Distinguished 表現と重複度公式

(Distinguished representations and multiplicity formulae)

鈴木美裕 (Miyu Suzuki)*

Abstract

This is a survey article on recent development in research on distinguished representations of p-adic reductive groups. We focus on three specific periods, namely Shalika period, unitary period, and local Gan-Gross-Prasad conjecture and explain the known results on classification of representations with those periods. We also explain multiplicity formulae for these periods established by Beuzart-Plessis, Wan and Waldspurger.

1. はじめに

1.1 導入

局所体上の簡約代数群の表現が非自明な周期をもつとき, その表現は **distinguished 表現** (格別表現) であるという. 本稿では, distinguished 表現に関する研究の最近の進展について概括する.

まずはじめに, おおまかな問題設定の説明のために, 一般の群 G とその表現 (π, V) を考える. ただし, 本稿全体を通して表現とは複素ベクトル空間 V と群準同型 $\pi: G \to \mathrm{GL}(V)$ の組とする. また, H を G の部分群とし, $\chi: H \to \mathbb{C}^\times$ を H の指標 (1 次元表現) とする. このとき, 線型形式 $\ell: V \to \mathbb{C}$ であって, 任意の $h \in H$, $v \in V$ に対して

$$\ell(\pi(h))v = \chi(h)\ell(v)$$

を満たすものを表現 π の (H,χ)-**周期**といい, その全体のなすベクトル空間を $\mathrm{Hom}_H(\pi,\chi)$ と表わす. また, $\mathrm{Hom}_H(\pi,\chi) \neq 0$ のとき, π は (H,χ)-**distinguished** であるという. 指標 χ が自明指標のときは, 単に H-周期, H-distinguished といい, $\mathrm{Hom}_H(\pi,\mathbb{C})$ と表わす.

既約表現 π が与えられたとき, π が (H,χ)-distinguished であるための必要十分条件を記述したい. 考える群 G が局所体上で定義された簡約代数群である場合, このような表現論的な問題の答えに数論的な不変量が関係するという現象が多数発見されている. 実際には次のような状況を考える:

条件 1

- F は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体,
- G は F 上定義された簡約代数群,

* Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University
Kitashirakawa Oiwake-cho, Sakyo-ku, Kyoto 606-8502, Japan
e-mail: `suzuki.miyu.4c@kyoto-u.ac.jp`
Supported by JSPS KAKENHI Grant Number 22K13891 and 23K20785.

- (π, V) は $G(F)$ のスムーズ表現,
- H は G の**球部分群 (spherical subgroup)**, *i.e.*
  - H は F 上定義された (代数群としての) G の閉部分群,
  - G の ($\bar{F}$ 上定義された) Borel 部分群 B で, BH が G の Zariski 開集合となるものが存在する.

以下, 単に「$G(F)$ の表現」といえばスムーズ表現のこととし, $G(F)$ の既約表現の同型類の集合を $\mathrm{Irr}(G(F))$ と表わすことにする.

注意 2 部分群 H が G の球部分群ならば, 任意の $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ と $H(F)$ の指標 χ に対して $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \chi)$ は有限次元であると (非明示的に) 予想されている.

この性質は, 例えば H が G の対称部分群であるとき *i.e.* H が G のある対合の固定部分群であるときには満たされることが, [9, Theorem 4.5] で証明された. 本稿で言及する具体的な (G, H) の組は, いずれもこの性質を満たしていることが知られている.

このような設定で, 表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ が $(H(F), \chi)$-distinguished 表現であるための必要十分条件を与えるという形式の予想/定理が多数ある. 既存の研究の多くは, 特定の (G, H) の組に対して個別の議論を展開していて, それらの間に共通項を見出すことも, 適切な一般化を定式化することも, 容易ではない.

本稿では, こうした研究の全体を網羅的に紹介するのではなく, 既存の結果を 3 つの系統に類型化した上で, それぞれの系統に代表的な例を紹介する. distinguished 表現の分類に関する既存の結果の大部分は, 次の 3 種類の条件のいずれかで分類されるという主張である:

(A) L-パラメータの像に関する条件, または L-因子の極に関する条件.
(B) 関手性リフト (functorial lift) に関する条件.
(C) ルート数 (ε-因子) の満たすある関係式.

注意 3 このような類型化は筆者の個人的な視点によるもので, 数学的に明確な基準による分類ではなく, このような類別があるという共通理解が専門家たちの間にあるわけでもない. あくまで本稿における説明のため便宜的に導入した分類に過ぎない.

ここでは, (A) 型, (B) 型, (C) 型のそれぞれについて代表的な例を 1 つずつ紹介する. 扱うのは以下の 3 つの例である:

(A) Shalika 周期をもつ $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ の表現の分類.
(B) ユニタリ周期をもつ $\mathrm{GL}_n(E)$ の表現の分類 (と Prasad の予想).
(C) $\mathrm{SO}_{n+1}(F) \times \mathrm{SO}_n(F)$ の局所 Gan-Gross-Prasad 予想.

注意 4 これらの予想/定理に統一的な解釈を与える理論を構築しようという試みは, 主に Ben-Zvi, Sakellaridis および Venkatesh により近年特に精力的に推し進められている. これについては, [32], [8] を参照.

しかしながら, 本稿で紹介する distinguished 表現の特徴づけに関する予想/定理を包含するような一般論といえるものは, まだ見つかっていないようである.

1.2 準備

具体例を説明する前に, 局所 Langlands 対応/予想について必要事項を簡単にまとめておく. 詳細は [16], [11, §9, §10] などを参照.

群 $G(F)$ の既約表現は, L-パラメータとよばれる (いくつかの条件を満たす) 群準同型 $\phi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ によって大まかに "パラメトライズされる" と予想されている. ここで, W_F は F の Weil 群を表わし, 直積群 $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ を F の Weil-Deligne 群という. また, ${}^LG = \widehat{G} \rtimes W_F$ は G の L-群といい, $\widehat{G}$ は G の Langlands 双対群とよばれる $\mathbb{C}$ 上の簡約代数群である.

2 つの L-パラメータは, $\widehat{G}$ の元による共役で移り合うとき同値であるという. 群 $G(F)$ の L-パラメータの同値類の集合を $\Phi_F(G)$ と表わすことにする.

特に $G = \mathrm{GL}_n$ の場合 $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ であり, $\mathrm{GL}_n(F)$ の L-パラメータは群準同型 $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とみなすことができる. 以下では, $\mathrm{GL}_n(F)$ の L-パラメータは $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に値をもつものとする. このとき, $\mathrm{GL}_n(F)$ の Langlands 対応とは次のような定理である.

定理 5（$\mathrm{GL}_n(F)$ **の局所 Langlands 対応, [15], [16]**） 全単射

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n(F)) \xrightarrow{\sim} \Phi_F(\mathrm{GL}_n)$$

で, 様々な性質を満たすものが存在する. 表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対応する L-パラメータを ϕ_π と表わすことにする.

もちろん単に「全単射が存在する」というだけの主張では定理としてあまり意味をなさないので, 全単射を特徴付ける「様々な性質」の内容が重要になる. 本稿ではそれらの性質を直接には扱わないので, 詳細には立ち入らない.

一般の簡約群 G の局所 Langlands 対応は未解決であり, いくつかの点で GL_N の場合と異なると考えられている. 第 1 に, $G(F)$ の表現だけでなく, $G(F)$ の純内部形式とよばれるいくつかの群の表現をまとめて考える必要がある. 第 2 に, 既約表現の集合から L-パラメータの集合への写像は, 全単射であるとは限らない.

本稿では, 2.3 節で局所 Gan-Gross-Prasad 予想の主張を述べる際に, $G = \mathrm{SO}_{n+1} \times \mathrm{SO}_n$ の場合に限定して簡単に説明する.

簡約群 G の中心を Z_G と表わす. 群 $G(F)$ の既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ が離散系列表現であるとは, $G(F)$ の適当な指標 χ で, $\pi \otimes \chi$ が $G(F)$ のユニタリ表現であり $\pi \otimes \chi$ の任意の行列係数が $G(F)/Z_G(F)$ 上 2 乗可積分になるようなものが存在することをいう.

全体を通じて, $\psi\colon F \to \mathbb{C}^\times$ は F の非自明な加法指標とする. 上三角べき単行列全体のなす GL_n の部分群を N とし, $N(F)$ の指標 ψ_N を

$$\psi_N(u) = \psi(u_{1,2} + u_{2,3} + \cdots + u_{N-1,N}), \qquad u = (u_{ij}) \in N(F)$$

で定める. 表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ が $(N(F), \psi_N)$-distinguished であるとき, π は**生成的 (generic)** であるという. 生成的な $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約表現の集合を $\mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}(\mathrm{GL}_n(F))$ と表わす.

2. 具体例 3 種

2.1 (A) 型: Shalika 周期

群 $G=\mathrm{GL}_{2n}$ の部分群 H と $H(F)$ の指標 Ψ を

$$H=\left\{\begin{pmatrix} g & X \\ 0 & g \end{pmatrix} \middle| \, g\in\mathrm{GL}_n,\ X\in\mathrm{M}_n\right\},\qquad \Psi(\begin{pmatrix} g & X \\ 0 & g \end{pmatrix})=\psi(\mathrm{tr}(g^{-1}X))$$

で定める.

定義 6 表現 $\pi\in\mathrm{Irr}(G(F))$ に対し, π の $(H(F),\Psi)$-周期を **Shalika 周期 (Shalika period)** という.

次の定理は, Matringe ([28], [29], [30]) と Kewat ([20]) および Kewat-Raghunathan ([21]) の結果を総合するとしたがう.

定理 7 生成的な表現 $\pi\in\mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}(G(F))$ に対して, 以下は同値:

(1) π は 0 でない Shalika 周期をもつ.
(2) L-パラメータ $\phi_\pi: W_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ はシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ に値をもつ.

さらに, π がこれらの条件を満たすならば次を満たす:

(3) π の 2 階外積 L-因子 $L(s,\pi,\wedge^2)$ は $s=0$ に極をもつ.

注意 8 表現 π が離散系列表現であれば, 条件 (1), (2) は (3) と同値である.

定理 7 は, 保型 L 関数に関する次の定理の局所類似として理解することができる.

定理 9（Jacquet-Shalika [19]）
F を代数体, $\mathbb{A}$ を F のアデール環とし, π を $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A})$ の既約尖点保型表現とする. また, 部分群 H と $H(\mathbb{A})$ の指標 Ψ を上と同様に定義する. このとき, 以下は同値:

(1) ある保型形式 $\varphi\in\pi$ に対して

$$\int_{\mathbb{A}^\times H(F)\backslash H(\mathbb{A})}\varphi(h)\Psi(h)^{-1}\,\mathrm{d}h\neq 0.$$

(2) 2 階外積保型 L 関数 $L(s,\pi,\wedge^2)$ は $s=1$ で極をもつ.

条件 (1) に現われる積分は Shalika 周期積分という. これは $\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A})}(\pi,\mathbb{C})$ の元を定めていることに注意する. 論文 [19] では, 保型 L 関数 $L(s,\pi,\wedge^2)$ の Rankin-Selberg 積分による構成を与えており, その積分には Shalika 周期を構成する部分群 H と指標 Ψ が現われる. さらに, Rankin-Selberg 積分の留数には Shalika 周期積分が現われる.

このように, 保型 L 関数の Rankin-Selberg 積分に現われる周期の局所類似に対して, 非自明な周期の存在と L-因子の極もしくはそれに付随する L-パラメータの条件が同値であるという例が, Shalika 周期の他にもいくつかある.

2.2 (B) 型: ユニタリ周期

局所体 E を F の 2 次拡大とする. また, W を E 上の n 次元非退化エルミート空間とし, W の等長変換全体のなす $G = \mathrm{GL}(W)$ の部分群を $H = \mathrm{U}(W)$ とおく. これをユニタリ群という.

ここで, G は Weil の係数制限 $\mathrm{Res}_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n,E}$ と同一視することで F 上の代数群とみなしている. 特に $G(F) = \mathrm{GL}_n(E)$ であることに注意する.

定義 10 表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ に対し, π の $H(F)$-周期を**ユニタリ周期 (unitary period)** という.

ユニタリ周期は底変換リフトで特徴づけられるので, ここで底変換リフトについて簡単にまとめておく. 2 次拡大 E の W_E は W_F の指数 2 の部分群なので, L-パラメータの制限

$$\mathrm{Res}^F_E : \Phi_F(\mathrm{GL}_n) \to \Phi_E(\mathrm{GL}_n); \quad \phi \mapsto \phi|_{W_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$$

が定まる. したがって, 写像 $\mathrm{BC}_{E/F} \colon \mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n(F)) \to \mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n(E))$ で, 次の図式を可換にするものがただ 1 つ存在する. ただし, 水平の写像はいずれも局所 Langlands 対応による全単射である:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n(F)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{BC}_{E/F}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Phi_F(\mathrm{GL}_n) \arrow[d, "\mathrm{Res}^F_E"] \\
\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n(E)) \arrow[r, "\sim"] & \Phi_E(\mathrm{GL}_n)
\end{tikzcd}$$

この写像 $\mathrm{BC}_{E/F}$ を $\mathrm{GL}_n(F)$ から $\mathrm{GL}_n(E)$ への**底変換リフト (base change lift)** という. 底変換リフトの性質については [1] を参照.

ユニタリ周期と底変換リフトの関係は, 次のようにまとめられる.

定理 11（Feigon-Lapid-Offen [10], Beuzart-Plessis [5]）
既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ に対して以下が成り立つ.

(1) π が $H(F)$-distinguished ならば π は底変換リフトの像 $\mathrm{Image}(\mathrm{BC}_{E/F})$ に含まれる.

(2) $\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}(G(F))$ とすると,

$$\dim \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{1}{2} \deg \mathrm{BC}_{E/F}(\pi) \right\rceil & H \text{ が準分裂のとき}, \\ \left\lfloor \frac{1}{2} \deg \mathrm{BC}_{E/F}(\pi) \right\rfloor & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

が成り立つ.

ここで, $\mathrm{BC}_{E/F}$ の次数 $\deg \mathrm{BC}_{E/F}$ は以下のように定義される写像

$$\deg \mathrm{BC}_{E/F} \colon \mathrm{Irr}(G(F)) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

である. 既約表現の集合 $\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ と $\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_n(E))$ には, 既約表現の Langlands 分類および Levi 部分群の不分岐指標群の複素トーラス構造から, 自然に複素代数多様体の構造が入る. この代数多様体構造に関して $\mathrm{BC}_{E/F}$ は有限平坦射になることが知られているので, $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ におけるその次数を $\deg \mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ と表わす. 詳細については [5, § 5.1] および [27] を参照.

注意 12　定理 11 で $\deg \mathrm{BC}_{E/F}$ を使うのは生成的な表現に対してだけである．表現 π が生成的ならば, $\deg \mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ は次のように明示的に与えることができる．生成的な表現 $\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}(G(F))$ は, 放物型誘導を使って

$$\pi \simeq \Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_r$$

の形で表わすことができる．ここで, 各 Δ_i は $\mathrm{GL}_{n_i}(E)$ の互いに unlinked な既約離散系列表現であり, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ は n の分割とする．このような表示は $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ の並べ替えを除いて一意的である．

このとき, $\pi \in \mathrm{Image}(\mathrm{BC}_{E/F})$ ならば

$$\log_2(\deg \mathrm{BC}_{E/F}(\pi)) = \#\{i \mid \Delta_i^c \simeq \Delta_i\}$$

が成り立ち, $\pi \notin \mathrm{Image}(\mathrm{BC}_{E/F})$ ならば $\deg \mathrm{BC}_{E/F}(\pi) = 0$ である．ただし, $\log_2$ は 2 を底とする対数, c を $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元とし, Δ_i^c は $\Delta_i^c(g) = \Delta_i(c(g))$ で定まる $\mathrm{GL}_{n_i}(E)$ の表現とする．

定理 11(1) は, Jacquet により 80 年代に予想され, 相対跡公式の理論を開拓することで Jacquet 自身が証明した, 次の定理の局所類似と見ることができる．

定理 13（Jacquet [17], [18], Lapid [22], Aizenbud-Gourevitch [2]）
E/F を代数体の 2 次拡大, $\mathbb{A}_F$, $\mathbb{A}_E$ をそれぞれ F, E のアデール環とし, π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ の既約尖点保型表現とする．このとき, 以下は同値:

(1) 2 次拡大 E/F に関するあるユニタリ群 $H \subset \mathrm{Res}_{E/F} \mathrm{GL}_{n,E}$ と, ある保型形式 $\varphi \in \pi$ に対して
$$\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A}_F)} \varphi(h)\, \mathrm{d}h \neq 0.$$

(2) π は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ のある尖点保型表現の底変換リフトである．

Prasad [27] は次のような設定において, 定理 11 の一般化となる予想を定式化した．群 H を局所体 F 上の準分裂な連結簡約代数群, E/F を 2 次拡大とし, $G = \mathrm{Res}_{E/F} H$ とする．このとき, $G(F)$ の表現の $H(F)$-周期をしばしば **Galois 周期 (Galois period)** という．

Prasad はある 2 次指標 $\omega_H : H(F) \to \{\pm 1\}$ および, H の**反対群 (opposition group)** という F 上の準分裂簡約代数群 H^{op} で, $H^{\mathrm{op}}_E \simeq H_E$ となるものを構成した．このとき, Prasad の予想 ([27, Conjecture 13.3]) は大まかにいうと次のようなものである:

(1) 表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ が $(H(F), \omega_H)$-distinguished ならば, π は $H^{\mathrm{op}}(F)$ の表現の底変換リフトである．
(2) 生成的な表現 $\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathrm{gen}}(G(F))$ に対して, $\dim \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \omega_H)$ は底変換リフトの次数を使った明示的な式で表わせる．

例えば群 H がユニタリ群の場合, ω_H は自明指標, $H^{\mathrm{op}} = \mathrm{GL}_{n,F}$ となり, Prasad の予想は定理 11 の主張と一致する．

逆に $H=\mathrm{GL}_{n,F}$ とすると H^{op} は準分裂ユニタリ群, $\omega_H=\eta_{E/F}^n\circ\det$ となる．ただし, $\eta_{E/F}$ は局所類体論において 2 次拡大 E/F から定まる $F^\times$ の 2 次指標である．このとき, $G(F)=\mathrm{GL}_n(E)$ の表現の $(H(F),\omega_H)$-周期は (A) の系統にも属しており, 対応する周期積分は浅井 L-関数の Rankin-Selberg 積分に現われる．この場合の Prasad の予想は正しいことが確かめられている．

また, 低次元のいくつかの群, 例えば $H=\mathrm{SL}_2,\mathrm{SO}_4,\mathrm{SO}_6,\mathrm{GSp}_4$ などの場合, Prasad の予想は H. Lu ([23], [24], [25], [26]) によりテータ対応を使って証明されている．他にも, 超尖点表現の場合は C. Zhang [45] と C. Wang [41] によりタイプ理論を使って部分的な結果が得られている．

2.3 (C) 型: 局所 Gan-Gross-Prasad 予想

局所 Gan-Gross-Prasad 予想 (以下「局所 GGP 予想」と省略する) は, Gross-Prasad [12] により $\mathrm{SO}_{n+1}\times\mathrm{SO}_n$ の表現についての予想として発表され, のちに Gross-Prasad [13] と Gan-Gross-Prasad [11] において様々な古典群に対して一般化された予想である．保型表現に対する「大域 GGP 予想」と区別するために「局所」と有徴化している．

なお現在では (アルキメデス局所体の場合も含め) すべての場合で解決しているため, 本来は「GGP 定理」というべきところだが, 「GGP 予想」という名前が定着しているので慣例にしたがって「予想」と呼ぶことにする．

ここでは [12] に基づいて次のような設定を考える:

- V: 局所体 F 上の $n+1$ 次元の非退化な 2 次空間. ただし, V から定まる特殊直交群 $\mathrm{SO}(V)$ は準分裂であるとする．
- W: V の余次元 1 の非退化な部分空間. このとき, $\mathrm{SO}(W)$ は自然に $\mathrm{SO}(V)$ の部分群とみなせることに注意する．
- $G=\mathrm{SO}(V)\times\mathrm{SO}(W)$.
- $H=\mathrm{SO}(W)$ とし, 対角埋め込み $h\mapsto(h,h)$ により H を G の部分群とみなす．

局所 GGP 予想の主張を述べるには, 群 G に対する局所 Langlands 予想が必要である．群 G の Langlands 双対群 $\widehat{G}$ は次のようになる:

$$\widehat{G}=\begin{cases}\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})\times\mathrm{SO}_n(\mathbb{C}) & n\text{ が偶数のとき}\\ \mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{C})\times\mathrm{Sp}_{n-1}(\mathbb{C}) & n\text{ が奇数のとき.}\end{cases}$$

局所 Langlands 予想の主張において, 次で定義される有限群 S_ϕ の既約表現が重要な役割を果たす．

定義 14 L-パラメータ $\phi\colon W_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to{}^LG$ に対して, $\widehat{G}$ における ϕ の像の中心化群を $Z_{\widehat{G}}(\phi)$ とし, $Z_{\widehat{G}}(\phi)$ の単位元を含む連結成分を $Z_{\widehat{G}}(\phi)^\circ$ と表わす．このとき, 群 $Z_{\widehat{G}}(\phi)/Z_{\widehat{G}}(\phi)^\circ$ を S_ϕ と表わし, ϕ の S-**群** (*S-group, component group*) という．

群 $\widehat{G}$ の形から, S_ϕ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の有限個の直積と同型である．特に, S_ϕ の既約表現は 2 次指標のみである．

一般の群の局所 Langlands 予想では, $\mathrm{GL}_N(F)$ の場合と違い, 1 つの群 G だけでなく G の純内部形式と呼ばれる複数の群の表現を一斉に扱う必要がある．

体 F 上の $n+1$ 次元の非退化な 2 次空間 V' で, V と同じ判別式をもつものから定まる特殊直交群 $\mathrm{SO}(V')$ を, $\mathrm{SO}(V)$ の純内部形式という．そのような V' と, n 次元の非

退化な 2 次空間 W' で W と同じ判別式をもつものに対して, $G' = \mathrm{SO}(V') \times \mathrm{SO}(W')$ は G の純内部形式である. 群 G の純内部形式の集合を $X(G)$ とする.

予想 15（局所 Langlands 予想） 全射

$$\coprod_{G' \in X(G)} \mathrm{Irr}(G'(F)) \twoheadrightarrow \Phi_F(G)$$

で, 様々な性質を満たすものが存在する. 特に次の性質をもつ:

(1) 各 L-パラメータ $\phi \in \Phi_F(G)$ のファイバー Π_ϕ は有限集合である. これを ϕ の L-**パケット** (L-*packet*) という.
(2) 群 G の Whittaker データ [*1]を 1 つ固定すると, 全単射 $\Pi_\phi \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}(S_\phi)$ が定まる.

以下, 群 G の Whittaker データを固定する. 各 L-パラメータ $\phi \in \Phi_F(G)$ に対して χ_ϕ を, ϕ の部分表現のルート数を使って [11, §6, §17] で明示的に構成された S_ϕ の 2 次指標とする. 次の定理が, $\mathrm{SO}_{n+1} \times \mathrm{SO}_n$ の場合における局所 GGP 予想の主張である.

定理 16（Waldspurger [33], [34], [35], [36], Mœglin-Waldspurger [31]） 予想 15 を仮定する. このとき, 群 $G(F)$ の生成的な表現を含む L-パケット Π_ϕ に対して以下が成り立つ.

(1) L-パケット Π_ϕ には distinguished 表現がちょうど 1 つ含まれる.
(2) 唯一の distinguished 表現 $\pi \in \Pi_\phi$ に対応する S_ϕ の指標は χ_ϕ である.

このように, 「L-パケットに属するどの表現が distinguished なのかをルート数によって記述する」という形式の予想/定理を ε**-二分法 (ϵ-dichotomy)** という.

3. 重複度公式

GGP 予想を証明するため, Waldspurger は重複度公式という道具を導入した. 本節では Waldspurger による証明のごく簡単な方針と, 重複度公式の研究の最近の進展について説明する.

3.1 GGP 予想の証明方針

代数群 G と部分群 H は条件 1 を満たす組とし, χ を $H(F)$ の指標とする.

定義 17 既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ に対して $m(\pi, \chi) = \dim \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \chi)$ とおき, これを π の $(H(F), \chi)$-周期の**重複度 (multiplicity)** という. 指標 χ が自明指標のときは単に $m(\pi)$ と表わす.

任意の既約表現 π に対して $m(\pi, \chi)$ が高々 1 であるとき, $(H(F), \chi)$-周期は**重複度 1 定理 (multiplicity one theorem)** を満たすという.

注意 2 で述べたように, $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \chi)$ は有限次元であると予想されている. これは一般には証明されていないが, 以下で扱う具体的な場合では, いずれも正しいことが知

[*1] Whittaker データの定義などについては, [12, §3, §4] または [11, §9] を参照.

られている.

以下しばらく $G = \mathrm{SO}_{n+1} \times \mathrm{SO}_n$ と $H = \mathrm{SO}_n$ を 2.3 節で考えた代数群の組とする. このとき $H(F)$-周期は重複度 1 定理を満たすことが (局所 GGP 予想の証明とは独立に) 知られている.

定理 18（Aizenbud-Gourevitch-Rallis-Schiffmann [3], Waldspurger [37]） 任意の既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ に対して $m(\pi) \leq 1$ が成り立つ.

Waldspurger は, 既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ に対して $m_{\mathrm{geom}}(\pi)$ という量を定義し, **幾何的重複度 (geometric multiplicity)** と名付けた. 幾何的重複度の詳しい定義は [33, §13.1, §7] を参照. 次の 2 つの定理が局所 GGP 予想の証明の核である.

定理 19（Waldspurger [33], [34]）

(1) 任意の緩増加既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ に対して $m(\pi) = m_{\mathrm{geom}}(\pi)$ が成り立つ.
(2) 群 $G(F)$ の緩増加表現からなる L-パケット Π_ϕ に対して

$$\sum_{\pi \in \Pi_\phi} m_{\mathrm{geom}}(\pi) = 1.$$

(1) のような, 周期の重複度と幾何的重複度を結ぶ等式を**重複度公式 (multiplicity formula)** という.

定理 19 の 2 つの主張を合わせると, 緩増加表現に対する定理 16 (1) の主張が直ちにしたがう. 一般の場合の主張を緩増加表現の場合に帰着する議論は Mœglin-Waldspurger [31] でなされている.

注意 20 定理 16 (2) を示すには重複度公式だけでは不十分で, ルート数に対しても次のような重複度公式の類似を示す必要がある.

群 $G = \mathrm{SO}(V) \times \mathrm{SO}(W)$ に対して $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ とおき, $V \times W$ から双対空間 $V^* \times W^*$ への線型同型全体のなす $\mathbf{G}(F)$-torsor を $\widetilde{\mathbf{G}}(F)$ とする. 緩増加な既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ の endoscopic リフトとして得られる $\Pi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}(F))$ は, 適切な意味で $\widetilde{\mathbf{G}}(F)$ の「表現」$\widetilde{\Pi}$ に拡張できる.

Waldspurger は [35] において, $\widetilde{\Pi}$ の捻られた Harish-Chandra 指標を使って, ルート数に対する幾何的重複度の類似 $\varepsilon_{\mathrm{geom}}(\widetilde{\Pi})$ を定義し, 等式 $\varepsilon(1/2, \Pi) = \varepsilon_{\mathrm{geom}}(\widetilde{\Pi})$ を示した. これが, ルート数に対する重複度公式の類似である. さらに [36] では, この等式と重複度公式を endoscopic 指標関係式で結びつけることで, 緩増加表現に対して定理 16 (2) を示した.

3.2 重複度公式の進展

2節で言及した他の 2 つの周期, Shalika 周期とユニタリ周期についても, 重複度公式が証明されている. この節では, これら 2 つの重複度公式の具体的な形を説明する.

いくつか記号を準備しておく.

- 簡約代数群 G に対して, $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ の Harish-Chandra 指標を θ_π とする.
- 群 G の F 上楕円的な正則半単純共役類の集合を $\Gamma_{\mathrm{ell}}(G)$ と表わす.

(B) 型: Galois 周期

Beuzart-Plessis [4] は, 一般に Prasad の予想の設定で Galois 周期に対する重複度公式を証明した. 群 H を局所体 F 上の準分裂な連結簡約代数群, E/F を 2 次拡大, χ を $H(F)$ の指標とし, $G = \mathrm{Res}_{E/F} H$ とする. このとき H は G の対称部分群なので, 注意 2 で述べたように重複度は有限であることが知られている.

Galois 周期に対する重複度公式は次の定理で与えられる.

定理 21（Beuzart-Plessis [4]）
離散系列表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ に対して幾何的重複度 $m_{\mathrm{geom}}(\pi, \chi)$ を

$$m_{\mathrm{geom}}(\pi, \chi) = \int_{\Gamma_{\mathrm{ell}}(H/A_H)} D^H(x)\theta_\pi(x)\chi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

で定義する. ただし, A_H は H の中心の最大分裂トーラス, D^H は H の Weyl 判別式とし, $\mathrm{d}x$ は $\Gamma_{\mathrm{ell}}(H/A_H)$ の適切な測度とする [*2]. このとき, 重複度公式 $m(\pi, \chi) = m_{\mathrm{geom}}(\pi, \chi)$ が成り立つ.

定理 21 の証明には**局所相対跡公式 (local relative trace formula)** を使う. これについて簡単に説明する. 試験関数 $f : G(F) \to \mathbb{C}$ は Schwartz-Harish-Chandra 関数で,

$$f(xg) = \chi(z)f(g), \qquad z \in Z_G(F),\ g \in G(F)$$

を満たすとする. ただし Z_G は G の中心を表わす.

さらに f は尖点形式 (cusp form) である, *i.e.* G の放物型部分群 P で $P \subsetneq G$ となるものに対して, そのべき単根基を U とすると

$$\int_{U(F)} f(ug)\,\mathrm{d}u = 0, \qquad g \in G(F) \tag{1}$$

が成り立つと仮定する. このとき**相対跡 (relative trace)** $I(f, \chi)$ を

$$I(f, \chi) = \int_{H(F)\backslash G(F)} \int_{H(F)/(Z_G \cap H)(F)} f(x^{-1}hx)\chi^{-1}(h)\,\mathrm{d}h\mathrm{d}x$$

で定める. この積分は絶対収束する ([4, Theorem 3.1.1]). 相対跡公式の**スペクトル側 (spectral side)** $I_{\mathrm{spec}}(f, \chi)$ を

$$I_{\mathrm{spec}}(f, \chi) = \sum_\pi m(\pi, \chi)\mathrm{tr}(\pi^\vee(f))$$

で定める. ただし, 右辺の和は離散系列表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G(F))$ で中心指標が $\chi|_{Z_G(F)}$ に等しいものをわたり, $\pi^\vee$ は π の反傾表現を表わす.

また, **幾何側 (geometric side)** $I_{\mathrm{geom}}(f, \chi)$ を

$$I_{\mathrm{geom}}(f, \chi) = \int_{\Gamma_{\mathrm{ell}}(H/A_H)} D^H(x)\theta_f(x)\chi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

[*2] 詳しい定義は [4, §6.1] を参照.

で定める. ただし, $G(F)$ の正則半単純元の集合上の関数 θ_f は, f の重さ付き軌道積分 (weighted orbital integral) とする.

このとき, 次の等式を局所相対跡公式という.

定理 22（Beuzart-Plessis [4]） 上の状況で, 等式

$$I_{\mathrm{geom}}(f,\chi)=I(f,\chi)=I_{\mathrm{spec}}(f,\chi)$$

が成り立つ.

注意 23 Beuzart-Plessis の証明 [4, Theorem 5.1.1] では, より一般に**強尖点的 (strongly cuspidal)** な試験関数 f に対して幾何側の展開を示している. ここで, $f:G(F)\to\mathbb{C}$ が強尖点的であるとは, G の放物型部分群 P で $P\subsetneq G$ となるものに対して M をその Levi 部分群とすると, 等式 (1) が任意の $g\in M(F)$ に対して成り立つことをいう. 定義から明らかに「尖点形式ならば強尖点的」であることに注意する [*3].

注意 24 定理 21 の 2 つ目の等号 (スペクトル側の展開) は Plancherel 公式から容易にしたがう. この場合の局所相対跡公式の証明で本質的なのは, 幾何側の展開を示す部分である.

局所 GGP 予想の証明では緩増加表現に対する重複度公式が必要だった. これを示すには緩増加表現が現われるようなスペクトル側の展開を示す必要があり, 定理 22 のスペクトル側の証明よりもずっと難しい.

Galois 周期に対する重複度公式は, 定理 22 から直ちにしたがう.

定理 22 $\Rightarrow$ 定理 21 の証明

離散系列表現 $\pi\in\mathrm{Irr}(G(F))$ の中心指標が $\chi|_{Z_G(F)}$ に等しいとする. 表現 π の行列係数 $f:G(F)\to\mathbb{C}$ で $f(1)\neq 0$ となるものを 1 つとる. このとき f は尖点形式であることに注意する.

また, π の形式次数を $d(\pi)$ と表わすと $\theta_f=d(\pi)^{-1}f(1)\theta_\pi$ が成り立つ ([4, Proposition 2.6.1]). これを幾何側の展開 $I(f,\chi)=I_{\mathrm{geom}}(f,\chi)$ に代入すると

$$I(f,\chi)=d(\pi)^{-1}f(1)m_{\mathrm{geom}}(\pi,\chi)$$

が得られる.

一方で, 既約表現 $\tau\in\mathrm{Irr}(G(F))$ に対して $\tau\not\simeq\pi$ ならば $\mathrm{tr}(\tau^\vee(f))=0$ であり, $\tau\simeq\pi$ ならば $\mathrm{tr}(\tau^\vee(f))=d(\pi)^{-1}f(1)$ である. したがって, スペクトル側の展開 $I(f,\chi)=I_{\mathrm{spec}}(f,\chi)$ から

$$I(f,\chi)=d(\pi)^{-1}f(1)m(\pi,\chi)$$

が得られる. この 2 つの等式を比較すると $m(\pi,\chi)=m_{\mathrm{geom}}(\pi,\chi)$ が得られる. □

注意 25 ここでは Galois 周期の場合の証明だけを説明したが, 現在知られている重複度公式は, すべて局所相対跡公式の幾何側とスペクトル側の展開から導かれている.

[*3] 強尖点的という概念は Waldspurger[33] により導入された. このように用語がやや紛らわしくなった理由は, [34, §2.5] での “cuspidale” の定義が通常の尖点性の定義と異なるためであると思われる.

幾何側の定義である等式 (2) は, 定理 21 における幾何的重複度の定義において, Harish-Chandra 指標 θ_π を重さ付き軌道積分 θ_f で置き換えただけである. これは現在知られているすべての重複度公式に共通する事実であり, C.Wan [40] は一般の (G,H) に対する幾何的重複度もそのようにして得られると予想している.

(C) 型: 一般化 Shalika 周期

C.Wan と Beuzart-Plessis は [6] において, 次のような少し一般化された設定で Shalika 周期の重複度公式を証明した. まず C を F 上の中心単純環とし, $G=\mathrm{GL}_2(C)$ とおく. 部分群 H と $H(F)$ の指標 Ψ を

$$H=\left\{\begin{pmatrix} g & X \\ 0 & g\end{pmatrix}\middle|\, g\in C^\times,\ X\in C\right\},\qquad \Psi(\begin{pmatrix} g & X \\ 0 & g\end{pmatrix})=\psi(\mathrm{tr}_C(g^{-1}X))$$

で定める. ただし, ψ は F の非自明な加法指標とし, $\mathrm{tr}_C : C\to F$ は C の被約トレースとする. このとき, 表現 $\pi\in\mathrm{Irr}(G(F))$ の $(H(F),\Psi)$-周期を一般化 Shalika 周期という. 特に $C=\mathrm{M}_n(F)$ の場合は 2.1 節で定義した Shaika 周期と一致することに注意する.

幾何的重複度の定義のために, Harish-Chandra 指標の展開について記号を準備する必要がある.

定理 26（Harish-Chandra [14]） $x\in G(F)$ を半単純元とし, $\mathfrak{g}_x$ を G における x の中心化群 G_x の Lie 環とする. また, べき零軌道 $\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}_x(F)$ に対して $\widehat{\mu}_{\mathcal{O}}$ を, 軌道積分の Fourier 変換で定まる $\mathfrak{g}_x(F)$ 上の distribution とする. このとき, 既約表現 $\pi\in\mathrm{Irr}(G(F))$ と各べき零軌道 $\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}_x(F)$ に対して, 定数 $c_{\pi,\mathcal{O}}(x)\in\mathbb{C}$ と $\mathfrak{g}_x(F)$ における 0 の近傍 ω_x で

$$\theta_\pi(x\exp(X))=\sum_{\mathcal{O}}c_{\pi,\mathcal{O}}(x)\widehat{\mu}_{\mathcal{O}}(X),\qquad X\in\omega_x$$

を満たすものが存在する. これを x における Harish-Chandra 指標 θ_π の展開という.

既約表現 $\pi\in\mathrm{Irr}(G(F))$ と半単純元 $x\in G(F)$ に対して,

$$c_\pi(x)=\begin{cases}|N_{\mathrm{reg}}(x)|^{-1}\sum_{\mathcal{O}\in N_{\mathrm{reg}}(x)}c_{\pi,\mathcal{O}}(x) & G_x\text{ が準分裂のとき}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

とおく. ただし, $N_{\mathrm{reg}}(x)$ は $\mathfrak{g}_x(F)$ の正則べき零軌道の集合とする. 一般化 Shalika 周期の重複度は次で与えられる.

定理 27（Beuzart-Plessis-Wan [6]）
離散系列表現 $\pi\in\mathrm{Irr}(G(F))$ に対して幾何的重複度 $m_{\mathrm{geom}}(\pi,\Psi)$ を

$$m_{\mathrm{geom}}(\pi,\Psi)=\int_{\Gamma_{\mathrm{ell}}(H_0/A_H)}D^H(x)c_\pi(x)\,\mathrm{d}x$$

で定義する. ただし H の部分群 H_0 は

$$H_0=\left\{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g\end{pmatrix}\middle|\, g\in C^\times\right\}$$

で定め, A_H は H の中心の最大分裂トーラス, D^H は H の Weyl 判別式とし, $\mathrm{d}x$ は $\Gamma_{\mathrm{ell}}(H_0/A_H)$ の適切な測度とする. このとき, 重複度公式 $m(\pi, \Psi) = m_{\mathrm{geom}}(\pi, \Psi)$ が成り立つ.

注意 28 Galois 周期の幾何的重複度の定義では, 表現の Harish-Chandra 指標 θ_π そのものが積分の中に現われていたが, これは特殊な現象であり, 局所 GGP 予想の場合なども含めて一般には定理 27 のように Harish-Chandra 指標の展開係数が現われる.

注意 29 C.Wan は [40] において, 次のような一般的な設定で幾何的重複度の定義を与え, 重複度公式と局所相対跡公式の予想を定式化した.

> 群 G は F 上の簡約代数群であり, 部分群 H と $H(F)$ の指標 χ は以下の (i), (ii) のいずれかを満たす:
>
> (i) H は簡約な G の球部分群.
> (ii) G の放物型部分群 P と, その Levi 部分群 M, べき単根基 U および M の簡約な球部分群 H_0 であって, $H = H_0U$ を満たし, χ は $H_0(F)$ 上で自明かつ $\chi|_{U(F)}$ が $U(F)$ の非退化指標となるものが存在する.

本稿で言及した Shalika 周期, Galois 周期, 局所 GGP 予想を含め, 現在までに重複度公式が示されている例はいずれも (i), (ii) のどちらかの条件を満たし, [40] の予想はそれらすべての場合に正しいことが確かめられている.

現在までに予想が確かめられている他の例については, C.Wan [38], [39], Wan-Zhang [42], [43], [44] と Beuzart-Plessis-Wan [7] を参照.

謝辞. 本稿で紹介した重複度公式の理論を筆者が理解する上で, Waldspurger による一連の論文 ([33], [34], [35], [36]) を読む数ヶ月にわたる勉強会が重要な役割を果たしました. 長時間にわたるセミナーに付き合い, 筆者の理解を助けた高梨悠吾氏 (東京大学) に感謝します. また, 本稿の予稿に目を通して下さった大井雅雄氏 (国立台湾大学) から多くの有益な助言を賜りました. この場を借りてお礼申し上げます.

研究集会「代数的整数論とその周辺 2024」における講演および本講究録執筆の機会をくださった, 世話人の三枝洋一先生 (東京大学), 中村健太郎先生 (九州大学), 杉山真吾先生 (金沢大学) に深く感謝いたします.

References

[1] J.Arthur, L.Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Ann. Math. Studies, Princeton University Press, (1989).

[2] A. Aizenbud and D. Gourevitch, *Smooth transfer of Kloosterman integrals (the Archimedean case)*, Amer. J. Math. **135**, no.1, (2013), 143–182.

[3] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, and G. Schiffmann, *Multiplicity one theorems*, Ann. Math. **172**, (2010), no.2, 1407–1434.

[4] R. Beuzart-Plessis, *On distinguished square-integrable representations for Galois pairs and a conjecture of Prasad*, Invent. Math. **214**, (2018), no.1, 437–521.

[5] R. Beuzart-Plessis, *Multiplicities and Plancherel formula for the space of nondegenerate Hermitian matrices*, J. Number Theory, **230**, (2022), 5–63.

[6] R. Beuzart-Plessis and C. Wan, *A local trace formula for the generalized Shalika model*, Duke Math. J. **168**, (2019), no.7, 1303–1385.

[7] R. Beuzart-Plessis and C. Wan, *A local twisted trace formula for Whittaker induction of coregular symmetric pairs: the geometric side*, preprint arXiv:2312.10845.

[8] D. Ben-Zvi, Y. Sakellaridis, and A. Venkatesh, *Relative Langlands Duality*, preprint arXiv:2409.04677.

[9] P. Delorme *Constant term of smooth H_ψ-spherical functions on a reductive p-adic group*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2), (2010), 933–955.

[10] B. Feigon, E. Lapid, and O. Offen, *On representations distinguished by unitary groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **115**, (2012), 185–323.

[11] W.T. Gan, B. Gross and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, Astérisque **346**, (2012).

[12] B. Gross and D. Prasad, *On the decomposition of a representation of* SO_n *when restricted to* SO_{n-1}, Can. J. Math. **44**, (1992), no.5, 974–1002.

[13] B. Gross and D. Prasad, *On irreducible representations of* $\mathrm{SO}_{2n+1} \times \mathrm{SO}_m$, Can. J. Math. **46**, (199 4), 930–950.

[14] Harish-Chandra, *Admissible Invariant Distributions on Reductive p-adic Groups*, With a preface and notes by Stephen DeBacker and Paul J. Sally, Jr, Univ. Lecture Ser., **16** American Mathematical Society, Providence, RI, (1999), xiv+97 pp.

[15] G. Henniart, *Une preuve simple de conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139**, (2000), 439–455.

[16] M. Harris and R. Taylor, *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties*, Ann. Math. Studies, Princeton University Press, (2001).

[17] H. Jacquet, *Smooth transfer of Kloosterman integrals*, Duke Math. J. **120**, no. 1, (2003), 121–152.

[18] H. Jacquet, *Kloosterman identities over a quadratic extension II*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **38**, no. 4, (2005), 609–669.

[19] H. Jacquet and J. Shalika Exterior square L-functions, in: Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions, vol.II, Ann Arbur, MI, 1988, in Perspect. Math., vol. 11, Academic Press, Boston, MA, (1990), 143–226.

[20] P.K. Kewat, *The local exterior square L-function: holomorphy, non-vanishing and Shalika functionals*, J. Algebra, **347**, (2011), 153–172.

[21] P.K. Kewat and R. Raghunathan, *On the local and global exterior square L-functions of* GL_n, Mth. Res. Lett. **19**, (2012), 785–804.

[22] E. Lapid, *On the fine spectral expansion of Jacqeut's relative trace formula*, J. Inst. Math. Jussieu, **5**, no.2, (2006), 263–308.

[23] H. Lu, *Theta correspondence and the Prasad conjecture for* $\mathrm{SL}(2)$, Pacific J. Math. **295**, no.2, (2018), 477–498.

[24] H. Lu, *The Prasad conjectures for* $\mathrm{U}(2)$, $\mathrm{SO}(4)$ *and* $\mathrm{Sp}(4)$, J. Number Theory, **204**, (2019), 211–245.

[25] H. Lu, *The Prasad conjectures for* GSp_4 *and* PGSp_4, Algebra and Number Theory, **14**, (2020), no.9, 2417–2480.

[26] H. Lu, *The distinction problems for* Sp_4 *and* $\mathrm{SO}_{3,3}$, Forum Math. **33**, (2021), no.2, 321–337.

[27] D. Prasad, *A relative local Langlands correspondence and geometry of parameter spaces*, preprint, arXiv:1512.04347, the latest version is available at: `https://drive.google.com/file/d/1UeLzLGwjwYFuRsSd4GFzx40amSw1-BGV/view`

[28] N. Matringe, *Linear and Shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences*, J. Number Theory, **138**, (2014), 1–19.

[29] N. Matringe, *On the local Bump-Friedberg L-function*, J. reine angew. Math. **2015**, (2015), no. 709, 119–170.

[30] N. Matringe, *Shalika periods and parabolic induction for* $\mathrm{GL}(n)$ *over a non-archimedean local field*, Bull. Lond. Math. Soc. **49**, (2017), no. 3, 417–427.

[31] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *La conjoncture locale de Gross-Prasad pour les groupes spéciaux orthogonaux : le cas général*, Astérisque, **347**, (2012), 167–216.

[32] Y. Sakellaridis and A. Venkatesh, *Periods and hamonic analysis on spherical varieties*, Astérisque, (2017), no. 396, viii+360.

[33] J.-L. Waldspurger, *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad*, Compos. Math. **146**, (2010), no.5, 1180–1290.

[34] J.-L, Waldspurger, *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, $2^{\grave{e}me}$ partie : Extension aux représentations tempérées*, Astérisque, **346**, (2012), 171–312.

[35] J.L. Waldspurger, *Calcul d'une valeur d'un facteur ϵ par une intégrale*, Astérisque, **347**, (2012), no.347, 1–102.

[36] J.-L. Waldspurger, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux*, Astérisque, **347**, (2012), 103–166.

[37] J.-L. Waldspurger, *Une variante d'un résultat de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann*, Astérisque, **346**, (2012), 313–318.

[38] C. Wan, *Multiplicity one theorem for the Ginzburg-Rallis model: the tempered case*, Trans. Amer. Math. Soc. **371**, (2019), no. 11, 7949–7994.

[39] C. Wan, *A local relative trace formula for the Ginzburg-Rallis model: the geometric side*, Mem. Amer. Math. Soc. **261**, (2019), no. 1263, v+90 pp.

[40] C. Wan, *On a multiplicity formula for spherical varieties*, J. Eur. Math. Soc. **24**, (2022), 3629–3678.

[41] C. Wang, *Distinction and quadratic base change for regular supercuspidal representations*, preprint, arXiv:2201.00447.

[42] C. Wan and L. Zhang, *The multiplicity problems for the unitary Ginzburg-Rallis models*, Israel J. Math. **258**, (2023), no.1, 185–248.

[43] C. Wan and L. Zhang, *Periods of automorphic forms associated to strongly tempered spherical varieties*, preprint, arXiv:2102.03695.

[44] C. Wan and L. Zhang, *Multiplicities for some strongly tempered spherical varieties*, preprint, arXiv:2204.07977.

[45] C. Zhang, *Distinction of regular depth-zero supercuapidsl L-packets*, IMRN, **2018**, (2018) no. 15, 4579–4601.