとき，Dieulefait [D15] の結果により $f$ の $K_2$ への基底変換が存在するので，$K_2$ 上の Hilbert 保型形式 $f'$ が存在し，$L_{K_2}(E_{0,K_2}, s) = L(f', s)$ となる．よって，$L_{K_2}(E_2, s) = L_{K_2}((E_{0,K_2})^{\chi_2}, s) = L(f' \otimes \chi_2, s)$ が得られる．$f' \otimes \chi_2$ は $K_2$ 上の Hilbert 保型形式を定めるので，$E_2/K_2$ は保型的であることが分かる．以上から $L_{K_1}(E_1, s) = L_{K_2}(E_2, s)$ は $\mathbb{C}$ 上に正則に解析接続されることが分かる．これで (1) が示された．

次に (2) を示す．いま，$L_{K_2}(E_2, 1) = L_{K_1}(E_1, 1) \neq 0$ であるので，総実体上の保型的な楕円曲線に対する Zhang [Z01] および Longo [L06] の結果より，$E_2(K_2)$ は有限である．さらに，Weil 制限の性質より，$(\mathrm{Res}_{K_i/\mathbb{Q}} E_i)(\mathbb{Q}) = E_i(K_i)$ であり，§2 の議論から，$\mathrm{Res}_{K_1/\mathbb{Q}} E_1 \sim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Res}_{K_2/\mathbb{Q}} E_2$ となるので，

$$\operatorname{rank} E_1(K_1) = \operatorname{rank}(\mathrm{Res}_{K_1/\mathbb{Q}}\, E_1)(\mathbb{Q}) = \operatorname{rank}(\mathrm{Res}_{K_2/\mathbb{Q}}\, E_2)(\mathbb{Q}) = \operatorname{rank} E_2(K_2)$$

が成り立つ．以上より，$\operatorname{rank} E_1(K_1) = 0$ が導かれる．(3) も Zhang [Z01] の結果により同様に示される．

## 5　今後の課題

定理 1.2 では $K_1$ と $K_2$ が $\mathbb{Q}$ 上線型無関連という仮定をしており，もう少し一般的な状況でどのようなことが成り立つかということを調べるのは興味深い問題である．また，本稿では楕円曲線の場合に数論的同値性について考察したが，より一般に保型形式や保型表現，高次元の Abel 多様体の場合に対しても数論的同値の概念を導入し調べていくことは今後の課題と言える．これらの場合においても定理 1.2 の類似の定理が成り立つことが期待されるが，今回の証明は $\mathbb{Q}$ 曲線の理論に大きく依存しており，そのまま一般化することは難しいように思える．

**謝辞**：代数的整数論とその周辺 2024 での講演の機会を与えていただいた研究代表者の三枝洋一氏，プログラム委員の中村健太郎氏，杉山真吾氏にこの場を借りて感謝を申し上げます．

## 参考文献

[DRZ12] H. Darmon, V. Rotger and Y. Zhao, *The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for $\mathbb{Q}$-curves and Oda's period relations*, Geometry and analysis of automorphic forms of several variables, Proceedings of the International Symposium in Honor of Takayuki Oda on the Occasion of His 60th Birthday, Series on Number Theory and Its Applications, 7, pp. 1–40, World Scientific, 2012.

[dSP94] B. de Smit and R. Perlis, *Zeta functions do not determine class numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **31** (1994), no. 2, 213–215.

[D15] L. Dieulefait, *Automorphy of* $\mathrm{Symm}^5(\mathrm{GL}(2))$ *and base change*, J. Math. Pures Appl. (9) **104** (2015), no. 4, 619–656.

[E04] N. D. Elkies, *On elliptic $K$-curves*, Modular curves and abelian varieties, Progr. Math., 224, 81–91, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[G26] F. Gassmann, *Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit von Hurwitz*, Math. Z. **25** (1926), 124–143.

[H25] E. Hecke, *Über einen Zusammenhang zwischen elliptischen Modulfunktionen und indefiniten quadratischen Formen*, Nachrichten der Gesell. der Wissen. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1925, 35–44.

[I86] H. Ishii, *On the coincidence of $L$-functions*, Japan. J. Math. (N.S.) **12** (1986), no. 1, 37–44.

[KK22] Y. Katayama and M. Kida, *Coincidence of $L$-functions*, Acta Arith. **204** (2022), no. 4, 369–385.

[LR21] W.-C. W. Li and Z. Rudnick, *Pair arithmetical equivalence for quadratic fields*, Math. Z. **299** (2021), no. 1-2, 797–826.

[L06] M. Longo, *On the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for modular elliptic curves over totally real fields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 3, 689–733.

[P77] R. Perlis, *On the equation $\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s)$*, J. Number Theory **9** (1977), no. 3, 342–360.

[Q00] J. Quer, *$\mathbb{Q}$-curves and abelian varieties of* $\mathrm{GL}_2$*-type*, Proc. London Math. Soc. (3) **81** (2000), no. 2, 285–317.

[R15] D. Rohrlich, *Artin representations of $\mathbb{Q}$ of dihedral type*, Math. Res. Lett. **22** (2015), no. 6, 1767–1789.

[R19] D. Rohrlich, *Almost abelian Artin representations of* $\mathbb{Q}$, Michigan Math. J. **68** (2019), no. 1, 127–145.

[R92] K. A. Ribet, *Abelian varieties over $\mathbb{Q}$ and modular forms*, Algebra and topology 1992 (Taejŏn), 53–79, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Mathematics Research Center, Taejŏn, 1992.

[S78] T. Shintani, *On certain ray class invariants of real quadratic fields*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), no. 1, 139–167.

[Z01] S.-W. Zhang, *Heights of Heegner points on Shimura curves*, Ann. of Math. (2) **153** (2001), no. 1, 27–147.