

# Equivalent classes of dessins d'enfants with two or three vertices

上智大学 堀江まどか

Madoka Horie

Graduate School of Science and Technology, Sophia University

## Abstract

Dessin d'enfants とは, コンパクト Riemann 面上の有限グラフであり, Riemann 面の構造と密接な関係があることが知られている. さらに,  $N$  本の辺からなる dessin d'enfants は  $N$  次対称群の 2 つの元のペアとして扱うことが可能であり, それぞれの同型類の間にある 1 対 1 の対応から興味深い組み合わせ論的結果が得られる. 本論は, この dessin d'enfants の中でも, 2 頂点と 3 頂点という条件を持つ dessin d'enfants の同型類の数え上げについて考察した結果得られた公式を報告するものである.

## 1 Introduction

この節では dessin d'enfants の定義や基本的な事項について述べる. Dessin d'enfants について成り立ちや細部の証明については例えば [3], [5], [6], [8], [10]などを参照されたい. Dessin d'enfants の定義をする前に, より理解を深めるために重要な定理を紹介しておく.  $X$  をコンパクト Riemann 面とする.

**Theorem 1** (Belyi, [2, Theorem 1]). 以下の 2 条件は同値である.

1.  $X$  は  $\overline{\mathbb{Q}}$  上定義される.
2. 射  $\beta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  が多くとも 3 点  $(0, 1, \infty)$  のみで分岐するように定義できる.

この定理の 2 つめの条件を満たす射  $\beta$  を Belyi function と呼び, この  $\beta$  と  $X$  の組  $(X, \beta)$  を Belyi pair と呼ぶことにする. 次に定義を述べる dessin d'enfants は Belyi function の存在と密接な関係があるものである.

**Definition 1.**  $(X, D)$  が dessin d'enfants (もしくは単に dessin) であるとは, 次の 4 つの条件を満たすことをいう:

1.  $X$  はコンパクト Riemann 面である;
2.  $D$  は有限本の辺からなる  $X$  上の連結な 2 部グラフである;  
(ここで言う 2 部グラフ  $(V, E)$  とは,  $V$  (頂点全体の集合) と  $E$  (辺全体の集合) のペアからなり,  $V$  の元は 2 種類の共通部分を持たない類に分類され (白点と黒点と呼ぶ),  $E$  の各元はそれぞれ端点として異なる類に属する頂点を 1 つずつもつ.)

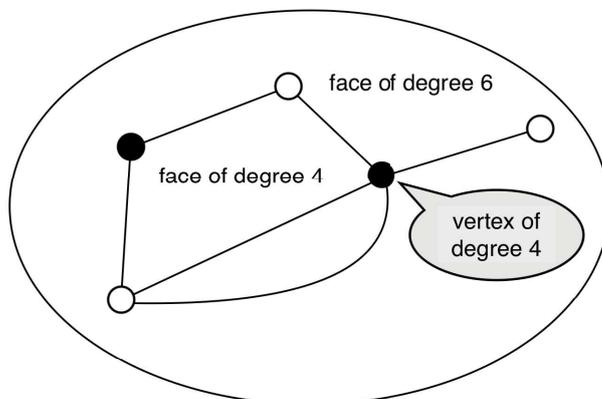


Figure 1: dessin の例

3.  $D$  の任意の辺は頂点を除いて交わらない;
4.  $X \setminus D$  の各連結部分は  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  に同相である.

任意の Belyi pair  $(X, \beta)$  に対して,  $\beta^{-1}([0, 1])$  は dessin であり, 特に白点全体は  $\beta^{-1}(0)$ , 黒点全体は  $\beta^{-1}(1)$  とすることができる. Belyi の定理より, dessin が存在するようなコンパクト Riemann 面は必ず  $\mathbb{Q}$  上定義されることがわかる. 一般に与えられた dessin から, その dessin がのる Riemann 面の定義方程式を特定することも興味深い問題の一つである ([1], [11], [12]). Belyi 関数の具体的計算方法については文献 [7] の Appendix も参照されたい. 次に, dessin について degree というものを定義しておく.

**Remark 1.** Dessin が  $n$  本の辺からなるとき, その dessin を  $n$  次の dessin という. さらに任意の dessin について, 面の degree とは, その面を囲う辺の総数をいう. 頂点の degree とは, その頂点を端点にもつ辺の総数をいう.

ここで注意しておきたい点は, 2 部グラフの性質より, dessin の面の degree は常に偶数となることである.

**Example 1.** Figure 1 は Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の dessin である. この dessin は degree がそれぞれ 1, 2, 3 であるような白点を 1 つずつ持ち, degree が 2, 4 であるような黒点を 1 つずつを持つ. また, 面は 3 つあるが, その degree はそれぞれ 2, 4, 6 である.

次に dessin の同型について述べる.

**Definition 2.** 2 つの dessin  $(X, D)$  と  $(X', D')$  が同型であることを, 次で定義する.  $X$  から  $X'$  への Riemann 面の同型で,  $f(D) = D'$  かつ, 各頂点の色 (白黒) を変えないものが存在する. さらに,  $(X, D) = (X', D')$  であるとき,  $f$  を自己同型と呼び,  $(X, D)$  の自己同型全体の集合を  $\text{Aut}(X, D)$  と書く.

特にこの dessin の自己同型群について, 次のことを注意しておきたい.  $D_N$  を  $N$  の約数全体の集合とする.

**Remark 2.**  $N$  本の辺からなる dessin  $(X, D)$  に対して,

$$|\text{Aut}(X, D)| \in D_N$$

が成り立つ.

一般の多様体の同型類の数え上げについての研究として [4], [9] などがあげられるが, dessin の同型類の数え上げも興味深い研究対象である.

## 2 Dessins with two vertices

この節で紹介する 2 つの主結果は dessin の同型類をいくつかの条件に絞って数え上げた明示公式についてであり, 論文 [7] として掲載されたものである. まず 2 頂点からなる dessin について考える. 先に述べた定義などから, 2 頂点からなる dessin とは, 白点 1 つ, 黒点 1 つから成り, さらに全ての辺は, この 2 頂点を必ず端点に持つものであることを注意しておく. ここで主結果を述べるために, 記号をいくつか導入する.  $r \in D_N$  とする.  $\mathfrak{D}_1(N, L, r)$  を  $N$  本の辺,  $L$  個の面, 2 個の頂点からなり, 自己同型群の位数が  $r$  である dessin の同型類全体の集合と定める. また,  $\mathfrak{D}_2(N, h, r)$  を  $N$  本の辺, degree 2 の面を  $h$  個持ち, 2 個の頂点からなり, 自己同型群の位数が  $r$  である dessin の同型類全体の集合と定める. 実際は次の例のようなものを扱っている.

**Example 2.**  $N$  が奇素数のとき,  $\mathfrak{D}_1(N, 1, N)$  の代表元の全体は次からなる:

$$(X_t, \beta_t^{-1}([0, 1])), \quad (1 \leq t \leq N-2);$$

- $X_t : x(1-x)^t = y^N;$
- $\beta_t : X_t \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad (x, y) \mapsto x;$
- $\text{Aut}(X_t, \beta_t^{-1}([0, 1])) = \langle \sigma \rangle, \quad \sigma : (x, y) \mapsto (x, e^{2\pi\sqrt{-1}/N}y).$

ここで, この dessin の頂点は, 白点全体の集合を  $\beta_t^{-1}(0)$ , 黒点全体の集合を  $\beta_t^{-1}(1)$  により与えられる.

先ほど定義した  $\mathfrak{D}_1(N, L, r)$  と  $\mathfrak{D}_2(N, h, r)$  の個数を数え上げた明示公式が主結果 (以下に示す Theorem 2 と Theorem 3) である.

**Theorem 2.** 次の公式が成り立つ:

$$|\mathfrak{D}_1(N, L, r)| = \frac{r}{N} \sum_{n \in D_{N/r}} \mu\left(\frac{N}{nr}\right) \Psi_{N, L, n}.$$

ここで  $\mu$  は Möbius function とする. また, 記号  $\Psi_{N, L, n}$  の定義は次の通りである. まず,  $P_m := \{p \in D_m \mid p \text{ is a prime}\}$  とおき,

$$\Lambda^{(n)}(N, L) := \left\{ \lambda = (l_1, \dots, l_\nu) \left| \begin{array}{l} \nu \in \mathbb{N}, l_1, \dots, l_\nu \in D_{N/n}, \\ l_1 \geq \dots \geq l_\nu, \\ l_1 + \dots + l_\nu = L \end{array} \right. \right\} \quad (n \in D_N)$$

と定義する.  $\lambda = (l_1, \dots, l_\nu) \in \Lambda^{(n)}$  と  $p \in P_{N/n}$  に対し,

$$i_0(n, \lambda, p) := \#\{j \in \{1, \dots, \nu\} \mid \gcd(l_j, p) = 1\},$$

$$i(n, \lambda, p) := \#\{j \in \{1, \dots, \nu\} \mid pl_j \in D_{N/n}\}$$

と定める。さらに,

$$A_{n, \lambda, p} := \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{i(n, \lambda, p) - i_0(n, \lambda, p)} \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{i_0(n, \lambda, p) + 1} - \left(-\frac{1}{p}\right)^{i_0(n, \lambda, p) + 1} \right\},$$

$$\Delta_\lambda = \prod_{j=1}^{\nu} l_j,$$

$$B_\lambda = \frac{\nu!}{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_L! \Delta_\lambda} \text{ (for } k \leq L, \nu_k := \#\{j \in \{1, \dots, \nu\} \mid l_j = k\}),$$

$$\Lambda_m^{(n)} := \{\lambda = (l_1, \dots, l_m) \in \Lambda^{(n)}(N, L)\},$$

$$f_m^{(n)} := (1 - (-1)^m) \mathfrak{s}_m(1, 2, \dots, n) = \begin{cases} 2\mathfrak{s}_m(1, 2, \dots, n) & \text{if } 2 \nmid m, \\ 0 & \text{if } 2 \mid m, \end{cases}$$

(但し,  $\mathfrak{s}_m(\xi_1, \dots, \xi_n)$  は  $m$  次基本対称多項式とする.)

$r \in D_N, n \in D_{N/r}$ , に対し,

$$\Psi_{N, L, n} := \frac{N^n}{n^{n+1}(n+1)} \sum_{m=1}^{\min(n, L)} f_{n-m+1}^{(n)} \sum_{\lambda \in \Lambda_m^{(n)}} B_\lambda \prod_{p \in P_{N/n}} A_{n, \lambda, p}$$

と定める。

**Theorem 3.** 次の公式が成り立つ:

$$|\mathfrak{D}_2(N, h, r)| = \frac{r}{N} \sum_{n \in D_{N, h, N/r}^*} \mu\left(\frac{N}{nr}\right) \Upsilon_{N, h, n}.$$

但し,  $D_{N, h, r}^* = \{n \in D_r \mid N/n \in D_h\}$  とし, 記号  $\Upsilon_{N, h, n}$  の定義は以下の通りである.  $j \leq n$  なる  $(j, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  に対し,

$$\Sigma_j^{(n)} := \frac{n!}{(j-1)!} \left\{ \sum_{m=0}^{n-j-1} \frac{(-1)^m}{m!(j+m)(n-j-m)} \right\} + (-1)^{n-j} \binom{n-1}{j-1} - 1,$$

$$\Sigma_0^{(n)} := (n-1)! - 1$$

と定める。

$\Upsilon_{N, h, n}$

$$:= \left\{ \sum_{m=hn/N}^{n-1} \binom{m}{hn/N} \frac{\varphi(N/n) N^{n-m-1}}{n^{n-m-1}} \left(\frac{N}{n} - 1\right)^{m-hn/N} \left(\Sigma_m^{(n)} - \Sigma_{m+1}^{(n)}\right) \right\} \\ + \binom{n}{hn/N} \left\{ \frac{\varphi(N/n)n}{N} \left( \left(\frac{N}{n} - 1\right)^{n-hn/N} - (-1)^{n-hn/N} \right) + (-1)^{n-hn/N} \right\}.$$

ここで,  $\varphi$  は Euler's totient function とする。

$N$	$L$	$r$	$ \mathfrak{D}_1 $	$N$	$L$	$r$	$ \mathfrak{D}_1 $	$N$	$L$	$r$	$ \mathfrak{D}_1 $
2	2	1	0	6	2	1	13	7	7	1	0
	2	2	1		2	2	1		7	7	7
3	1	1	0		2	3	1	8	2	1	378
	1	3	1		2	6	1		2	2	4
	3	1	0		4	1	5		2	4	1
	3	3	1		4	2	1		2	8	2
4	2	1	1		4	3	1		4	1	231
	2	2	0		4	6	0		4	2	0
	2	4	1		6	1	0		4	4	0
	4	1	0		6	2	0		4	8	1
	4	2	0		6	3	0		6	1	15
	4	4	1		6	6	1		6	2	1
5	1	1	1	7	1	1	25		6	4	1
	1	5	3		1	7	35		6	8	0
	3	1	3		3	1	67	8	1	0	
	3	5	0		3	7	0	8	2	0	
	5	1	0		5	1	10	8	4	0	
	5	5	1		5	7	0	8	8	1	

Table 1:  $|\mathfrak{D}_1(N, L, r)|$

**Example 3.** Theorem 2 と Theorem 3 について, 簡単に計算できる結果を幾つかまとめる.

- $|\mathfrak{D}_1(N, L, r)| = 0$  ( $L \not\equiv N \pmod{2}$ ).
- $|\mathfrak{D}_2(N, N, N)| = 1$ .
- $|\mathfrak{D}_2(N, N, r)| = 0$  ( $r \neq N$ ).
- $|\mathfrak{D}_2(N, N-1, r)| = |\mathfrak{D}_2(N, N-2, r)| = 0$ .

これらの特殊な場合を除いて Theorem 2 と Theorem 3 の公式に実際に値を代入した計算結果を, Table 1 と Table 2 にまとめておく.

### 3 Dessin with three vertices

さらに頂点数を1つ増やして, 3頂点からなる dessin についても少し考察する. まず同型の定義より, 3頂点からなる dessin は白点と黒点を入れ替えたものは同型にはならないことに注意しておく(2). 本稿では3つの頂点を白点1つ, 黒点2つと決めておくことにする. 今,  $2 \leq N$  として,  $p$  は1または素数とする.  $\mathfrak{D}_3(N, p)$  を  $N$  本の辺, 3個の頂点(白点1つ, 黒点2つ)からなり, 特に2つある黒点のうち, 低い方の degree が  $p$  であるような dessin の同型類全体の集合と定める.

$N$	$h$	$r$	$ \mathfrak{D}_2 $
3	0	1	0
	0	3	1
4	0	1	0
	0	2	0
	0	4	1
	1	1	1
	1	2	0
	1	4	0
5	0	1	1
	0	5	3
	1	1	1
	1	5	0
	2	1	2
	2	5	0
6	0	1	5
	0	2	1

$N$	$h$	$r$	$ \mathfrak{D}_2 $
6	0	3	1
	0	6	1
	1	1	8
	1	2	0
	1	3	0
	1	6	0
	2	1	2
	2	2	1
	2	3	0
	2	6	0
	3	1	3
	3	2	0
7	0	1	32
	0	7	5

$N$	$h$	$r$	$ \mathfrak{D}_2 $
7	1	1	36
	1	7	0
	2	1	24
	2	7	0
	3	1	5
	3	7	0
	4	1	5
	4	7	0
	0	1	200
	0	2	5
8	0	4	1
	0	8	3
	1	1	229
	1	2	0
	1	4	0
	1	8	0
	1	8	0

$N$	$h$	$r$	$ \mathfrak{D}_2 $
8	2	1	124
	2	2	4
	2	4	0
	2	8	0
	3	1	56
	3	2	0
	3	4	0
	3	8	0
	4	1	8
	4	2	1
	4	4	1
	4	8	0
5	1	7	
5	2	0	
5	4	0	
5	8	0	

Table 2:  $|\mathfrak{D}_2(N, h, r)|$

Proposition 1.

$$|\mathfrak{D}_3(N, p)| = \begin{cases} \frac{1}{p} \left\{ \binom{N-1}{p-1} (p-1)! (N-p-1)! \right\} & (\text{if } \gcd(N, p) = 1) \\ \frac{1}{p} \left\{ \binom{N-1}{p-1} (p-1)! (N-p-1)! + (p-1)^3 p^{\left(\frac{N}{p}-2\right)} \right\} & (\text{if } \gcd(N, p) = p \neq 1, N \neq 2p) \\ \frac{1}{p} \left\{ \binom{N-1}{p-1} (p-1)! (N-p-1)! - (p-1)^2 p^{\left(\frac{N}{p}-2\right)} \right\} \\ \quad + \frac{1}{2} (p-1)^2 p^{\left(\frac{N}{p}-2\right)} - \frac{1}{2} \{(p-1)!\}^2 + (p-1)! & (\text{if } \gcd(N, p) = p \neq 1, N = 2p) \end{cases}$$

## 4 Basic facts

この節では主結果を導くために用いた重要な事実を紹介する。(詳しくは [5] を参照).  $S_N$  を  $N$  次対称群とし,  $N$  本の辺からなる dessin  $D_N$  を次のように  $S_N$  の 2 つの元と対応させることにする. まず,  $D_N$  の各辺を 1 から  $N$  まで番号をつける (番号が被らなければ付け方は自由で良い). さらに, 各頂点毎にその頂点に属する辺の番号を反時計回りに表記する. この表記をそれぞれ 1 つの cycle として, 全ての白点周りの cycle 達を合成したものを  $\sigma_0$  とする. 2 部グラフの性質上, 白点のみに限れば各 cycle が独立しているため, 合成してもそれぞれの頂点としての情報は崩れない. このとき  $\sigma_0 \in S_N$  とみなせる. 同様に  $\sigma_1$  を黒点についての cycle 達の合成すると,  $\sigma_0, \sigma_1 \in S_N$  である. ここで得られ

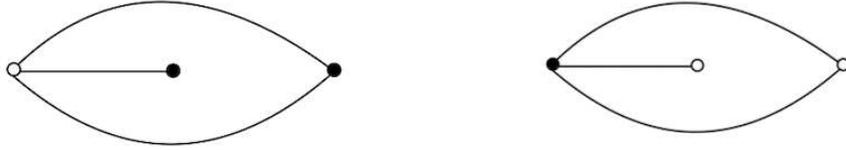


Figure 2: 頂点の色を入れ替えた dessin

た  $S_N$  の 2 つの元のペア  $(\sigma_0, \sigma_1)$  を  $D_N$  の permutation representation pair と呼ぶことにする. この permutation representation pair について次が成り立つ.

**Proposition 2.**  $(\sigma, \tau) (\in S_N \times S_N)$  を permutation representation pair とするような  $N$  本の辺からなる dessin が存在することは,  $\sigma$  と  $\tau$  から生成される群  $\langle \sigma, \tau \rangle$  が  $S_N$  の transitive subgroup であることと同値である.

これにより,  $S_N$  のペアから dessin の存在を確認することができる. さらに, permutation representation pair の同値関係を次で定義する.

**Definition 3.** 2 つの permutation representation pair  $(\sigma, \tau)$  と  $(\sigma', \tau')$  が同値であるとは, ある  $S_N$  の元  $\rho$  で,  $(\sigma, \tau) = (\rho\sigma'\rho^{-1}, \rho\tau'\rho^{-1})$  を満たすものが存在するときを言う.

さらに,  $P(N)$  を  $S_N \times S_N$  の元からなる permutation representation pair の同値類の全体,  $D(N)$  を  $N$  本の辺からなる dessin の同型類の全体と定義すれば, 次がいえる.

**Proposition 3.**

$$\exists \iota : D(N) \rightarrow P(N) : \text{自然な 1 対 1 の対応}$$

これにより, permutation representation pair の同型類を数えることにより, dessin の同型類を数え上げることができる. 特に,  $S_N$  の元として頂点や面の性質がどのように現れるか, 注意しておきたい点を次にまとめる.

**Remark 3.**  $d \in D(N)$  とし,  $(\sigma, \tau) \in P(N)$  を  $\iota(d) = (\sigma, \tau)$  となるようにとると, 次が成り立つ.

1.  $d$  の degree  $m$  である白点の数 =  $\sigma$  の  $m$ -cycle の数
2.  $d$  の degree  $m$  である黒点の数 =  $\tau$  の  $m$ -cycle の数
3.  $d$  の degree  $2m$  である面の数  $\tau\sigma$  の  $m$ -cycle の数
4.  $\text{Aut}(d) \simeq C_{S_N}(\langle \sigma, \tau \rangle) := \{\rho \in S_N \mid \rho\tau' = \tau'\rho, \forall \tau' \in \langle \sigma, \tau \rangle\}$

この後の節で述べる例では, 実際に幾つかの dessin を図示するが, その前に多様体を考えるときに重要となる種数について, 次の注意をまとめておく.

**Remark 4.** *Riemann-Hurwitz* の公式により, *dessin* の種数  $g$  は以下の式を満たすことがわかる.

$$2 - 2g = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

つまり, Remark 3 と合わせると, permutation representation pair の情報だけでも種数を直ちに導くことができるのである. 本論で紹介した Theorem 2 と Theorem 3, Proposition 1 は, この permutation representation pair として *dessin* を扱い,  $S_N$  の性質を用いて導いたものである. (*Dessin* や permutation representation pair の詳細については [5] を, 主結果の証明の詳細については [7] を参照.)

## 5 Examples

**Example 4.** Theorem 2 の  $|\mathfrak{D}_1(N, L, r)|$  について  $N = 4, L = 2$  とする.  $r$  は  $N$  の約数なので,  $r = 1, 2$  もしくは  $4$  である. 今, Theorem 2 の公式を使うと,

$$|\mathfrak{D}_1(4, 2, 1)| = 1, |\mathfrak{D}_1(4, 2, 2)| = 0, |\mathfrak{D}_1(4, 2, 4)| = 1$$

である. これらの代表元は Figure 3 の *dessin* である. 特に,  $r = 1$  の場合の *dessin* は上のものである.

**Example 5.** Theorem 3 の  $|\mathfrak{D}_2(N, h, r)|$  について  $N = 5, h = 2$  とする.  $r$  は  $N$  の約数なので,  $1$  または  $5$  である. 今, Theorem 3 の公式を使うと,

$$|\mathfrak{D}_2(5, 2, 1)| = 2,$$

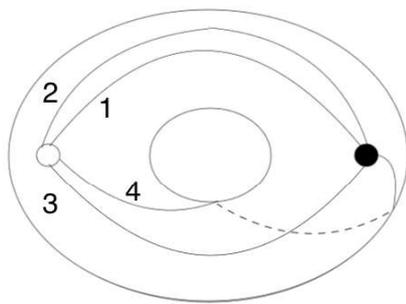
$$|\mathfrak{D}_2(5, 2, 5)| = 0$$

である. これらの代表元は Figure 4 の *dessin* たちである.

**Example 6.** Proposition 1 の  $|\mathfrak{D}_3(N, p)|$  について  $N = 5, h = 2$  とする.

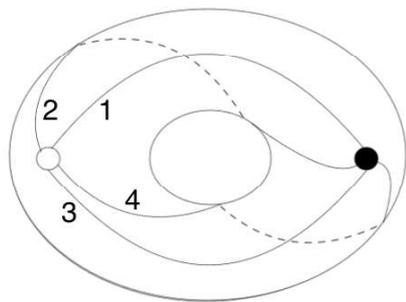
$$|\mathfrak{D}_3(N, p)| = 4$$

である. この 4 つの *dessin* は, Figure 5 にある通りである.



$$(\sigma, \tau) = ((1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3\ 4\ 2))$$

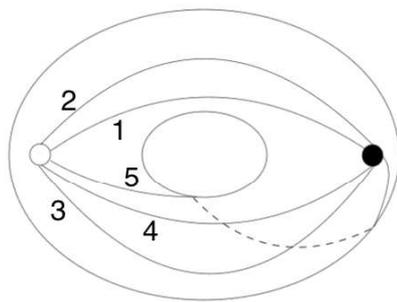
$$\tau\sigma = (1)(2\ 4\ 3)$$



$$(\sigma, \tau) = ((1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4))$$

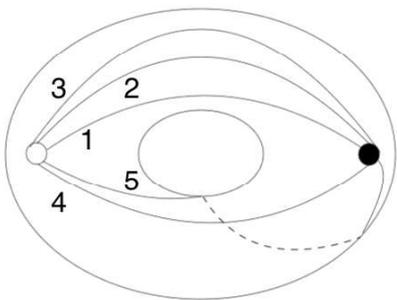
$$\tau\sigma = (1\ 3)(2\ 4)$$

**Figure 3:**  $|\mathcal{D}_1(5, 1, 1)|$  と  $|\mathcal{D}_1(5, 1, 5)|$



$$(\sigma, \tau) = ((1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 4\ 3\ 5\ 2))$$

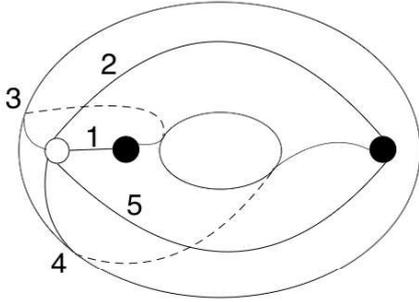
$$\tau\sigma = (1)(2\ 5\ 4)(3)$$



$$(\sigma, \tau) = ((1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 4\ 5\ 3\ 2))$$

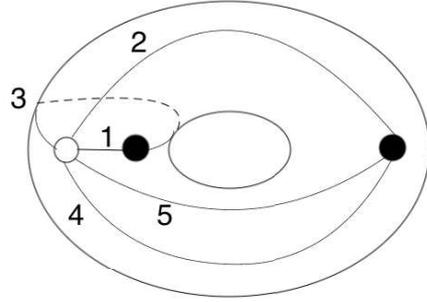
$$\tau\sigma = (1)(2)(3\ 5\ 4)$$

**Figure 4:**  $|\mathcal{Q}_2(5, 2, 1)|$



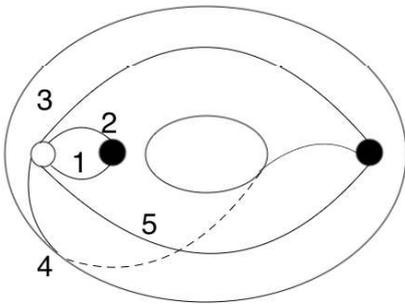
$$(\sigma, \tau) = ((1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 3)(2\ 4\ 5))$$

$$\tau\sigma = (1\ 4\ 2)(3\ 5)$$



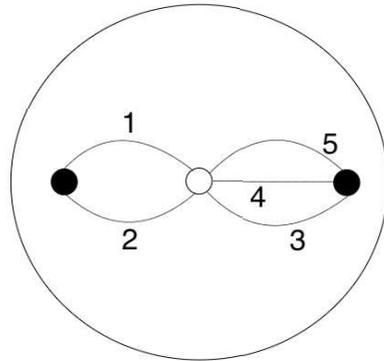
$$(\sigma, \tau) = ((1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 3)(2\ 5\ 4))$$

$$\tau\sigma = (1\ 5\ 3\ 2)(4)$$



$$(\sigma, \tau) = ((1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 2)(3\ 4\ 5))$$

$$\tau\sigma = (1)(2\ 4\ 3\ 5)$$



$$(\sigma, \tau) = ((1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 2)(3\ 5\ 4))$$

$$\tau\sigma = (1)(2\ 5)(3)(4)$$

Figure 5:  $|\mathcal{D}_3(5, 2)|$

## Acknowledgements

今回、「代数的整数論とその周辺 2024」にて発表の機会を与えてくださったプログラム委員会の三枝 洋一 先生, 中村 健太郎 先生, 杉山 真吾 先生に感謝の意を表します. また, この研究集会への参加や, 本稿作成についてのアドバイスをくださった山内 卓也 先生と角皆 宏 先生に感謝いたします.

## References

- [1] N. M. Adrianov and G. B. Shabat, Calculating Complete Lists of Belyi Pairs, *Mathematics* 2022, 10(2), 258; <https://doi.org/10.3390/math10020258>.
- [2] G. V. Belyi. A new proof of the three-point theorem. *Mat Sb.*, 193 (3): 21–24, 2002.
- [3] B. Birch, Noncongruence subgroups, covers and drawings. *The Grothendieck theory of dessins d'enfants* (Luminy, 1993), 25–46.
- [4] M. A. Deryagina and A. D. Mednyh, On the enumeration of circular maps with given number of edges, *Siberian Math. J.*, Vol. 54, No. 4, 624–639, (2013).
- [5] E. Gironde and G. González-Diez, *Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins D'enfants*, London Math. Soc. Student Texts, vol. 79, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [6] A. Grothendieck, Esquisse d'un programme. In *Geometric Galois Action, vol.1*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. 5-48 (English translation, pp. 243-284).
- [7] M. Horie, Equivalent classes of dessins d'enfants with two vertices, *Math. J. Okayama Univ.* **66** (2024), 1–30.
- [8] T. Komatsu, Belyi の定理、pdessins d'enfants, 第 12 回 整数論サマースクール報告集「基本群と Galois 表現」, 87–96.
- [9] A. D. Mednykh, Nonequivalent coverings of Riemann surfaces with a given ramification type. *Sib. Mat. Zh.* vol.25 (1984) 120–142. [Trans. Amer. Math. Soc. **107** (1963), 320–346; MR0148900].
- [10] L. Zapponi, What is a dessin d'enfant?, *Notice of the AMS*, Vol. 50, No. 7, 788–789 (2003).
- [11] M. Musty, S. Schiavone, J. Sijsling, Jeroen, and J. Voight, A database of Belyi maps. *Proceedings of the Thirteenth Algorithmic Number Theory Symposium*, 375–392, Open Book Ser., 2, Math. Sci. Publ., Berkeley, CA, 2019.
- [12] J. Sijsling and J. Voight, On computing Belyi maps. *Numéro consacré au trimestre "Méthodes arithmétiques et applications"*, automne 2013, 73–131, *Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie* Nr., 2014/1, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2014.