局所ラングランズ対応周辺の有限体上の代数多様体

慶應義塾大学 医学部 津嶋貴弘
Takahiro Tsushima
Keio University School of Medicine

1 動機：明示的局所ラングランズ対応に向けて

局所ラングランズ対応は局所類体論の高次元化と見なすことができる．類体論の相互写像を明示的に書く公式を明示的相互法則という．そのため

局所ラングランズ対応を明示的に記述することは明示的相互法則の高次元化

にあたると考えてもよいであろう．これを単に明示的局所ラングランズ対応と呼ぶことにする．そのような高次元化を幾何学的に実現する方法の一つとして

Lubin–Tate 空間 (以下，LT 空間と略記する) のアフィノイドを研究する方法

があると考えている[1]．Lubin–Tate 理論は，局所類体論を純局所的かつ明示的に記述する理論であり，LT 空間は Lubin–Tate 理論の高次元化を実現する幾何学的な対象である ([4]).
アフィノイドを調べる上で，以下のことは基本的である．

アフィノイドからは還元という操作を通じて，有限体上の代数多様体が定まる．

その代数多様体がスムーズになり，次元と同じ次数を持つエタール・コホモロジー群がゼロでないようなものに興味を持っている．そのようなものは既約ガロワ表現と結びつくと期待されるからである．局所体上の一般線形群の尖点表現は，タイプ理論を通じて，ある種の有限群の表現[2]とコンパクト誘導を通じて記述される．

上のようなアフィノイドを用いると，どのようなガロワ拡大を通じてガロワ表現が作られるか，またタイプ理論の核となる部分がどのように幾何的に実現されるかなどが具体的にわかって興味深い．

タイプ理論は [2] において Bushnell–Kutzko によって構築され，局所ラングランズ対応を明示化する多くの試みが Bushnell–Henniart によってなされている．例えば [1] を参照されたい．これらの研究においては，幾何は使われず代数や解析による手法が用いられる．上で述べたよ

[1]技術的な理由で，混標数の場合には LT 空間の代わりに LT perfectoid 空間を考える必要が出てくる．
[2]後でも言及するが，現れる有限群の例としては Heisenberg 群と巡回群との半直積群があげられる．

うな幾何的な手法を用いた先行結果等については後述する．

$$
\begin{tikzcd}
\text{局所類体論} \arrow[rr, Rightarrow, "\text{明示化}"] \arrow[d, squiggly, "\text{高次元化}"'] & & \text{明示的相互法則} \arrow[d, squiggly, "\text{高次元化}"] \\
\text{局所ラングランズ対応} \arrow[rr, Rightarrow, "\text{明示化}"] & & \text{明示的局所ラングランズ対応} \\
\text{LT 空間} \arrow[u, "\text{幾何的実現}"] & \boxed{\text{LT 空間のアフィノイド}} \arrow[l, hook'] \arrow[r, Rightarrow, "\text{還元}"] & \text{有限体上の代数多様体} \arrow[u, "\text{幾何的実現}"']
\end{tikzcd}
$$

2 ある種のアフィノイドの還元について

LT 空間は志村多様体の ‘局所版’ であり，リジッド解析的多様体である．ある種の志村多様体はアーベル多様体と付加構造の組の同型類のモジュライであった．その局所版である LT 空間は，1 次元かつ高さが n の形式 $\mathcal{O}_K$ 加群と付加構造の組の同型類の変形空間になっている．このとき LT 空間の次元は $n-1$ 次元になる．ここで，$\mathcal{O}_K$ は局所体 K の整数環を表す．

スキーム論においてアフィン部分空間が基本的であるように，リジッド解析的多様体のアフィノイド（部分空間）は基本的である．アフィノイドからは還元が定まる[3]．還元はアフィンな代数的スキームになる．

2.1 LT 曲線について

Deligne–Mumford の定理より，局所体上の種数が 1 より真に大きい幾何的連結なスムーズ固有曲線は，同型を除いてただ一つの安定モデルを持つことが知られている．その安定モデルの還元を安定還元という．[4]

これを反映してリジッド解析的曲線の ‘安定被覆’ の存在が導かれ，安定還元も同様に定義される ([6] を参照).

$n=2$ の場合，つまり 1 次元の LT 空間を LT 曲線と呼ぶことにする．これはモジュラー曲線の局所版である．LT 曲線の安定モデルはモジュラー曲線の安定モデルと関係しており興味深い対象である．群作用込みで安定還元を理解できると，上で述べたように明示的相互法則の 2 次元版が可能となる．

K を局所体とする．K の剰余体の位数を q とし，q は奇数と仮定する．K 上のフルレベル構造を持つ LT 曲線の安定還元の既約成分は，以下のいずれかの曲線への純非分離射を持つ ([32]).

1. 射影直線
2. $(x^q y - x y^q) = \xi$ $(\xi \in \mathbb{F}_q^\times)$ で定義される曲線のスムーズコンパクト化[5]
3. $y^q - y = x^2$ で定義される 2 次の Artin–Schreier 曲線 (以下，AS 曲線と略記) のスムーズコンパクト化

[3] アフィン部分空間は環と対応していたようにアフィノイドは位相環（テイト代数）と対応している．その位相環の power bounded な元のなす部分環を考える．それを power nilpotent な元のなすイデアルでわることで有限体上の有限生成代数が得られ付随する代数的スキームを還元と定義する．

[4] 一般次元ではそのようなモデルの存在は知られていない．

[5] 全ての $\xi \in \mathbb{F}_q^\times$ を動かしてまとめた $(x^q y - x y^q)^{q-1} = 1$ で定義されるアフィン代数曲線のことを $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ の Deligne–Lusztig 曲線と呼ぶ．

4. $y^q + y = x^{q+1}$ で定義されるエルミート曲線

この文脈では，射影直線は正の種数を持つ曲線をつなぐ役割しか持たない．二つ目の曲線は $\mathrm{GL}_2(K)$ のレベルゼロの尖点表現と結びつく．三つ目の 2 次の AS 曲線は 2 次の完全分岐拡大体上の指標を生み出す役割を持つ．最後のエルミート曲線は 2 次の不分岐拡大体上の指標を生み出す役割を持つ．エルミート曲線は，不分岐指標でパラメトライズされる $\mathrm{GL}_2(K)$ の尖点表現とも関係し，自己同型群が大きく有理点の個数が大きい代数曲線であることが知られている．

モジュラー曲線の文脈で上のような曲線が安定還元の既約成分に現れることは知られていた．以下簡単に振り返る．射影直線は $X_0(p)$ の既約成分として現れる ([8])[6]．二つ目の曲線の連結成分として現れる，定義方程式 $x^q y - xy^q = 1$ を持つ曲線は Drinfeld 曲線とも呼ばれ，[7, §2.3] で言及されている[7]．Drinfeld 曲線の商が $X_0(p^2)$ の安定還元に現れることが [9] で示された[8]．また高次元を含む形で [31] で調べられている．

[6] において $X_0(p^3)$ の安定還元の既約成分として 2 次の AS 曲線が発見された．

[25] で $X_0(p^4)$ の安定還元の既約成分としてエルミート曲線が発見された．

q が偶数のときには LT 曲線の安定還元の既約成分として次のようなものが現れることが知られている ([13], [26], [27])．

- 超特異楕円曲線 $y^2 - y = x^3$
- $y^2 - y = x^{(q/2)+1} + x^{q+1} + x^{2q+1}$ で定義される代数曲線
- $y^2 - y = x^{q+1}$ で定義される代数曲線

3　GV 曲線

3.1　フロベニウス固有値の研究

[10] において van der Geer と van der Vlugt は以下のタイプの曲線を詳しく調べている．有限体係数の多項式 $f(x)$ は，$f(x) + f(y) = f(x+y)$ を満たすとき，加法的多項式と呼ぶ．p を素数とし，q を p のベキとする．e を非負整数とし，加法的多項式 $R(x) = \sum_{i=0}^{e} a_i x^{p^i} \in \mathbb{F}_q[x]$ $(a_e \neq 0)$ に対して，アフィン代数曲線

$$C_R\colon y^p - y = xR(x)$$

を考える．有限体上のスムーズアフィン代数曲線 X のスムーズコンパクト化を $\overline{X}$ とかく．[10] では主に $p = 2$ の場合に主眼をおいて

1. $\overline{C}_R$ が超特異[9]であることの証明
2. $\overline{C}_R$ が最大曲線[10]になるための幾つかの十分条件

[6] 二つの射影曲線が各超特異点で交差しているような安定曲線になる．

[7] Drinfeld はこういうものが LT 曲線の安定還元に現れることを知っていた可能性が高そうだ．

[8] 定義方程式は $xy(x-y)^{p-1} = 1$ となり，その代数曲線を E とする．$x^p y - xy^p = 1$ で定義される代数曲線を D とすると，$D \to E;\ (x, y) \mapsto (x^{p-1}, y^{p-1})$ という有限エタール射が存在する．

[9] そのヤコビアンが超特異楕円曲線幾つかの直積と同種であること．

[10] より正確に定義を述べておく．C を種数 $g(C)$ の $\mathbb{F}_q$ 上の幾何的連結でスムーズな射影代数曲線とする．$|C(\mathbb{F}_q)| = q + 1 + 2g(C)\sqrt{q}$ であるとき，C を $\mathbb{F}_q$ 上の最大曲線 (maximal curve) と呼ぶ．最大曲線は符号理論で利用される．例えば，エルミート曲線（$y^q + y = x^{q+1}$ で定義されるアフィン代数曲線のコンパクト化）は $\mathbb{F}_{q^2}$ 上最大曲線になることが知られている．

3. $\overline{C}_{R,\mathbb{F}}$ の自己同型群の構造

が与えられている．ここで，$\mathbb{F}$ は $\mathbb{F}_p$ の代数閉包とする．[22] においては p, q が素数 p_0 のべきである場合に上の 1,2 にあたることを一般化した．この場合も含めて，本稿では $\overline{C}_R$ を GV 曲線と呼ぶことにする．さらに $p_0 \neq 2$ の場合に GV 曲線のフロベニウス固有値の明示公式を与えた．それを示すために，イプシロン因子に関する Laumon の積公式を用いる証明と幾何的な直接証明を与えた．前者では，フロベニウス固有値を指標の局所イプシロン因子と解釈して，2 次のガウス和で表す．後者では，GV 曲線の商を調べコホモロジカルな議論をすることで，やはりフロベニウス固有値を 2 次のガウス和で表示できる．これによって，上で述べた一般化を行なった．

上で述べたフロベニウス固有値に関する明示公式を用いて，GV 曲線が最大曲線になるための必要十分条件をより詳しく調べることで，幾つかの新しい最大曲線を与える研究を行なった ([20])．標数 2 の場合に，GV 曲線のフロベニウス固有値を計算する方法を，伊藤哲史氏，竹内大智氏と共同研究中である．

また，C_R の高次元化が [21] で研究されている．

3.2 幾つかの予想

以下，もう少し一般的な状況を考える．

定義 3.1. p, q を素数 p_0 のベキとする．r を正の整数とする．$R(x) = \sum_{i=0}^{e} a_i x^{p^i} \in \mathbb{F}_q[x]$ $(a_e \neq 0)$ として，$\mathbb{F}_q$ 上の代数曲線

$$C_{R,r} \colon y^{p^r} - y = xR(x)$$

を考える．代数曲線 $\overline{C}_{R,r}$ も GV 曲線と呼ぶことにする．

$\overline{C}_{R,r}$ も超特異であることが示せる ([20])．

§2 の LT 曲線の安定還元の既約成分として現れるような正の種数を持つ既知の代数曲線は，全て GV 曲線になる．

そこで標数 2 の場合に，次のように予想してみてはどうだろうか．

予想 3.2. 標数 2 のフルレベル構造付きの LT 曲線の安定還元の任意の既約成分 C からある GV 曲線に純非分離射が存在する．

注 3.3. 知られている例では $r = 1$ のときしか現れておらず，上の予想は $r = 1$ で成り立つかもしれないが，高次元で上のような一般的な GV 曲線を調べておくことは意味があると考えている．

注 3.4. 上の予想はかなり粗っぽいので，コホモロジーにどのようにガロワ表現が実現するかを含めたより精密な予想が望まれる．

$e \geq 1$ と仮定し，

$$e_R := \gcd\{i \geq 1 \mid a_i \neq 0\}$$

とおく．LT 曲線の話と直接関係はないと思うが，[20] における $\overline{C}_{R,r}$ の最大性についての予想を述べておく．

予想 3.5. *([20])* f を自然数として，$\overline{C}_{R,r}$ が $\mathbb{F}_{p^{2f}}$ 上最大曲線になるとする．このとき，r は $\gcd(e_R, f)$ の約数になる．

$R(x)$ が単項式の場合と $e=f$ のときに関しては，[20] で確かめられている．

明示的局所ラングランズ対応を導くためには，還元に現れる多様体のフロベニウス固有値を詳しく調べておく必要がある ([13])．上の予想の観点から GV 曲線のフロベニウス固有値を調べることが重要であると考えた．

3.3 GV 曲線を用いた原始的な表現の構成

以下，有限体 k 上の代数多様体 X に対して，$\overline{k}$ への X の底変換 $X_{\overline{k}}$ の i 次のコンパクト台を持つエタールコホモロジー群 $H^i_{\mathrm{c}}(X_{\overline{k}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を $H^i_{\mathrm{c}}(X)$ と略記する．ただし，$\overline{k}$ は k の代数閉包とし，ℓ は k の標数と異なる素数とする．

[30] において，GV 曲線を用いて高次元のガロワ表現を構成する研究を行った．以下 p は素数とする．$\ell \neq p$ なる素数を固定する．有限アーベル群 A の指標群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$ を $A^\vee$ と表す．加法的多項式 $R(x) = \sum_{i=0}^{e} a_i x^{p^i} \in \mathbb{F}_q[x]$ $(a_e \neq 0)$ と非自明な指標 $\psi \in \mathbb{F}_p^\vee \setminus \{1\}$ をとる．ψ アイソティピック部分 $H^1_{\mathrm{c}}(C_R)[\psi]$ は p^e 次元になり，Heisenberg 群とアーベル群の半直積群 Q_R の表現とみなすことができる．Q_R の定義を述べるために，$R(x)$ から $\mathbb{F}_q$ 係数の多項式を二つ導入する．

$$E_R(x) := R(x)^{p^e} + \sum_{i=0}^{e} (a_i x)^{p^{e-i}} \in \mathbb{F}_q[x],$$
$$f_R(x,y) := -\sum_{i=0}^{e-1} \left(\sum_{j=0}^{e-i-1} (a_i x^{p^i} y)^{p^j} + (xR(y))^{p^i} \right) \in \mathbb{F}_q[x,y].$$

$f_R(x,y)^p - f_R(x,y) = -x^{p^e} E_R(y) + xR(y) + yR(x)$ が成り立つ．以下，$\mathbb{F}_p$ の代数閉包を $\mathbb{F}$ と略記する．$V_R := \{x \in \mathbb{F} \mid E_R(x) = 0\}$ とおく．多項式 $E_R(x)$ は，p^{2e} 次の分離的多項式であって，

$$E_R(x) + E_R(y) = E_R(x+y), \quad E_R(ax) = aE_R(x) \quad (a \in \mathbb{F}_p)$$

を満たすから，V_R は $\mathbb{F}_p$ 上の $2e$ 次元のベクトル空間になる．さらに $d_R := \gcd\{p^i + 1 \mid a_i \neq 0\}$，$\mu_{d_R} := \{x \in \mathbb{F} \mid x^{d_R} = 1\}$ と定める．

$$Q_R := \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{F}^3 \mid a \in \mu_{d_R},\ b \in V_R,\ c^p - c = bR(b) \right\}$$

とおいて，群の演算を

$$(a,b,c) \cdot (a',b',c') = (aa', b + aa', c + c' + f_R(b, ab'))$$

とする．$H_R := \{(a,b,c) \in Q_R \mid a = 1\}$ という部分群を考えると，その中心 $Z(H_R)$ が $\{(0,0,c) \in Q_R \mid c \in \mathbb{F}_p\}$ となる．商 $H_R/Z(H_R) \simeq V_R$ は，有限アーベル群である．故に H_R は Heisenberg 群[11]であって，Q_R は μ_{d_R} と H_R の半直積群になっている．さらに C_R に Q_R は次の自己同型射で作用する．

$$(x,y) \cdot (a,b,c) = \left(a^{-1}(x+b), y + f_R(x,b) + c \right).$$

[11] 有限群 G が Heisenberg 群であるとは，中心 $Z(G)$ による商 $G/Z(G)$ がアーベル群であること．

$\mathbb{Z}$ は Q_R に 1 が $(a,b,c) \mapsto (a^{q^{-1}}, b^{q^{-1}}, c^{q^{-1}})$ で作用する．$\mathbb{Z} \ni 1$ を $H^1_{\mathrm{c}}(C_R)$ に q 乗のフロベニウス準同型として作用するものとする．以上より，$H^1_{\mathrm{c}}(C_R)$ は $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$ の表現とみなせる．

K を局所体とし，$\overline{K}$ を K の代数閉包とする．W_K を K の Weil 群とする．技術的な理由から，K が混標数の場合には絶対分岐指数が十分大きいと仮定する．表現の導手をコントロールする自然数 m を準備する．部分群

$$Q_{R,m} := \{(a,b,c) \mid a \in \mu_{d_{R,m}}\} \subset Q_R$$

を考える．ただし，$d_{R,m} := d_R/\gcd\{d_R, m\}$ とする．このとき [30] において $Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z}$ をその Weil 群に持つような K のガロワ拡大体 $L_{R,m}$ を構成した．K が等標数のときは次で与えられる体拡大である．K の素元 ϖ を一つとる．$\alpha, \beta, \gamma \in \overline{K}$ を

$$\alpha^{d_R} = \varpi, \quad E_R(\beta) = \alpha^{-m}, \quad \gamma^p - \gamma = \beta R(\beta)$$

なる元として，$L_{R,m} := K^{\mathrm{ur}}(\alpha^m, \beta, \gamma)$ とおく．ただし K^{ur} は K の最大不分岐拡大とする．群の全射準同型写像

$$\Theta_{R,m} \colon W_K \twoheadrightarrow W(L_{R,m}/K)$$

が定義できる．以下構成する対象は素元 ϖ の取り方によるが，簡単のため添字に ϖ は略する．これにより合成

$$\rho_{R,\psi,m} \colon W_K \xrightarrow{\Theta_{R,m}} W(L_{R,m}/K) \simeq Q_{R,m} \rtimes \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(H^1_{\mathrm{c}}(C_R)[\psi])$$

が p^e 次元の既約スムーズ表現を定める．その Swan 導手の指数は $m(p^e+1)/d_R$ となる．W_K の既約スムーズ表現が原始的であるとは，いかなる部分群の表現の誘導とも同型でないものを意味する．[30, Theorem 1.1] においては，$p \neq 2$ のとき，$\rho_{R,\psi,m}$ が原始的となる必要十分条件を C_R の幾何的な条件で書いた．実際これにより，原始的な表現を得ることができる．その例をあげよう．加法的多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^{p^i} \in \mathbb{F}_q[x]$ に対して，多項式 $\sum_{i=0}^{r} a_i x^i \in \mathbb{F}_q[x]$ が既約になるとき，原始的ということにする．$E_R(x)$ が原始的になるとき，$\rho_{R,\psi,m}$ は原始的である．$E_R(x)$ は reciprocal な多項式であり，既約な reciprocal 多項式の個数は [5, Theorems 2 and 3] において計算されている．

上述のガロワ表現の構成は，[15] で $R(x) = x^{p^e}$ という単項式の場合に着想をえた．

一般に，局所ラングランズ対応により以下は全単射になることが知られている．

$$\{\mathrm{GL}_n(K) \text{ の尖点表現の同型類}\} \xleftrightarrow{1:1} \{W_K \text{ の } n \text{ 次元既約スムーズ表現の同型類}\}.$$

以下の問は自然に起きる疑問であるが未解決であり，今後の課題である．

問題 3.6. 局所ラングランズ対応によって $\rho_{R,\psi,m}$ と対応する $\mathrm{GL}_{p^e}(K)$ の尖点表現を記述せよ．

3.4 背景と予想

この節では高次元の LT 空間を考えたい．この文脈での既知の結果の多くは，LT 空間でなく LT perfectoid 空間（以下，LTp 空間と略記する）で考えている．この設定では，perfectoid アフィノイドのある良い整モデルの還元を考える．それを簡単のため,「LTp 空間のアフィノイドのある還元」という言い方をする．正確には，還元の方は，ある有限体上の代数多様体の完全化 (perfection) になるが，簡単のため完全化という文言は略する．

n を 2 以上の整数とする．[15] の場合に n 次元の LTp 空間のアフィノイドのある還元として次のような代数多様体が現れる．ある整数 $m \geq 1$ が存在して

$$y^{p^m} - y = x_1^{p^e+1} + (\text{変数 } x_2, \ldots, x_n \text{ に関する 2 次形式}). \tag{3.1}$$

曲線 '$y^{p^m} - y = x^{p^e+1}$' の部分へのガロワ作用を調べるとガロワ群が上で説明した $R(x) = x^{p^e}$ の場合の $Q_R \rtimes \mathbb{Z}$ になっている現象を見つけた．この場合は Swan 導手 1 の原始的ガロワ表現が現れており，これに対する局所ラングランズ対応の明示的描写は [15] で与えられている．これと類似の現象は [3], [14], [24], [31] にある．以下，有限次分離拡大 L/K と W_L のスムーズ表現 ρ の W_K へのスムーズ誘導を $\mathrm{Ind}_{L/K}\,\rho$ と表す．

- K_n/K を不分岐 n 次拡大とすると，[3] では $\mathrm{Ind}_{K_n/K}\,\chi$ という形の既約 n 次元ガロワ表現を実現するアフィノイドを考察している．ただし，χ は W_{K_n} のスムーズ指標である．レベル 0 の場合は [31] で扱われており，[3] はその一般化になっている．

- [24] では，L/K が完全分岐 n 次拡大で K の剰余標数が n を割らないとき，$\mathrm{Ind}_{L/K}\,\chi$ という形の既約ガロワ表現を実現するアフィノイドを考察している．ただし，χ は W_L のスムーズ指標である．これは [14] の一般化になっている．

これらの場合では還元の方程式は，いずれもある正の整数 m と n 変数の多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が存在して，

$$y^{p^m} - y = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.2}$$

となっている．[3] の還元の定義方程式は行列式を用いて書いており，上の形になることがすぐわからないため以下に定義式を書いておこう．[3, (3.4.2)] によれば

$$y^{q^{n+1}} - y = \sum_{i=1}^{n} (b_{n+1-i}^{q^{n+1}} - b_{n+1-i}) b_i^{q^i} \tag{3.3}$$

となる[12]．知られている例はそう多くないため，一般の場合を類推することは難しいが試みに予想を立ててみよう．ただしレベルゼロの場合 [31] は例外的なことが多いため予想から除外する．

予想 3.7. 中間コホモロジーが消えずレベルが 1 以上の尖点表現と結びつくようなフルレベル構造付きの n 次元 LT 空間のアフィノイドの還元の定義方程式は，ある正の整数 m が存在して

$$y^{p^m} - y = \sum_{1 \leq i,j \leq n} R_{i,j}(x_i, x_j) \tag{3.4}$$

と書ける．ここで $1 \leq i, j \leq n$ をみたす組 (i, j) に対して，二変数多項式 $R_{i,j}(x_i, x_j)$ は x_i の加法的多項式と x_j の加法的多項式の積の形をしている．

注 3.8.
- GV 曲線の右辺に出てきた項 $xR(x)$ は加法的多項式 x と $R(x)$ の積である．

- 任意の 2 次形式 $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$ は加法的多項式 $R_{i,j}(x_i, x_j) = (a_{i,j} x_i) \times x_j$, $R_{j,i}(x_i, x_j) = 0$ とすれば上の予想の形になっている．

- (3.3) の定義方程式の右辺を考える．例えば，$i \leq n+1-i$ のとき $R_{i,n+1-i}(b_i, b_{n+1-i}) = (b_{n+1-i}^{q^{n+1}} - b_{n+1-i}) b_i^{q^i}$ とし，$n+1-i < i$ のとき，$R_{i,n+1-i}(b_i, b_{n+1-i}) = (b_{n+1-i}^{q^{n+1}} - b_{n+1-i}) b_i^{q^i}$ とし，他の $R_{i,j}$ は 0 と定めれば確かに (3.4) の形になる．

[12] 還元を n 次元にするため n を $n+1$ で取り変え，b_{n+1} を y と書いた．

- $R(x)=\sum_{i=0}^{e} a_i x^{p^i}$, $S(x)=\sum_{j=0}^{f} b_j x^{p^j}$ として代数曲線 $y^p - y = R(x)S(x)$ を考える．y を適当に変数変換すると，ある加法的多項式 $T(x)$ が存在して $z^p - z = xT(x)$ で定義される．

[24] で発見されているアフィノイドのある還元の方程式が上の形になることを見ておこう．

補題 3.9. *[23, Proposition 3.1]* のアフィン代数多様体 Z_ν の定義方程式は，(3.4) の形にかける．

証明. 記号は，[23, Proposition 3.1] に従う．ν が奇数のときには，$z^q - z =$ (2 次形式) と書けるので明らかである．ν が偶数で，$0 < \nu < n$ のときを考えよう．$P_\nu(y_1,\dots,y_n)$ の y_n を $-y_1 - \cdots - y_{n-1}$ で置き換えて，整理する．$1 \le i \le j \le n$ なる (i,j) が現れる項は

$$\mathscr{P}(y_i)\mathscr{P}(y_j),\quad \mathscr{P}(y_i)y_j^q,\quad \mathscr{P}(y_j)y_i^q,\quad y_i^q\mathscr{P}(y_j),\quad y_j^q\mathscr{P}(y_i)$$

達の幾つかの和となる．ここで，$\mathscr{P}(x) = x^q - x$ とする．まず $i = j$ の場合には上の和を $\mathscr{P}(y_i)\times f(y_i)$ の形に書くと $f(y_i)$ はやはり加法的多項式になる．$i \neq j$ とする．例えば，$\mathscr{P}(y_i)$ がかかっている項をまとめた多項式を $R_{i,j}(y_i,y_j)$ とし，$\mathscr{P}(y_j)$ がかかっている多項式を $R_{j,i}(y_i,y_j)$ とする ($\mathscr{P}(y_i)\mathscr{P}(y_j)$ はどちらに入れてもよい)．$n < \nu < 2n$ のときも同様なので省略する． □

4 有限体上の Weil 表現と関係する代数多様体

現在知られている還元には Heisenberg 群が作用していることが多い．$\mathrm{GL}_n(K)$ の尖点表現を記述する理論としてタイプ理論というものがある．タイプ理論では Heisenberg 群が基本的な役割を果たす．そのため，還元として，Heisenberg 群が作用するものが現れると考えられる．Stone–Von Neumann の定理によれば，Heisenberg 群は中心への制限が非自明な指標を含む場合に，その指標ごとにただ一つの既約表現が定まる．Heisenberg 群の自己同型群のある種の部分群との半直積群にその表現が延長されるかということを考える．

4.1 Gérardin のユニタリー群に対する Weil 表現 ([11])

$\mathbb{F}_{q,+} := \{x \in \mathbb{F} \mid x^q + x = 0\}$ とおく．

$$\mathrm{H}_n := \left\{(\boldsymbol{a}, b) \in \mathbb{F}_{q^2}^n \times \mathbb{F}_{q^2} \mid b^q + b = \boldsymbol{a}^\dagger \cdot \boldsymbol{a}\right\}$$

を考える．ここで，$\boldsymbol{a}$ は縦ベクトルとみなし，${}^t\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ の転置とする．$\boldsymbol{a}^q$ は $\boldsymbol{a}$ の各成分を q 乗したベクトルを表し，$\boldsymbol{a}^\dagger := {}^t\boldsymbol{a}^q$ と表す．H_n の演算を

$$(\boldsymbol{a}, b)\cdot(\boldsymbol{a}', b') = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}', b + b' + \boldsymbol{a}^\dagger\cdot\boldsymbol{a}')$$

と定めて群とみなす．H_n の中心 $Z(\mathrm{H}_n)$ は $\{(\boldsymbol{0}, b) \mid b \in \mathbb{F}_{q,+}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{q,+}$; $(\boldsymbol{0}, b) \mapsto b$ と同一視され，$\mathrm{H}_n/Z(\mathrm{H}_n) \simeq \mathbb{F}_{q^2}^n$ となるので，H_n は Heisenberg 群である．

$g = (g_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_{q^2})$ に対して $g^\dagger := (g_{j,i}^q)$ として，

$$\mathrm{U}_n(q^2) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_{q^2}) \mid gg^\dagger = g^\dagger g = E_n\}$$

とおく．これは有限ユニタリー群と呼ばれる．$\mathrm{U}_n(q^2)$ が H_n に

$$g\colon (\boldsymbol{a}, b) \mapsto (g\boldsymbol{a}, b)$$

という自己同型で作用する．その半直積を $\mathrm{HU}_n(q^2)$ と略記する．

補題 4.1. *(Stone–Von Neumann の定理)* $\psi \in \mathbb{F}_{q,+}^{\vee} \setminus \{1\}$ をとる．H_n の既約表現 $\rho_{\psi,n}$ で中心 $Z(\mathrm{H}_n) \simeq \mathbb{F}_{q,+}$ に制限すると ψ を含むものが同型を除いてただ一つ存在する．さらに $\dim \rho_{\psi,n} = q^n$ である．

以下の定理は [11] で示されている．

定理 4.2. *([11, Theorems 3.3 and 4.9.2])*

(1) H_n の表現 $\rho_{\psi,n}$ は $\mathrm{HU}_n(q^2)$ 表現 $\widetilde{\rho}_{\psi,n}$ に延長される．

(2) $\widetilde{\rho}_{\psi,n}$ の $\mathrm{U}_n(q^2)$ 表現としての指標は

$$\mathrm{U}_n(q^2) \ni g \mapsto (-1)^n(-q)^{N(g)}$$

で与えられる．ここで，$N(g) := \dim_{\mathbb{F}_{q^2}} \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^2}^n} : \mathbb{F}_{q^2}^n \to \mathbb{F}_{q^2}^n)$ とする．

$\widetilde{\rho}_{\psi,n}|_{\mathrm{U}_n(q^2)}$ を $\mathrm{U}_n(q^2)$ の Weil 表現と呼ぶ.

4.2 Weil 表現の幾何的な構成

前節に現れた代数多様体 (3.4) の特別な場合として

$$X_n \colon y^q + y = x_1^{q+1} + \cdots + x_n^{q+1} \tag{4.1}$$

を考えてみる．話の都合上左辺は $y^q + y$ に置き換えた．この代数多様体は前節に出てきたエルミート曲線の自然な一般化とみなせる．$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1 \ \ldots x_n)$ とすると (4.1) は $y^q + y = {}^t\boldsymbol{x}^q \cdot \boldsymbol{x}$ と書けるため，$\boldsymbol{x} \mapsto g^{-1}\boldsymbol{x}$ によって X_n は $\mathrm{U}_n(q^2)$ の作用を持つ.

H_n は X_n に

$$(\boldsymbol{x}, y) \cdot (\boldsymbol{a}, b) = \bigl(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, y + b + \boldsymbol{a}^{\dagger} \cdot \boldsymbol{x}\bigr)$$

により作用する．$\psi \in \mathbb{F}_{q,+}^{\vee} \setminus \{1\}$ をとる．H_n の中心を $\mathbb{F}_{q,+}$ と同一視する．$H_{\mathrm{c}}^n(X_n)$ の ψ アイソティピック部分を $H_{\mathrm{c}}^n(X_n)[\psi]$ と表す．$H_{\mathrm{c}}^n(X_n)[\psi]$ は，自然に $\mathrm{HU}_n(q^2)$ の表現とみなせる．

定理 4.3. *([17, Theorem 2.5])* 任意の $\psi \in \mathbb{F}_{q,+}^{\vee} \setminus \{1\}$ に対して，$\mathrm{HU}_n(q^2)$ 表現としての同型 $H_{\mathrm{c}}^n(X_n)[\psi] \simeq \widetilde{\rho}_{\psi,n}$ が成り立つ.

証明. $\dim H_{\mathrm{c}}^n(X_n)[\psi] = q^n$ が容易にわかるので，$H_{\mathrm{c}}^n(X_n)[\psi]$ は $\widetilde{\rho}_{\psi,n}$ の指標ひねりになることがわかる．あとは $\mathrm{U}_n(q^2)$ のトーラスの元のコホモロジー上でのトレースが比較的容易に計算できて，指標ひねりの部分が自明になることが示せる． □

定理 4.2 と定理 4.3 によれば，任意の $g \in \mathrm{U}_n(q^2)$ に対して

$$\mathrm{Tr}(g; H_{\mathrm{c}}^n(X_n)[\psi]) = (-1)^n(-q)^{N(g)}$$

がわかる．この指標公式は，幾何的に直接証明することもできる．実際，X_n が $q+1$ 次の Fermat 超曲面の開集合であることに着目して，[12] で示されている跡公式を適用することで示せる．この証明の詳細については [28] を見られたい．上の定理を用いて $\mathrm{U}_n(q)$ の Weil 表現に対して新谷リフトを構成できる ([18])．また mod ℓ Weil 表現を調べるときにも使える ([19]).

この結果の次のような一般化も得られる．q を素数 p のべきとする．$R(x) = \sum_{i=0}^{e} a_i x^{q^i} \in \mathbb{F}_q[x]$ $(a_e \neq 0)$ をとり，任意の偶数 i について $a_i = 0$ と仮定する．

$$X_{R,n} \colon y^q - y = \sum_{i=1}^{n} x_i R(x_i) = \sum_{i=0}^{e} a_i {}^t\boldsymbol{x}^{q^i} \cdot \boldsymbol{x}$$

という代数多様体を考える．仮定より $\mathrm{U}_n(q^2)$ が $X_{R,n}$ に作用する．$\psi \in \mathbb{F}_q^{\vee} \setminus \{1\}$ に対して $H_{\mathrm{c}}^n(X_{R,n})[\psi]$ は $\mathrm{U}_n(q^2)$ の Weil 表現の e 次テンソル積と同型になることが示せる ([29])．$\mathrm{U}_n(q^2)$ 表現 $H_{\mathrm{c}}^n(X_{R,n})[\psi]$ の同型類は $R(x)$ の次数にしかよらない．

明示的局所ラングランズ対応を得ようと思うと，[3], [14], [15], [24] のように，(3.4) のような代数多様体の有限位数の自己同型射のコホモロジー上のトレースを計算する必要がある．そのときに幾何的な方法でトレースを計算するのは困難なことが多いため，上のモデルケースのように Weil 表現と結び付けて表現のトレース公式を適用するのは有用なアイデアではないかと思う．

謝辞

講演および本記事の執筆の機会を下さったプログラム委員の三枝洋一氏（東京大学）・中村健太郎氏（九州大学）・杉山真吾氏（金沢大学）に感謝申し上げる．筆者は日本学術振興会科研費 20K03529, 21H00973 の助成を受けている．この研究は，京都大学にある国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の支援を受けて行われた．

参考文献

[1] C.J. Bushnell and G. Henniart, To an effective local Langlands correspondence, Mem. Am. Math. Soc. 1087, (2014).

[2] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko, The admissible dual of $\mathrm{GL}(N)$ via compact open subgroups, Annals of Mathematics Studies. 129. Princeton University Press, (1993).

[3] M. Boyarchenko and J. Weinstein, Maximal varieties and the local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}(n)$, J. Am. Math. Soc. 29, No. 1, 177–236 (2016).

[4] H. Carayol, Non-abelian Lubin-Tate theory, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions. Vol. II, 1988, Perspect. Math. 11, 15–39 (1990).

[5] L. Carlitz, Some theorems on irreducible reciprocal polynomials over a finite field, J. Reine Angew. Math. 227, 212–220 (1967).

[6] R. Coleman and K. McMurdy, Stable reduction of $X_0(p^3)$, With an Appendix by Everett W. Howe, Algebra Number Theory 4, No. 4, 357–431 (2010).

[7] P. Deligne and G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, Ann. Math. (2) 103, 103–161 (1976).

[8] P. Deligne and P. Rapoport, Les schémas de modules de courbes elliptiques, Modular Functions of one Variable II, Lect. Notes Math. 349, 143–316 (1973).

[9] B. Edixhoven, Minimal resolution and stable reduction of $X_0(N)$, Ann. Inst. Fourier 40, No. 1, 31–67 (1990).

[10] G. van der Geer and M. van der Vlugt, Reed-Muller codes and supersingular curves. I, Compos. Math. 84, No. 3, 333–367 (1992).

[11] P. Gérardin, Weil representations associated to finite fields, J. Algebra 46, 54–101 (1977).

[12] R. Hotta and K. Matsui, On a lemma of Tate-Thompson, Hiroshima Math. J. 8, 255–268 (1978).

[13] N. Imai and T. Tsushima, Stable models of Lubin-Tate curves with level three, Nagoya Math. J. 225, 100–151 (2017).

[14] N. Imai and T. Tsushima, Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple supercuspidal representations. I: Tame case, Int. Math. Res. Not. 2020, No. 22, 8251–8291 (2020).

[15] N. Imai and T. Tsushima, Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple supercuspidal representations. II: Wild case, Math. Ann. 380, No. 1-2, 751–788 (2021).

[16] N. Imai and T. Tsushima, Local Galois representations of Swan conductor one, Pac. J. Math. 326, No. 1, 37–83 (2023).

[17] N. Imai and T. Tsushima, Geometric construction of Heisenberg-Weil representations for finite unitary groups and Howe correspondences, Eur. J. Math. 9, No. 2, Paper No. 31, 34 p. (2023).

[18] N. Imai and T. Tsushima, Shintani lifts for Weil representations of unitary groups over finite fields, Math. Res. Lett. 31, No. 5, 1471–1491 (2024).

[19] N. Imai and T. Tsushima, Mod ℓ Weil representations and Deligne-Lusztig inductions for unitary groups, to appear in Representation Theory.

[20] T. Ito, R. Tatematsu and T. Tsushima, Criteria of maximality and minimality of van der Geer-van der Vlugt curves, arXiv:2412.00902v2 [math.NT] (2024).

[21] D. Takeuchi, Quadratic ℓ-adic sheaf and its Heisenberg group, preprint, arXiv:2305.15164 [math.NT] (2023).

[22] D. Takeuchi and T. Tsushima, Gauss sums and van der Geer-van der Vlugt curves, Bull. Lond. Math. Soc. 56, No. 2, 602–623 (2024).

[23] K. Tokimoto, Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and special cases of the local Langlands correspondence in positive characteristic (announcement), RIMS Kôkyûroku Bessatsu B72, 147–159 (2018).

[24] K. Tokimoto, Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and special cases of the local Langlands correspondence, Math. Ann. 377, No. 3-4, 1339–1425 (2020).

[25] T. Tsushima, Stable reduction of $X_0(p^4)$, J. Reine Angew. Math. 707, 1–43 (2015).

[26] T. Tsushima, Good reduction of affinoids in the Lubin-Tate curve in even equal characteristic. II, Res. Number Theory 5, No. 3, Paper No. 28, 28 p. (2019).

[27] T. Tsushima, Good reduction of affinoids in the Lubin-Tate curve in even equal characteristic. I, J. Number Theory 214, 414–439 (2020).

[28] T. Tsushima, On character formulae for Weil representations for unitary groups over finite fields, Commun. Algebra 49, No. 11, 4679–4686 (2021).

[29] T. Tsushima, Trace formulae for actions of finite unitary groups on cohomology of Artin-Schreier varieties, J. Algebra 638, 129–152 (2024).

[30] T. Tsushima, Local Galois representations associated to additive polynomials, Manuscr. Math. 174, No. 3-4, 1151–1182 (2024).

[31] T. Yoshida, On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles, Advanced Studies in Pure Mathematics 58, 361–402 (2010).

[32] J. Weinstein, Semistable models for modular curves of arbitrary level, Invent. Math. 205, No. 2, 459–526 (2016).