t-motives and multiple zeta values in positive characteristic

東北大学・大学院理学研究科　三柴 善範 *
Yoshinori Mishiba
Mathematical Institute,
Tohoku University

概要

本稿は，代数的整数論とその周辺 2024 における筆者の講演内容をまとめたものである．t-motives と正標数における多重ゼータ値について，線型/代数的独立性に関連する話題を紹介する．

1　正標数多重ゼータ値

講演と同様に，まずは多重ゼータ値について解説し，次に関連する t-motives の話題を紹介する．

1.1　標数 0

$\mathcal{I} := \bigcup_{r\geq 0}\mathbb{Z}_{\geq 1}^{r}$ を正整数の有限列のなす集合とする．$\mathcal{I}$ の元 $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r)$ をインデックスといい，$\mathrm{wt}(\mathfrak{s}) := \sum_{i=1}^{r} s_i$ を $\mathfrak{s}$ の重さ，$\mathrm{dep}(\mathfrak{s}) := r$ を $\mathfrak{s}$ の深さという．$r = 0$ (このとき $\mathfrak{s} = \emptyset$ と表す) または $s_1 > 1$ のとき，$\mathfrak{s}$ は許容的という．$\mathcal{I}^{\mathrm{adm}}$ で許容的なインデックス全体のなす集合を表す．$\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}^{\mathrm{adm}}$ に対し，多重ゼータ値は

$$\zeta(\mathfrak{s}) := \sum_{n_1>\cdots>n_r} \frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}} \in \mathbb{R}$$

により定義される ($\zeta(\emptyset) = 1$ と解釈する)．Euler による研究に端を発する多重ゼータ値は，近年活発に研究されている．本稿の目的は，この関数体類似，および関連する

* Mathematical Institute, Tohoku University, 6-3, Aramaki Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai 980-8578, Japan
E-mail: mishiba@tohoku.ac.jp

t-motives の解説である．同様の話題は，別の報告集 [19] でも解説しているので，そちらも参照されたい．

正標数について述べる前に，上述の実数に値をとる多重ゼータ値について，独立性の観点から知られている性質をいくつか挙げる．まず，定義から明らかなように，任意の $\mathfrak{s} \in \mathcal{I}^{\mathrm{adm}}$ に対して

$$\zeta(\mathfrak{s}) \neq 0$$

が成り立つ．後で述べるように，自明ではないが正標数においても同様の主張が成り立つ．また，π の超越性が Lindemann により示されているので，任意の $\mathfrak{s} \in \mathcal{I}^{\mathrm{adm}}$ に対して

$$\zeta(\mathfrak{s}) \in \mathbb{Q}^{\times} \cdot (2\pi\sqrt{-1})^{\mathrm{wt}(\mathfrak{s})} \text{ ならば } \zeta(\mathfrak{s}) \notin \overline{\mathbb{Q}}$$

が成り立つ．ここで，$\overline{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{C}$ における $\mathbb{Q}$ の代数閉包を表す．例えば，Euler によって s が正の偶数ならば $\zeta(s) \in \mathbb{Q}^{\times} \cdot (2\pi\sqrt{-1})^{s}$ であることが示されているので，このとき $\zeta(s)$ は超越数である．一方で，

$$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$$

であることが Apéry により証明されている．「この (これらの) 多重ゼータ値は無理数/超越数 (線型/代数的独立) である」という主張については，以上の結果くらいしか知られておらず，とても難しい問題であると考えられている．

1.2 正標数

以下では素数 p を固定し，$q := p^{\ell}$ $(\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ とおく．$A := \mathbb{F}_q[\theta]$ を位数 q の有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の 1 変数多項式環とし，ℓ を動かして考えるときは A を A_{ℓ} とも表す．$k := \mathbb{F}_q(\theta)$ を A の商体，$k_{\infty} := \mathbb{F}_q(\!(1/\theta)\!)$ を k の ∞ 進付値 $|-|_{\infty} := q^{\deg(-)}$ に関する完備化，$\mathbb{C}_{\infty} := \widehat{\overline{k_{\infty}}}$ を k_{∞} の代数閉包の ∞ 進完備化，$\overline{k}$ を $\mathbb{C}_{\infty}$ における k の代数閉包とする．∞ 進付値 $|-|_{\infty}$ を $\mathbb{C}_{\infty}$ 上に延長し，それを再び $|-|_{\infty}$ で表す．

Thakur は [23] において，多重ゼータ値の関数体類似である正標数多重ゼータ値 (または ∞ 進多重ゼータ値) を定義した．それは，$\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}$ に対して

$$\zeta_A(\mathfrak{s}) := \sum_{\substack{a_i \in A:\ \text{モニック} \\ \deg a_1 > \cdots > \deg a_r}} \frac{1}{a_1^{s_1} \cdots a_r^{s_r}} \in k_{\infty}$$

によって与えられる ($\zeta_A(\emptyset) = 1$ と解釈する)．上記の級数は，$\mathfrak{s}$ が許容的ではなくても収束することに注意する．正標数多重ゼータ値について知られている性質をいくつか紹介す

る．まず，任意の $\mathfrak{s} \in \mathcal{I}$ に対して

$$\zeta_A(\mathfrak{s}) \neq 0$$

であることが，Thakur によって [24] で示されている．k_∞ のモニックな元 ($1/\theta$ に関するローラン級数で最高次の係数が 1) 全体は和について閉じていないので，この事実は自明ではないことに注意する．証明は，正標数多重ゼータ値を与える級数の各項の次数を詳細に解析することでなされる．一方，定義から明らかに，任意の $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}$ と $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\zeta_A(p^e s_1, \ldots, p^e s_r) = \zeta_A(\mathfrak{s})^{p^e}$$

が成り立つ．深さ 1 の正標数 (多重) ゼータ値は Thakur より前から Carlitz によって調べられており，Carlitz ゼータ値と呼ばれる．Carlitz は，$s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が $q - 1 = \#A^\times$ で割れる (偶数に相当) ならば

$$\zeta_A(s) \in k^\times \cdot \widetilde{\pi}_\ell^s$$

であることを示している ([6])．ここで，$\widetilde{\pi}_\ell \in \sqrt[q-1]{-\theta} \cdot k_\infty^\times$ は Carlitz 周期と呼ばれる量であり，$2\pi\sqrt{-1}$ の類似物である．Carlitz による上記の結果は，Riemann ゼータ関数の正の偶数点における Euler の結果の関数体類似とみなせる．Carlitz ゼータ値に対しては，Yu による仕事 ([29], [30]) を経て，最終的には Chang-Yu により [12] において全ての代数的な関係式が決定された．それによると，上記の p 冪倍で成り立つ関係式と Carlitz による関係式の他には，Carlitz ゼータ値の間には k 上の代数的な関係式は存在しない．この結果は次のように拡張される:

定理 1.1 ([18])**.** $s_1, \ldots, s_d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が，「任意の i に対して $q - 1 \nmid s_i$」かつ「任意の $i \neq j$ に対して s_i/s_j が p の整数冪でない」という条件を満たしているとする．このとき，

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{k}}\, \overline{k}(\widetilde{\pi}_\ell,\ \zeta_A(s_{i_1}, \ldots, s_{i_r}) \,|\, r \geq 1,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq d) = 2^d$$

が成り立つ．

p を固定して $q = p^\ell$ の ℓ を動かしたとき，正標数多重ゼータ値は全て 1 つの $\mathbb{C}_\infty$ に含まれるので，それらを比較することができる．これについて，Denis と Chang-Papanikolas-Yu による深さ 1 の仕事 [14], [10] を経て，Matsuzuki は以下の定理を示した:

定理 1.2 ([17])**.** $J_1, \ldots, J_n \subset \mathcal{I}$ を有限部分集合とする．このとき，

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{k}}\, \overline{k}(\zeta_{A_\ell}(\mathfrak{s}) \,|\, 1 \leq \ell \leq n,\ \mathfrak{s} \in J_\ell) = \sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{tr.deg}_{\overline{k}}\, \overline{k}(\zeta_{A_\ell}(\mathfrak{s}) \,|\, \mathfrak{s} \in J_\ell)$$

が成り立つ.

次に，正標数多重ゼータ値が生成する線型空間についての結果を紹介する．$w \geq 0$ に対して $\mathcal{I}_w := \{\mathfrak{s} \in \mathcal{I} \mid \mathrm{wt}(\mathfrak{s}) = w\}$ とおき，

$$\mathcal{Z}_w := \langle \zeta_A(\mathfrak{s}) \mid \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w \rangle_k \subset k_\infty, \quad \overline{\mathcal{Z}}_w := \langle \zeta_A(\mathfrak{s}) \mid \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w \rangle_{\overline{k}} \subset \mathbb{C}_\infty$$

と定める．このとき，Chang は以下の定理を示した:

定理 1.3 ([8])**.** 自然な全射

$$\overline{k} \otimes_k \left(\bigoplus_{w \geq 0} \mathcal{Z}_w \right) \twoheadrightarrow \sum_{w \geq 0} \overline{\mathcal{Z}}_w$$

は同型写像である.

標数 0 における同様の結果も成り立つことが予想されているが，現時点では未解決である．各 $\mathcal{Z}_w$ については，Todd がその次元を予想した ([27])．さらに Thakur は，$\zeta_A(\mathfrak{s})$ ($\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}$) が $\mathcal{Z}_w$ の k 上の基底をなすことを予想した ([26])．ここで，

$$\mathcal{I}_w^{\mathrm{T}} := \{(s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}_w \mid s_1, \ldots, s_{r-1} \leq q,\ s_r < q\}$$

とおいた ($\mathcal{I}_0^{\mathrm{T}} = \mathcal{I}_0 = \{\emptyset\}$)．これらは，Zagier の次元予想 ([31]) と Hoffman の基底予想 ([15]) の関数体類似である．これらの予想については，まず Ngo Dac が [20] において $\zeta_A(\mathfrak{s})$ ($\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}$) が $\mathcal{Z}_w$ を k 上生成すること (および次元の上からの評価) を示した (Terasoma ([22]), Deligne-Goncharov ([13]), Brown ([5]) の結果の類似)．その後，Chang-Chen-Mishiba と Im-Kim-Le-Ngo Dac-Pham により Thakur の基底予想 (および Todd の次元予想) が正しいことが示された:

定理 1.4 ([9], [16])**.** 任意の $w \geq 0$ に対し，$\zeta_A(\mathfrak{s})$ ($\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}$) は $\mathcal{Z}_w$ の k 上の基底をなす.

2 t-motives

前節で紹介した各定理の証明で重要となる t-motives について解説する．代数体上の乗法群 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ や楕円曲線，Abel 多様体の関数体上の類似物として，Drinfeld 加群や t 加群がある．Anderson により [1] で導入された t-motives は，これら幾何学的対象を捉える線型代数的な対象であり，通常のモチーフのような役割を期待されている．なお，t-motives と呼ばれる対象は文献により異なることがあるので注意する．本稿では，Papanikolas の論文 [21] に沿った用語の使い方をする．また，Matsuzuki の論文 [17] の表記も参考にしている.

2.1 定義

以下では，素数 p は固定するが，$q=p^\ell$ における $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ は動く．t を θ とは独立な変数とする．$\mathbb{C}_\infty(\!(t)\!)$ の部分環 $\mathbb{E}\subset\mathbb{T}\subset\mathbb{L}$ を

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\coloneqq\{f=\sum_{i\geq 0}a_it^i\in\mathbb{C}_\infty[\![t]\!]\mid f \text{ は } \mathbb{C}_\infty \text{上の整関数，} [k_\infty(a_0,a_1,\ldots):k_\infty]<\infty\},\\
&\mathbb{T}\coloneqq\{f\in\mathbb{C}_\infty[\![t]\!]\mid f \text{ は } |t|_\infty\leq 1 \text{ で収束する }\},\\
&\mathbb{L}\coloneqq\operatorname{Frac}\mathbb{T}
\end{aligned}
$$

で定義する．任意の $f=\sum_i a_it^i\in\mathbb{C}_\infty(\!(t)\!)$ と $n\in\mathbb{Z}$ に対し，f の n 回捻りを

$$
f^{(n)}\coloneqq\sum_i a_i^{p^n}t^i\in\mathbb{C}_\infty(\!(t)\!)
$$

で定める．成分ごとへの作用により，$(-)^{(n)}$ を $\mathbb{C}_\infty(\!(t)\!)$ を成分とする行列に拡張する．$\overline{k}[t]$, $\overline{k}(t)$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{L}$ などは $(-)^{(n)}$ の作用で閉じていることに注意する．また，σ^ℓ を変数とする $\overline{k}(t)$ 上の非可換ローラン多項式環で $\sigma^\ell f=f^{(-\ell)}\sigma^\ell$ $(f\in\overline{k}(t))$ により積を入れたものを $\overline{k}(t)[\sigma^\ell,\sigma^{-\ell}]$ で表す.

定義 2.1. (1) 左 $\overline{k}(t)[\sigma^\ell,\sigma^{-\ell}]$ 加群 M であって $\overline{k}(t)$ 上有限次元なものを，レベル ℓ の pre-t-motive という．レベル ℓ の pre-t-motives の間の射は，$\overline{k}(t)[\sigma^\ell,\sigma^{-\ell}]$ 準同型写像とする．

(2) M をレベル ℓ の pre-t-motive，$\boldsymbol{m}\in\operatorname{Mat}_{r\times 1}(M)$ を M の $\overline{k}(t)$ 上の基底とすると，ある $\Phi\in\operatorname{GL}_r(\overline{k}(t))$ が存在して $\sigma^\ell\boldsymbol{m}=\Phi\boldsymbol{m}$ となる．このとき，行列 $\Psi\in\operatorname{GL}_r(\mathbb{L})$ であって

$$
\Psi^{(-\ell)}=\Phi\Psi
$$

を満たすものが存在するとき，M はリジッド解析的に自明であるという．M がリジッド解析的に自明であるかどうかは，基底 $\boldsymbol{m}$ のとり方によらない．Ψ^{-1} の各成分が $t=\theta$ で収束するとき，それらが $\overline{k}$ 上生成する空間の元を M の周期という.

(3) リジッド解析的に自明なレベル ℓ の pre-t-motives 全体のなす圏を $\mathcal{R}_\ell$ で表す．$\mathcal{R}_\ell$ は, Betti 実現 $M\mapsto(\mathbb{L}\otimes_{\overline{k}(t)}M)^{\sigma^\ell=1}$ ($f\in\mathbb{L}$ と $m\in M$ に対し $\sigma^\ell(f\otimes m)\coloneqq f^{(-\ell)}\otimes\sigma^\ell m$) をファイバー関手とする $\mathbb{F}_q(t)$ 上のニュートラル淡中圏となる．G_M で，M が生成する $\mathcal{R}_\ell$ の部分淡中圏の Betti 実現に関する基本群を表す.

注意 2.2. (1) M がリジッド解析的に自明であることと，自然な $\mathbb{L}$ 線型写像

$$
\mathbb{L}\otimes_{\mathbb{F}_q(t)}(\mathbb{L}\otimes_{\overline{k}(t)}M)^{\sigma^\ell=1}\to\mathbb{L}\otimes_{\overline{k}(t)}M
$$

が同型写像であることは同値である.

(2) $\overline{k}[t]$ 上 (resp. $\overline{k}$ 上) σ^{ℓ} で生成される $\overline{k}(t)[\sigma^{\ell},\sigma^{-\ell}]$ の部分環を $\overline{k}[t;\sigma^{\ell}]$ (resp. $\overline{k}[\sigma^{\ell}]$) で表す. 左 $\overline{k}[t;\sigma^{\ell}]$ 加群 M であって,

- M は $\overline{k}[t]$ 上自由かつ有限生成,
- M は $\overline{k}[\sigma^{\ell}]$ 上自由かつ有限生成,
- 十分大きな $n>0$ に対して $(t-\theta)^n\mathrm{M}\subset\sigma^{\ell}\mathrm{M}$

を満たすものを, レベル ℓ の Anderson t-motive という. Anderson t-motive に対しても, リジッド解析的に自明であることを定義できる. また, Anderson t-motive M に対し, $\overline{k}(t)\otimes_{\overline{k}[t]}\mathrm{M}$ は pre-t-motive となる. $\overline{k}(t)\otimes_{\overline{k}[t]}\mathrm{M}$ (M はリジッド解析的に自明なレベル ℓ の Anderson t-motive) と表される pre-t-motives 全体が生成する $\mathcal{R}_{\ell}$ の部分淡中圏の対象を, レベル ℓ の t-motive という.

(3) ここまでに述べた対象は, 文献によっては dual t-motive と呼ばれる. その場合, dual でない t-motive は, σ^{ℓ} の代わりに $\sigma^{-\ell}$ を用いて定義される対象となる. なお, 淡中圏における双対とは異なるので注意する.

例 2.3. $\overline{k}(t)$ ベクトル空間として $C_{\ell}:=\overline{k}(t)$ とおき, σ^{ℓ} の作用を

$$\sigma^{\ell}m:=(t-\theta)m^{(-\ell)}\quad(m\in C_{\ell})$$

により与えると, C_{ℓ} はレベル ℓ の pre-t-motive となる. C_{ℓ} を Carlitz motive という. $-\theta$ の $p^{\ell}-1$ 乗根を固定し,

$$\Omega_{\ell}=\Omega_{\ell}(t):=(-\theta)^{-\frac{p^{\ell}}{p^{\ell}-1}}\prod_{i\geq 1}\left(1-\frac{t}{\theta^{p^{i\ell}}}\right)\in\mathbb{C}_{\infty}[\![t]\!]$$

と定めると,

$$\Omega_{\ell}^{(-\ell)}=(t-\theta)\Omega_{\ell},\quad \Omega_{\ell}\in\mathbb{E}\cap\mathbb{T}^{\times},\quad \Omega_{\ell}(\theta)=\widetilde{\pi}_{\ell}^{-1}$$

が成り立つ (最後の等号が成り立つように $(-\theta)^{\frac{1}{p^{\ell}-1}}$ をとれる). よって, $\Phi=t-\theta$ かつ $\Psi=\Omega_{\ell}$ とすれば, C_{ℓ} はリジッド解析的に自明であることが分かる.

例 2.4. Anderson-Thakur は [4] において, 正標数多重ゼータ値を周期として捉えた. ここではそれを紹介する. 各 $s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し, $H_{\ell,s-1}\in A_{\ell}[t]$ を Anderson-Thakur によって ($q=p^{\ell}$ に対して) [3] で与えられた多項式とする. $\mathfrak{s}=(s_1,\dots,s_r)\in\mathcal{I}$ に対して

$$\mathcal{L}_{\ell}(\mathfrak{s}):=\sum_{d_1>\cdots>d_r\geq 0}(H_{\ell,s_1-1}\Omega_{\ell}^{s_1})^{(d_1\ell)}\cdots(H_{\ell,s_r-1}\Omega_{\ell}^{s_r})^{(d_r\ell)}$$

は収束し，

$$\mathcal{L}_\ell(\mathfrak{s}) \in \mathbb{E}, \quad \mathcal{L}_\ell(\mathfrak{s})|_{t=\theta} = \frac{\Gamma_{\ell,s_1}\cdots\Gamma_{\ell,s_r}\zeta_{A_\ell}(\mathfrak{s})}{\widetilde{\pi}_\ell^{\mathrm{wt}(\mathfrak{s})}}$$

が成り立つ．ここで，$\Gamma_{\ell,s_i} \in A_\ell$ は Carlitz factorial と呼ばれる対象である．$\Phi_\ell(\mathfrak{s}) = (\Phi_\ell(\mathfrak{s})_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_{r+1}(\overline{k}(t))$ と $\Psi_\ell(\mathfrak{s}) = (\Psi_\ell(\mathfrak{s})_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{L})$ を

$$\Phi_\ell(\mathfrak{s})_{ij} \coloneqq \begin{cases} (t-\theta)^{s_j+s_{j+1}+\cdots+s_r} & (i=j) \\ H_{\ell,s_j-1}^{(-\ell)}(t-\theta)^{s_j+s_{j+1}+\cdots+s_r} & (i=j+1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

および

$$\Psi_\ell(\mathfrak{s})_{ij} \coloneqq \begin{cases} \Omega_\ell^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r} & (i=j) \\ \Omega_\ell^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r}\mathcal{L}_\ell(s_j,s_{j+1},\ldots s_{i-1}) & (i>j) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義する．$\overline{k}(t)$ ベクトル空間として $M_\ell(\mathfrak{s}) \coloneqq \overline{k}(t)^{r+1}$ とおき，σ^ℓ の作用を $\Phi_\ell(\mathfrak{s})$ で与えると，$M_\ell(\mathfrak{s})$ はレベル ℓ の pre-t-motive となる．また，

$$\Psi_\ell(\mathfrak{s})^{(-\ell)} = \Phi_\ell(\mathfrak{s})\Psi_\ell(\mathfrak{s}), \quad \Psi_\ell(\mathfrak{s}) \in \mathrm{Mat}_{r+1}(\mathbb{E}) \cap \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{T})$$

が成り立つ．よって，$M_\ell(\mathfrak{s})$ はリジッド解析的に自明である．

例 2.5. 異なるレベルの pre-t-motives の周期を同時に扱うために，[10] で考察されているレベルを動かす手法を紹介する．$M \coloneqq \overline{k}(t)^r$ を σ^ℓ の作用が $\Phi \in \mathrm{GL}_r(\overline{k}(t))$ で与えられているレベル ℓ の pre-t-motive とする．$s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して

$$\Phi_s \coloneqq \Phi^{(-(s-1)\ell)}\cdots\Phi^{(-\ell)}\Phi \in \mathrm{GL}_r(\overline{k}(t))$$

とおき，$M^{(s)} \coloneqq \overline{k}(t)^r$ に $\sigma^{s\ell}$ の作用を Φ_s で定めると，$M^{(s)}$ はレベル $s\ell$ の pre-t-motive となる．さらに，M がリジッド解析的に自明であり，$\Psi \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$ が $\Psi^{(-\ell)} = \Phi\Psi$ を満たしているとき，

$$\Psi^{(-s\ell)} = \Phi_s\Psi$$

が成り立つ．よって $M^{(s)}$ もリジッド解析的に自明であり，しかも Ψ として M と同じものをとることができる．

2.2　独立性を導く定理

t-motive の周期として現れる値の間には，$\overline{k}$ 上の線型関係式が $\overline{k}[t]$ 上の線型関係式に持ち上がるという，Anderson-Brownawell-Papanikolas による強力な結果 [2] が知られている．これは ABP-criterion と呼ばれており，周期の間の線型独立性を導く強力な道具となる．ここでは，Chang によるその精密化を紹介する．$A = (A_{ij}(t))_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{T})$ の各成分が $t = c \in \overline{k}$ で収束するとき，$A(c) := (A_{ij}(c))_{i,j}$ とおく．

定理 2.6 ([2], [7])**.** $\Phi = \Phi(t) \in \mathrm{Mat}_r(\overline{k}[t])$, $\psi = \psi(t) \in \mathrm{Mat}_{r\times 1}(\mathbb{E})$, $\xi \in \overline{k}^{\times} \setminus \overline{\mathbb{F}_q}^{\times}$, $\rho \in \mathrm{Mat}_{1\times r}(\overline{k})$ が条件

- $\det \Phi(0) \neq 0$ かつ $\det \Phi(\xi^{(-i\ell)}) \neq 0$ $(i \geq 1)$,
- $\psi^{(-\ell)} = \Phi\psi$,
- $\rho\psi(\xi) = 0$

を満たしているとする．このとき，ある $P = P(t) \in \mathrm{Mat}_{1\times r}(\overline{k}[t])$ が存在して，$P(\xi) = \rho$ かつ $P\psi = 0$ が成り立つ．

次に，基本群 G_M と M の周期を結びつける Papanikolas の理論 (および Chang による精密化) を紹介する．M をリジッド解析的に自明なレベル ℓ の pre-t-motive, $\boldsymbol{m} \in \mathrm{Mat}_{r\times 1}(M)$ を M の $\overline{k}(t)$ 上の基底，$\Phi \in \mathrm{GL}_r(\overline{k}(t))$ を $\sigma^{\ell}\boldsymbol{m} = \Phi\boldsymbol{m}$ を満たす行列，$\Psi = (\Psi_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$ を $\Phi^{(-\ell)} = \Phi\Psi$ を満たす行列とする．また，

$$\widetilde{\Psi} := (\Psi_{ij} \otimes 1)_{i,j}^{-1}(1 \otimes \Psi_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{L} \otimes_{\overline{k}(t)} \mathbb{L})$$

とおき，$G_{\Psi} \subset \mathrm{GL}_{r/\mathbb{F}_q(t)}$ を $\widetilde{\Psi} \in G_{\Psi}(\mathbb{L} \otimes_{\overline{k}(t)} \mathbb{L})$ を満たす最小の部分スキームとする．

定理 2.7 ([21], [7])**.** M, Φ, Ψ を上記のようにとる．

(1)　G_{Ψ} は $\mathrm{GL}_{r/\mathbb{F}_q(t)}$ の滑らかな部分代数群であり，自然な同型 $G_{\Psi} \xrightarrow{\sim} G_M$ が存在する．

(2)　$\dim G_M = \mathrm{tr.deg}_{\overline{k}(t)}\,\overline{k}(t)(\Psi_{ij}\,|\,1 \leq i,j \leq r)$ が成り立つ．

(3)　$\Phi \in \mathrm{Mat}_r(\overline{k}[t]) \cap \mathrm{GL}_r(\overline{k}(t))$ かつ $\Psi \in \mathrm{Mat}_r(\mathbb{E}) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$ とする．さらに，Φ と $\xi \in \overline{k}^{\times} \setminus \overline{\mathbb{F}_q}^{\times}$ が定理 2.6 の 1 つ目の条件を満たしているとする．このとき，

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{k}(t)}\,\overline{k}(t)(\Psi_{ij}\,|\,1 \leq i,j \leq r) = \mathrm{tr.deg}_{\overline{k}}\,\overline{k}(\Psi_{ij}(\xi)\,|\,1 \leq i,j \leq r)$$

が成り立つ．

例 2.8. 例 2.3 の状況を考える．このとき，$G_{C_\ell} \simeq G_{\Omega_\ell} \subset \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ となる．また，Ω_ℓ は $\overline{k}(t)$

上超越的であることが分かる．よって

$$\dim G_{C_\ell} = \mathrm{tr.deg}_{\overline{k}(t)}\,\overline{k}(t)(\Omega_\ell) = \mathrm{tr.deg}_{\overline{k}}\,\overline{k}(\widetilde{\pi}_\ell) = 1$$

であり，$G_{C_\ell} \simeq G_{\Omega_\ell} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ が成り立つ．特に，$\widetilde{\pi}_\ell \notin \overline{k}$ が成り立つ (Wade の定理 [28] の別証明)．なお，$\widetilde{\pi}_\ell \notin \overline{k}$ については ABP-criterion から直接導くこともできる．

例 2.9. 例 2.4 の状況を考える．このとき $G_{M_\ell(\mathfrak{s})} \simeq G_{\Psi_\ell(\mathfrak{s})} \subset \mathrm{GL}_{r+1/\mathbb{F}_{p^\ell}(t)}$ であり，

$$\begin{aligned}\dim G_{M_\ell(\mathfrak{s})} &= \mathrm{tr.deg}_{\overline{k}(t)}\,\overline{k}(t)(\Omega_\ell,\ \mathcal{L}_\ell(s_j, s_{j+1}, \ldots, s_{i-1}) \,|\, 1 \le j < i \le r+1) \\ &= \mathrm{tr.deg}_{\overline{k}}\,\overline{k}(\widetilde{\pi}_\ell,\ \zeta_{A_\ell}(s_j, s_{j+1}, \ldots, s_{i-1}) \,|\, 1 \le j < i \le r+1)\end{aligned}$$

が成り立つ．この事実から，$G_{M_\ell(\mathfrak{s})}$ を解析することで正標数多重ゼータ値の間の代数的独立性を示すことができる．

3 証明の概略

ここでは，1.2 節で述べた正標数多重ゼータ値の間の線型/代数的独立性に関する各定理について，その証明の概略を紹介する．以下，$\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}$ に対して

$$\mathrm{Sub}(\mathfrak{s}) \coloneqq \{(s_j, s_{j+1}, \ldots, s_{i-1}) \,|\, 1 \le j < i \le r+1\}$$

とおく．

3.1 定理 1.1 の証明

定理に現れる正標数多重ゼータ値に対応するインデックスのなす集合を

$$J \coloneqq \{(s_{i_1}, \ldots, s_{i_r}) \,|\, r \ge 1,\ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le d\}$$

とおき，$J = \{\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{2^d-1}\}$ の元の番号付けを $\mathrm{dep}(\mathfrak{s}_j)$ が広義単調増加になるようにとる．このとき，任意の $1 \le j \le 2^d - 1$ に対して

$$\bigcup_{1 \le i \le j} \mathrm{Sub}(\mathfrak{s}_i) = \left(\bigcup_{1 \le i < j} \mathrm{Sub}(\mathfrak{s}_i)\right) \sqcup \{\mathfrak{s}_j\}$$

が成り立つ．そこで，

$$M_{\le j} \coloneqq C_\ell \oplus \left(\bigoplus_{1 \le i \le j} M_\ell(\mathfrak{s}_i)\right), \quad \Psi_{\le j} \coloneqq (\Omega_\ell) \oplus \left(\bigoplus_{1 \le i \le j} \Psi_\ell(\mathfrak{s}_i)\right)$$

とおけば，$M_{\le j}$ はリジッド解析的に自明なレベル ℓ の pre-t-motive で，定理 2.7 より $G_{M_{\le j}} \simeq G_{\Psi_{\le j}}$ かつ

$$\dim G_{M_{\le j}} = \mathrm{tr.deg}_{\overline{k}}\,\overline{k}(\widetilde{\pi}_\ell, \zeta_{A_\ell}(\mathfrak{s}_1), \dots, \zeta_{A_\ell}(\mathfrak{s}_j))$$

が得られる．一方，淡中基本群の性質から，代数群の間の自然な全射 $G_{M_{\le j}} \twoheadrightarrow G_{M_{\le j-1}}$ が存在する．これらのことと，深さ 1 における Chang-Yu の結果 [12] から，帰納的に $\dim G_{M_{\le j}} = j+1$ であることを示すことができる．より詳しい証明の解説は [19] でもしているので，そちらも参照されたい．

3.2　定理 1.2 の証明

簡単な議論により，

- $J \coloneqq J_1 = \cdots = J_n$,
- $(p-1), (p^2-1), \dots, (p^n-1) \in J$ かつ $\emptyset \notin J$,
- 任意の $\mathfrak{s} \in J$ に対して $\mathrm{Sub}(\mathfrak{s}) \subset J$

と仮定してよいことが分かる．$J = \{\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_{\#J}\}$ の元の番号付けを $\mathrm{dep}(\mathfrak{s}_j)$ が広義単調増加になるようにとる．$\ell' \coloneqq \mathrm{lcm}(1, 2, \dots, n)$ とし，$1 \le \ell \le n$ と $0 \le j \le \#J$ に対して

$$M_{\ell,\le j} \coloneqq C_\ell^{(\ell'/\ell)} \oplus \left(\bigoplus_{1 \le i \le j} M_\ell(\mathfrak{s}_i)^{(\ell'/\ell)} \right), \quad \Psi_{\ell,\le j} \coloneqq (\Omega_\ell) \oplus \left(\bigoplus_{1 \le i \le j} \Psi_\ell(\mathfrak{s}_i) \right)$$

と定める．ここで，レベル ℓ の pre-t-motive M に対し，$M^{(s)}$ で例 2.5 で解説したレベル $s\ell$ の pre-t-motive を表している．よって，$M_{\ell,\le j}$ はリジッド解析的に自明なレベル ℓ' の pre-t-motive で，定理 2.7 より $G_{M_{\ell,\le j}} \simeq G_{\Psi_{\ell,\le j}}$ かつ

$$\dim G_{M_{\ell,\le j}} = \mathrm{tr.deg}_{\overline{k}}\,\overline{k}(\widetilde{\pi}_\ell, \zeta_{A_\ell}(\mathfrak{s}_1), \dots, \zeta_{A_\ell}(\mathfrak{s}_j))$$

が得られる．また，$0 \le j_1, \dots, j_n \le \#J$ に対して

$$M_{j_1,\dots,j_n} \coloneqq \bigoplus_{1 \le \ell \le n} M_{\ell,\le j_\ell}, \quad \Psi_{j_1,\dots,j_n} \coloneqq \bigoplus_{1 \le \ell \le n} \Psi_{\ell,\le j_\ell}$$

と定めると，再び定理 2.7 より $G_{M_{j_1,\dots,j_n}} \simeq G_{\Psi_{j_1,\dots,j_n}}$ かつ

$$\dim G_{M_{j_1,\dots,j_n}} = \mathrm{tr.deg}_{\overline{k}}\,\overline{k}(\widetilde{\pi}_\ell,\ \zeta_{A_\ell}(\mathfrak{s}_i) \,|\, 1 \le \ell \le n,\ 1 \le i \le j_\ell)$$

が得られる．よって，任意の $0 \le j_1, \dots, j_n \le \#J$ に対して自然な埋め込み

$$G_{M_{j_1,\dots,j_n}} \hookrightarrow \prod_{1 \le \ell \le n} G_{M_{\ell,\le j_\ell}}$$

が同型であることを示せば，定理 1.2 が得られる．この同型は，$j_1+\cdots+j_n$ に関する帰納法により証明される．なお，$j_1=\cdots=j_n=0$ のときは，[14] における Denis の結果 ($\widetilde{\pi}_1,\ldots,\widetilde{\pi}_n$ は $\overline{k}$ 上代数的独立) の帰結である．

3.3 定理 1.3 の証明

$w_1>\cdots>w_n\geq 0$ を異なる重さとする．各 $1\leq i\leq n$ ごとに，$J_i\subset\mathcal{I}_{w_i}$ を有限集合で

$$\zeta_A(\mathfrak{s})\ (\mathfrak{s}\in J_i)\ \text{は}\ k\ \text{上線型独立}$$

となるものとする．このとき，

$$\zeta_A(\mathfrak{s})\ (\mathfrak{s}\in \textstyle\bigcup_{1\leq i\leq n} J_i)\ \text{は}\ \overline{k}\ \text{上線型従属}$$

と仮定して矛盾を導く．重さに関する帰納法により，$\{\zeta_A(\mathfrak{s})\,|\,\mathfrak{s}\in J_1\}$ と $\{\zeta_A(\mathfrak{s})\,|\,\mathfrak{s}\in\bigcup_{2\leq i\leq n} J_i\}$ の間に非自明な $\overline{k}$ 上の線型関係式が存在するとしてよい．

まず，$J_i=\{\mathfrak{s}_{i1},\ldots,\mathfrak{s}_{im_i}\}$ $(m_i\coloneqq\#J_i)$ と番号付けをし，

$$d\coloneqq\sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq m_i}(\mathrm{dep}(\mathfrak{s}_{ij})+1)$$

とおく．ここで，

$$\Phi\coloneqq\bigoplus_{1\leq i\leq n}\bigoplus_{1\leq j\leq m_i}(t-\theta)^{w_1-w_i}\Phi_\ell(\mathfrak{s}_{ij})\in\mathrm{Mat}_d(\overline{k}[t])\cap\mathrm{GL}_d(\overline{k}(t))$$

と定める．また，$\psi_{ij}\in\mathrm{Mat}_{(\mathrm{dep}(\mathfrak{s}_{ij})+1)\times 1}(\mathbb{E})$ を $\Psi_\ell(\mathfrak{s}_{ij})$ の第 1 列とし，

$$\psi\coloneqq\bigoplus_{1\leq i\leq n}\bigoplus_{1\leq j\leq m_i}\Omega_\ell^{w_1-w_i}\psi_{ij}\in\mathrm{Mat}_{d\times 1}(\mathbb{E})$$

と定めると，$\psi^{(-\ell)}=\Phi\psi$ が成り立つ．各 i,j に対応する $\psi(\theta)$ のブロックの最後の成分は，$\zeta_A(\mathfrak{s}_{ij})/\widetilde{\pi}_\ell^{w_1}$ と Carlitz factorial の積である．仮定より，それらの間には非自明な $\overline{k}$ 上の線型関係式が存在するので，それを実現するベクトルを $\rho\in\mathrm{Mat}_{1\times d}(\overline{k})$ とする．つまり，$\rho\psi(\theta)=0$ である．よって ABP-criterion より，ある $P=P(t)\in\mathrm{Mat}_{1\times d}(\overline{k}[t])$ が存在して，$P(\theta)=\rho$ かつ $P\psi=0$ が成り立つ．このとき，十分大きな $N>0$ に対して $t=\theta^{q^N}$ を $P\psi=0$ に代入して q^N 乗根をとることで，

$$\zeta_A(\mathfrak{s})\ (\mathfrak{s}\in J_1)\ \text{の間の非自明な}\ \overline{k}\ \text{上の線型関係式}$$

が得られる．ここから $\zeta_A(\mathfrak{s})$ $(\mathfrak{s}\in J_1)$ の間の非自明な k 上の線型関係式が得られることを示す．これにより矛盾が得られる．

$m_1 \geq 2$ かつ $\dim_{\overline{k}}\langle \zeta_A(\mathfrak{s}_{1j}) \,|\, 1 \leq j \leq m_1\rangle_{\overline{k}} = m_1 - 1$ であると仮定してよい．ここで，

$$r_j \coloneqq \mathrm{dep}(\mathfrak{s}_{1j}), \quad d_1 \coloneqq \sum_{1 \leq j \leq m_1} (r_j + 1)$$

とおき，

$$\Phi_1 \coloneqq \bigoplus_{1 \leq j \leq m_1} \Phi_\ell(\mathfrak{s}_{1j}) \in \mathrm{Mat}_{d_1}(\overline{k}[t]) \cap \mathrm{GL}_{d_1}(\overline{k}(t)), \quad \psi_1 \coloneqq \bigoplus_{1 \leq j \leq m_1} \psi_{1j} \in \mathrm{Mat}_{d_1 \times 1}(\mathbb{E})$$

と定めると，$\psi_1^{(-\ell)} = \Phi_1 \psi_1$ が成り立つ．各 j に対応する $\psi_1(\theta)$ のブロックの最後の成分は，$\zeta_A(\mathfrak{s}_{1j})/\widetilde{\pi}_\ell^{w_1}$ と Carlitz factorial の積である．今，それらの間には非自明な $\overline{k}$ 上の線型関係式 $\rho_1\psi_1(\theta) = 0$ ($\rho_1 \in \mathrm{Mat}_{1 \times d_1}(\overline{k})$) が存在するので，再び ABP-criterion を適用することで，その持ち上げとなる $\overline{k}[t]$ 上の線型関係式 $P_1\psi_1 = 0$ ($P_1 \in \mathrm{Mat}_{1 \times d_1}(\overline{k}[t])$) が得られる．ここで，$\rho_1$ の $r_1 + 1$ 番目の成分は 0 でないと仮定してよい．このとき，P_1 の $r_1 + 1$ 番目の成分で P_1 自身を割ったベクトルを

$$H = (h_{11}, \ldots, h_{1,r_1+1}, \ldots, h_{m_1 1}, \ldots, h_{m_1, r_{m_1}+1}) \in \mathrm{Mat}_{1 \times d_1}(\overline{k}(t))$$

とおくと，$h_{j,r_j+1} \in \mathbb{F}_q(t)$ ($1 \leq j \leq m_1$) が成り立つ．このとき，$t = \theta$ を $H\psi_1 = 0$ に代入することで，$\zeta_A(\mathfrak{s})$ ($\mathfrak{s} \in J_1$) の間の非自明な k 上の線型関係式が得られる．

3.4　定理 1.4 の証明

$d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$L_d \coloneqq \prod_{1 \leq j \leq d}(\theta - \theta^{q^j}) \in A$ とおく．$\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}$ に対し，Chang は [8] において Carlitz 多重ポリログを

$$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(z_1, \ldots, z_r) \coloneqq \sum_{d_1 > \cdots > d_r \geq 0} \frac{z_1^{q^{d_1}} \cdots z_r^{q^{d_r}}}{L_{d_1}^{s_1} \cdots L_{d_r}^{s_r}}$$

で定義した．この級数は $z_1 = \cdots = z_r = 1$ で収束するので，その値を $\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) \in k_\infty$ で表す．Ngo Dac は [20] において，線型独立性の部分的な結果も得ており，その過程で

$$\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}} \coloneqq \{(s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}_w \,|\, q \nmid s_1, \ldots, s_r\}$$

を導入した．このとき，$d_w \coloneqq \#\mathcal{I}_w^{\mathrm{T}} = \#\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}}$ であることが確認できる．また，

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_w^{\mathrm{T}} &\coloneqq \langle \zeta_A(\mathfrak{s}) \,|\, \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}} \rangle_k, \\
\mathcal{Z}_w^{\mathrm{Li}} &\coloneqq \langle \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) \,|\, \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w \rangle_k, \\
\mathcal{Z}_w^{\mathrm{Li,T}} &\coloneqq \langle \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) \,|\, \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}} \rangle_k, \\
\mathcal{Z}_w^{\mathrm{Li,ND}} &\coloneqq \langle \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) \,|\, \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}} \rangle_k
\end{aligned}$$

とおく．これらの空間と，調べたい $\mathcal{Z}_w$ との関係は次のようになる:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_w & & \mathcal{Z}_w^{\mathrm{Li}} & \\
\mathcal{Z}_w^{\mathrm{T}} \arrow[u, hook, "(1)"] \arrow[r, dash, dashed, "(2)"] & \mathcal{Z}_w^{\mathrm{Li,T}} \arrow[ur, hook, "(3)"] & & \mathcal{Z}_w^{\mathrm{Li,ND}} \arrow[ul, hook', "(4)"']
\end{tikzcd}$$

上記の (1)–(4) は，実は全て等号となる:

(1) これが等号であることは，Ngo Dac による結果 [20] である．

(2) Thakur は [25] において，$\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}$ について，$s_1, \ldots, s_r \leq q$ ならば $\zeta_A(\mathfrak{s}) = \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ であることを示している．特に，(2) は等号である．

(3) これが等号であることは，(1) の証明の ‘Li 版’ を示すことで得られる．

(4) 任意の $\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}}$ に対し，(3) より $\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) = \displaystyle\sum_{\mathfrak{s}' \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}} a_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}'} \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}'}(\mathbf{1})$ $(a_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}'} \in k)$ と表される．この表示は具体的に書き下すことができ，$(a_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}'})_{\mathfrak{s},\mathfrak{s}'} \in \mathrm{GL}_{d_w}(k)$ を示すことができる．このことと (3) より，(4) が等号であることが従う．

以上より，$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}})$ が k 上線型独立であることを示せばよい．これは重さ w に関する帰納法により示され，その過程で ABP-criterion が用いられる．証明のアイデアは，[11] と [20] から来ている．その際，巨大な Frobenius 差分方程式を解き，線型関係式の候補を限定していくことにより，$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}})$ の k 上の線型独立性を導く．なお，最後のステップで，$q-1 \mid w$ ならば $\widetilde{\pi}_\ell^w \in k^\times \cdot \zeta_A(w) \subset \mathcal{Z}_w = \mathcal{Z}_w^{\mathrm{Li,ND}}$ であることを用いる．そのため，上記の (4) の等号も示しておく必要がある．

謝辞

代数的整数論とその周辺 2024 での講演の機会を与えてくださった世話人の皆様に感謝いたします．本研究は JSPS 科研費 JP23K03073, JP24H00015 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] G. W. Anderson, *t-motives*, Duke Math. J. **53** (1986), no. 2, 457–502.

[2] G. W. Anderson, W. D. Brownawell and M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special* Γ*-values in positive characteristic*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 1, 237–313.

[3] G. W. Anderson and D. S. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 1, 159–191.

[4] G. W. Anderson and D. S. Thakur, *Multizeta values for $\mathbb{F}_q[t]$, their period interpretation, and relations between them*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 11, 2038–2055.

[5] F. Brown, *Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 949–976.

[6] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. **1** (1935), no. 2, 137–168.

[7] C.-Y. Chang, *A note on a refined version of Anderson-Brownawell-Papanikolas criterion*, J. Number Theory **129** (2009), no. 3, 729–738.

[8] C.-Y. Chang, *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*, Compositio Math. **150** (2014), 1789–1808.

[9] C.-Y. Chang, Y.-T. Chen and Y. Mishiba, *On Thakur's basis conjecture for multiple zeta values in positive characteristic*, Forum Math. Pi **11** (2023), Paper No. e26, 32 pp.

[10] C.-Y. Chang, M. A. Papanikolas and J. Yu, *Frobenius difference equations and algebraic independence of zeta values in positive equal characteristic*, Algebra Number Theory **5** (2011), no. 1, 111–129.

[11] C.-Y. Chang, M. A. Papanikolas and J. Yu, *An effective criterion for Eulerian multizeta values in positive characteristic*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **21** (2019), no. 2, 405–440.

[12] C.-Y. Chang and J. Yu, *Determination of algebraic relations among special zeta values in positive characteristic*, Adv. Math. **216** (2007), no. 1, 321–345.

[13] P. Deligne and A. B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56.

[14] L. Denis, *Indépendance algébrique de différents π*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998), no. 8, 711–714.

[15] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[16] B. H. Im, H. Kim, K. N. Le, T. Ngo Dac and L. H. Pham, *Zagier-Hoffman's conjectures in positive characteristic*, Forum Math. Pi **12** (2024), Paper No. e18, 49 pp.

[17] D. Matsuzuki, *Multiple zeta values with varying constant fields*, `https://arxiv.org/abs/2407.00403`.

[18] Y. Mishiba, *p-th power relations and Euler-Carlitz relations among multizeta values*, Algebraic number theory and related topics 2013, 13–29, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B53**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2015.

[19] 三柴善範, 正標数多重ゼータ値の関係式と代数的独立性, 2024 年度 (第 31 回) 整数論サマースクール「超越数論」報告集 (2024), 130–151.

[20] T. Ngo Dac, *On Zagier-Hoffman's conjectures in positive characteristic*, Ann. of Math. (2), **194** (2021), no. 1, 361–392.

[21] M. A. Papanikolas, *Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms*, Invent. Math. **171** (2008), no. 1, 123–174.

[22] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149** (2002), no. 2, 339–369.

[23] D. S. Thakur, *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing, River Edge NJ, 2004.

[24] D. S. Thakur, *Power sums with applications to multizeta and zeta zero distribution for* $\mathbb{F}_q[t]$, Finite Fields Appl. **15** (2009), no. 4, 534–552.

[25] D. S. Thakur, *Relations between multizeta values for* $\mathbb{F}_q[t]$, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 12, 2318–2346.

[26] D. S. Thakur, *Multizeta values for function fields: a survey*, J. Théor. Nombres Bordeaux **29** no. 3 (2017), 997–1023.

[27] G. Todd, *A conjectural characterization for* $\mathbb{F}_q(t)$*-linear relations between multizeta values*, J. Number Theory **187** (2018), 264–287.

[28] L. I. Wade, *Certain quantities transcendental over* $GF(p^n, x)$, Duke Math. J. **8** (1941), 701–720.

[29] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic* p, Ann. of Math. (2) **134** (1991), no. 1, 1–23.

[30] J. Yu, *Analytic homomorphisms into Drinfeld modules*, Ann. of Math. (2) **145** (1997), no. 2, 215–233.

[31] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512. Progr. Math., **120** Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.