大規模相互作用系の拡散行列と配置空間の周期行列

坂内健一

Abstract. 流体力学極限とは，統計物理の数学的基礎を与える確率論の手法である．ミクロな粒子系を表す確率過程の適切なスケール極限を取ることで，拡散方程式などのマクロな偏微分方程式を数学的に厳密に導出する．本講究録では，ミクロな確率過程を記述する大規模相互作用系に関して，付随する配置空間の調和形式の理論に関する佐々田槙子氏との最近の共同研究の概要を，代数系の研究者向けに解説する．

1. はじめに

流体力学極限とは，統計物理の数学的基礎を与える確率論の手法である．この手法では，ミクロな粒子系を表す確率過程の適切なスケール極限を取ることで，拡散方程式などマクロな偏微分方程式を数学的に厳密に導出する．証明の一般的な指針として，Guo–Papanicolaou–Varadhan [6] により提唱されたエントロピー法と呼ばれる手法が用いられる．従来の研究では，証明は個別のモデルごとに行われてきた．本講究録では [1–4] に従って，結晶格子上のミクロな大規模相互作用系を扱う．各格子点は有限状態を持ち，遷移則は交換可能とする．特に対応する配置空間にコホモロジー理論を構築し，さらに時間発展を規定する遷移率と対応する測度を導入して，調和形式の理論を展開する．

流体力学極限では，上記のようなミクロな情報で与えられた確率過程の適切なスケール極限を取ることで，拡散方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},t) = \nabla\cdot\bigl(D(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},t))\nabla\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},t)\bigr)$$

の導出を目指す．ただし $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},t) = (\rho^1(\boldsymbol{x},t),\dots,\rho^c(\boldsymbol{x},t))$ は $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上 c 次元の密度関数であり，$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_d}\right)$ とする．この方程式は $\boldsymbol{\rho}\in\mathbb{R}^c$ を変数とする拡散行列

$$D(\boldsymbol{\rho}) \in M_{cd}(\mathbb{R}) \tag{1}$$

で特徴づけられる．拡散方程式の最も簡単な場合は，熱方程式

$$\frac{d}{dt}\rho(x,t) = \frac{d^2}{dx^2}\rho(x,t).$$

である（$c = d = 1$ で拡散係数が定数 1 の場合）．ミクロモデルが与えられたとき，密度関数の数 c，空間の次元 d，および拡散行列 $D(\boldsymbol{\rho})$ を導出することが課題である．[4] で筆者等はミクロなモデルに対する調和形式の理論を構築し，周期行列を定義した．流体力学極限が知られている特定のモデルに適用すると，c は遷移則の保存量の空間の次元，d は結晶格子の次元，拡散行列 $D(\boldsymbol{\rho})$ は周期行列の逆行列と一致する．まだ流体力学極限が証明

されていない大半の大規模相互作用系の場合にも，同様に周期行列が拡散行列を与えることが期待され，[4] では明確な予想として定式化する．

2. 有限配置空間上の連続時間マルコフ過程

本章では，有限配置空間上のマルコフ過程の基礎を解説する．ここで V を有限集合とし，その元を配置（状態）と呼ぶ．いま, 配置 $i, j \in V$ に対して, 単位時間で配置 i から j まで遷移する確率が $P_{ij} \geq 0$ で与えられる系を考える. 配置 j に遷移する確率がその時点での配置 i だけによるために, この系はマルコフ的であるという. i は必ずどこか別な配置に遷移することを表すために, 任意の $i \in V$ に対して $\sum_{j\in V} P_{ij} = 1$ が成り立つと仮定する. 特に $V = \{1, \dots, N\}$ のとき, $P = (P_{ij}) \in M_N(\mathbb{R})$ と行列で表すと, 最後の条件は

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

と表される. すなわち行列 P は, 各成分が 0 以上の実数で, $\mathbf{1}$ が固有値 1 の固有ベクトルとなるような行列である. このような行列を, **確率行列**と呼ぶ.

系の配置空間の状況を, V 上の確率測度で表す. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ を 0 以上の実数全体の集合とする. V 上の**確率測度** π とは, 関数 $\pi\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で $\sum_{i\in V} \pi(i) = 1$ をみたすものである. 任意の $i \in V$ に対して $\pi(i)$ は, その時点で V の状態が i であることの妥当性（確率）を表している. 例えばディラックの δ 関数 $\delta_{ij} := 0\ (i \neq j)$, $\delta_{ii} := 1$ に対して $\pi_j(i) := \delta_{ij}$ とおいた場合, 確率測度 π_j は, その時点で配置が確実に j である状況を表す.

以下, V を有限集合 $V = \{1, \dots, N\}$ とする. 確率測度 π の値を横ベクトル $(\pi(1), \dots, \pi(N)) \in \mathbb{R}^N_{\geq 0}$ で表したとき，確率測度の条件は $(\pi(1), \dots, \pi(N))\mathbf{1} = 1$ となる．いま，確率行列 $P = (P_{ij}) \in M_N(\mathbb{R})$ に対して

$$(\pi_P(1), \dots, \pi_P(N)) := (\pi(1), \dots, \pi(N))P$$

とおくと,

$$(\pi_P(1), \dots, \pi_P(N))\mathbf{1} = (\pi(1), \dots, \pi(N))P\mathbf{1} = (\pi(1), \dots, \pi(N))\mathbf{1} = 1$$

となり, π_P も V 上の確率測度であることが導かれる.

定義 2.1. π を V 上の確率測度として P を確率行列とする. 自然数 $n \geq 0$ に対して $\pi_n := \pi_{P^n}$ とおくと, V 上の確率測度の族 $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を得る. これは, 時刻 0 での状況が $\pi_0 = \pi$ で与えられ, 時刻 $n \in \mathbb{N}$ での状況が π_n で与えられる系を表す.

上記 $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は, 単位時間の自然数倍となる離散的な時刻における状況の時間発展を表す．配置空間 V 上の関数 $f\colon V \to \mathbb{R}$ を考える. 行列 $P \in M_N(\mathbb{R})$ に対して $Pf\colon V \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{pmatrix} Pf(1) \\ \vdots \\ Pf(N) \end{pmatrix} := P \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(N) \end{pmatrix}$$

と定義する．系の状況が確率測度 π で与えられているとする．すなわち π は, 系の配置が $i \in S$ である妥当性（確率）が $\pi(i)$ である状況を表している．このとき, f の期待値は

$$\mathbb{E}_\pi[f] \coloneqq \int_V f\pi = \sum_{i\in V} f(i)\pi(i) = \begin{pmatrix}\pi(1) & \dots & \pi(N)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(1)\\ \vdots \\ f(N)\end{pmatrix}$$

となる．従って, 確率行列 P が与えられたとき,

$$\mathbb{E}_{\pi_P}[f] = \begin{pmatrix}\pi_P(1) & \dots & \pi_P(N)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(1)\\ \vdots \\ f(N)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi(1) & \dots & \pi(N)\end{pmatrix} P \begin{pmatrix}f(1)\\ \vdots \\ f(N)\end{pmatrix} = \mathbb{E}_\pi[Pf]$$

となる．特に自然数 $n \geq 0$ に対して $\mathbb{E}_{\pi_n}[f] = \mathbb{E}_\pi[P^n f]$ である．すなわち f の期待値は, 確率行列 P で与えられる時間発展により, $P^n f$ の期待値として発展していく．

次に, 系の連続的な時間発展を記述する方法を考える．以下, 任意の $i, j \in V$ に対して**遷移率** $c_{ij} \geq 0$ を固定する．遷移率は c_{ij} が大きいほど, 配置 i から配置 j に遷移しやすい状況を表す．いま, $C(V) \coloneqq \mathrm{Map}(V, \mathbb{R})$ を V 上の実数値関数全体の集合とする．遷移率 c_{ij} に対する無限小生成作用素 $L\colon C(V) \to C(V)$ を

$$Lf(i) \coloneqq \sum_{j\in V} c_{ij}(f(j) - f(i)) \tag{2}$$

と定義する．L は $\mathbb{R}$ 線形写像であある．$Lf(i) = \sum_{j\neq i} c_{ij} f(j) - \left(\sum_{j\neq i} c_{ij}\right) f(i)$ より, f の表現行列 $(L_{ij}) \in M_N(\mathbb{R})$ は

$$L_{ij} \coloneqq \begin{cases} c_{ij} & i \neq j \\ -\sum_{k\neq i} c_{ik} & i = j \end{cases} \tag{3}$$

で与えられる．L に対して次が成り立つ．

命題 2.2. 無限小生成作用素 $L\colon C(V) \to C(V)$ に対して, 式 (3) の行列 $L = (L_{ij}) \in M_N(\mathbb{R})$ を考える．このとき, 任意の実数 $t \geq 0$ に対して $P(t) \coloneqq e^{tL}$ は確率行列となる．

【証明】．式 (3) より $\sum_{j\in V} L_{ij} = 0$ と，$i \neq j$ のとき $L_{ij} \geq 0$ が成り立つ．いま, $P(t) = e^{tL}$ とすると, 行列の指数関数の定義より,

$$P(t) = \lim_{n\to\infty}\left(I_N + \frac{tL}{n}\right)^n$$

となる．ただし $I_N \in M_N(\mathbb{R})$ は N 次の単位行列. 実数 $t \geq 0$ に対して, $i \neq j$ ならば $tL_{ij}/n \geq 0$ である．また, 十分大きな n に対して $1 + tL_{ii}/n > 0$ となる．従って, 十分大きな n に対して行列 $\left(I_N + \frac{tL}{n}\right)^n$ の各成分は 0 以上となり, 行列 $P(t) = e^{tL}$ の各成分 $P(t)_{ij}$ も 0 以上となることが導かれる．また,

$$\frac{d}{dt}P(t) = LP(t)$$

であることから, 両辺の i 番目の行の和をとると

$$\frac{d}{dt}\sum_{k\in V}P_{ik}(t)=\sum_{k\in V}\frac{d}{dt}P_{ik}(t)=\sum_{k\in V}\sum_{j\in V}L_{ij}P(t)_{jk}=\sum_{j\in V}L_{ij}\sum_{k\in V}P(t)_{jk}=0$$

となる. 従って, $\sum_{k\in V}P_{ik}(t)$ は t に関して定数である. $P(0)=I_N$ より, 任意の $t\geq 0$ に対して $\sum_{k\in V}P_{ik}(t)=\sum_{k\in V}P_{ik}(0)=1$ を得る. これより任意の $t\geq 0$ に対して $P(t)$ は確率行列であることが導かれる. □

命題 2.2 で定義される $\{P(t)=e^{tL}\mid t\geq 0\}$ を, 無限小生成作用素 L に付随する**マルコフ半群**と呼ぶ. 定義より, $s,t\geq 0$ に対して $P(s+t)=P(s)P(t)$ が成り立つ.

定義 2.3. 無限小生成作用素 $L\colon C(V)\to C(V)$ と V 上の確率測度 π を考える. 実数 $t\geq 0$ に対して $\pi_t:=\pi_{P(t)}$ と定義すると, V 上の確率測度の族 $(\pi_t)_{t\geq 0}$ を得る. これは時刻 0 の状況が $\pi_0=\pi$ で与えられ, 時刻 $t\geq 0$ での状況が π_t で与えられる確率過程を表す.

定義 2.3 の状況で $P=P(1)$ とおくと, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $P(n)=P^n$ である. 従って, 確率測度の族 $(\pi_t)_{t\geq 0}$ は離散的な族 $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を連続的に拡張したものである. 関数 $f\in C(V)$ の期待値は, $t\geq 0$ に対して $\mathbb{E}_{\pi_t}[f]$ と時間発展する. 定義より $\mathbb{E}_{\pi_t}[f]$ は t に関して C^∞ 級であり, 特に

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}_{\pi_t}[f]=\frac{d}{dt}\mathbb{E}_{\pi}[e^{tL}f]=\mathbb{E}_{\pi}[e^{tL}Lf]=\mathbb{E}_{\pi_t}[Lf] \tag{4}$$

となる. 従って, f の時刻 $t\geq 0$ における期待値の微分は, Lf の期待値となる.

無限小生成作用素 L より定義される確率遷移行列 $P(t)=e^{tL}$ に対して, V 上の連続時間マルコフ過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が存在することが知られている. すなわち, ある確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ と可測関数の族 $X_t\colon\Omega\to V$ $(t\geq 0)$ が存在して, 任意の $s,t\geq 0$ と $i,j\in V$ に対して以下が成り立つ.

$$\mathbb{P}(X_{s+t}=j|X_s=i)=P(t)_{ij}.$$

命題 2.4. 無限小生成作用素 L に対応する V 上の連続時間マルコフ過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を考える. このとき, 任意の関数 $f\colon V\to\mathbb{R}$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[f(X_t)]=\mathbb{E}[Lf(X_t)]. \tag{5}$$

【証明】. いま, π を X_0 の分布（初期分布）とする. すなわち, 任意の $i\in V$ に対して $\mathbb{P}(X_0=i)=\pi(i)$ が成り立つとする. このとき, 任意の $t\geq 0$ と $j\in V$ に対して

$$\mathbb{P}(X_t=j)=\sum_{i\in V}\mathbb{P}(X_t=j|X_0=i)\mathbb{P}(X_0=i)=\sum_{i\in V}\pi(i)P(t)_{ij}=\pi_t(j)$$

を得る. 従って,

$$\mathbb{E}[f(X_t)]=\sum_{j\in V}f(j)\mathbb{P}(X_t=j)=\sum_{j\in V}f(j)\pi_t(j)=\mathbb{E}_{\pi_t}[f]$$

が成り立つ. この式を Lf にも適用することで, 式 (4) より式 (5) が従う. □

3. 結晶格子とコホモロジー

この章では結晶格子とコホモロジーの理論を扱う．結晶格子の基本的な性質は [7] に書かれている. いま, V を可算集合として $E \subset V \times V$ を考える. 組 (V, E) は V を頂点集合, E を辺集合とする有向グラフとなる. 以下, グラフ (V, E) は連結で, 任意の $x, y \in V$ に対して $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in V$ が成り立つこと（対称性）, 任意の $x \in V$ に対して $(x, x) \notin E$ が成り立つこと（単純性）, 任意の $x \in V$ に対して, $(x, y) \in E$ となる $y \in V$ は有限であること（局所有限性）を仮定する.

定義 3.1. 自然数 $d > 0$ に対して, グラフ (V, E) に自由アーベル群 $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ の自由な作用が与えられ, 商 $(V/\Gamma, E/\Gamma)$ が有限グラフとなるとき, (V, E) は d 次元の**結晶格子**であるという. また, 群 Γ を**格子群**とよぶ.

d 次元の結晶格子の典型的な例は, ユークリッド格子 $(\mathbb{Z}^d, E)$ で与えられる．ただし $x = (x_i) \in \mathbb{Z}^d$ に対して $|x| \coloneqq \sum_i |x_i|$ として, $E \coloneqq \{x, y \in \mathbb{Z}^d \mid |x - y| = 1\}$ と定義する．また, $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ の $(\mathbb{Z}^d, E)$ への作用は, たし算による平行移動とする.
いま $C(V)$ を V 上の実数値関数全体として,

$$C(E) \coloneqq \mathrm{Map}^{\mathrm{alt}}(E, \mathbb{R}) = \{\omega \in \mathrm{Map}(E, \mathbb{R}) \mid \omega((x, y)) = -\omega((y, x))\}$$

とおく. $C(V)$ は V 上の**関数**, $C(E)$ は V 上の**微分形式**を表す. また, 微分（差分）を

$$\partial \colon C(V) \to C(E), \qquad \partial f((x, y)) \coloneqq f(y) - f(x) \quad \forall (x, y) \in E \tag{6}$$

と定義する. このとき, $\partial f = 0$ ならば f は定数関数である. 微分は Γ の作用と同変である. $(\partial C(V))^\Gamma \subset \partial C(V)$ と $C(V)^\Gamma \subset C(V)$ を, それぞれの Γ 不変部分空間とする.

定義 3.2. 格子群 Γ の結晶格子 (V, E) の同変コホモロジーを

$$H^1_\Gamma(V) \coloneqq (\partial C(V))^\Gamma / \partial\big(C(V)^\Gamma\big)$$

と定義する. ただし Γ は (V, E) の格子群とする.

ユークリッド格子のように結晶格子 (V, E) が, $(V/\Gamma, E/\Gamma)$ の最大アーベル被覆となっている場合, $H^1_\Gamma(V) = H^1(V/\Gamma)$ となり, 同変コホモロジーは商グラフ $(V/\Gamma, E/\Gamma)$ のグラフのコホモロジーと一致することが知られている. いま, Γ 不変な完全微分形式 $\omega \in (\partial C(V))^\Gamma$ を考える. 定義より $f \in C(V)$ が存在して $\partial f = \omega$ となる. ω の Γ 普遍性より任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\partial(\gamma f - f) = 0$ となり, $\gamma f - f$ は V 上の定数関数となる. ここで, ω の γ による積分を以下のように定義する.

$$\int_\gamma \omega \coloneqq \gamma f - f \in \mathbb{R}$$

定理 3.3. 上記の $\mathbb{R}$ 線形写像より, 同変コホモロジーについて以下の同型が与えられる.

$$H^1_\Gamma(V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{R}), \qquad \omega \mapsto \Big(\gamma \mapsto \int_\gamma \omega\Big).$$

【証明】. 写像 $\omega \mapsto \left(\gamma \mapsto \int_\gamma \omega\right)$ は, 完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C(V) \xrightarrow{\partial} \partial C(V) \longrightarrow 0$$

の Γ 不変部分を取ることによって得られる長完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C(V)^\Gamma \xrightarrow{\partial} (\partial C(V))^\Gamma \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \cdots$$

の境界準同型 δ と一致する. この完全系列より, 単射 $H^1_\Gamma(V) = (\partial C(V))^\Gamma / \partial (C(V)^\Gamma) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{R})$ が導かれる. V の Γ の作用による基本領域を Λ として, 任意の $\tau \in \Gamma$ に対して $1_{\tau^{-1}\Lambda}$ を $\tau^{-1}\Lambda \subset V$ の特性関数とする. $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{R})$ に対して $f_\psi := \sum_{\tau \in \Gamma} \psi(\tau) 1_{\tau^{-1}\Lambda}$ とおくと, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma f_\psi - f_\psi = \psi(\gamma)$ となり, $\partial f_\psi \in (\partial C(V))^\Gamma$ が示される. 従って, $\psi = \delta(\partial f_\psi)$ である. 以上より, 定理の主張を得る. □

4. 結晶格子上の多粒子系

この節では, 結晶格子上の多粒子系と配置空間のコホモロジーを解説する. 多粒子系の一番簡単な例は 1 次元ユークリッド格子 $(\mathbb{Z}, E)$ 上の排他過程である. これは, 各格子点が最大 1 つの粒子によって占有され, 隣接する格子点が空いている場合に限り, 粒子が一定の頻度で隣接点へ移動する過程である. より厳密に定式化すると, 各格子点 $x \in \mathbb{Z}$ における状

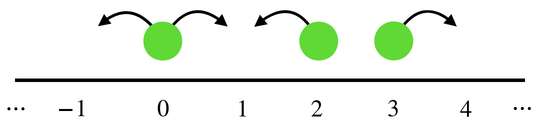

Figure 1. $\mathbb{Z}$ 上の排他過程

態は 0 または 1 で表され, 0 はその格子点が空であること, 1 はその格子点に粒子があることを示す. したがって, 各格子点の状態を表す局所状態の集合は $S = \{0, 1\}$ であり, 系のすべての可能な配置は, 配置空間

$$S^{\mathbb{Z}} := \prod_{z \in \mathbb{Z}} S$$

の元として表される. 辺 $(x, y) \in E$ に対して, 格子点 x と y 上可能な状態の組み合わせは

$$S \times S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$$

で表される. このとき, $(1,0) \in S \times S$ は格子点 x が占有され y が空である状態を示し, $(1,1) \in S \times S$ は格子点 x と y がともに粒子に占有されている状態を示す. 排他過程において隣接する格子点間で許容される状態の遷移は, $S \times S$ を頂点集合として

$$\phi_+ = \{((1,0), (0,1))\} \subset (S \times S) \times (S \times S)$$

Figure 2. 排他過程の隣接格子間の遷移則

を辺集合とする有向グラフ $(S\times S,\phi_+)$ で表される（Fig. 2）. 始点 x に粒子があり, 終点 y に粒子が無い場合のみ遷移がおこる. この規則は辺 (x,y) の選び方に依らない. $(S\times S,\phi_+)$ を**排他則**とよび, 排他過程における隣接格子点間の遷移則を記述する数学的対象とみなす.

より複雑な系を考える場合, S を一般の空でない有限集合として, $\phi_+\subset(S\times S)\times(S\times S)$ を考える. $\varphi=((s_1,s_2),(s_1',s_2'))\in\phi_+$ に対して $\varphi^\iota:=((s_2',s_1'),(s_2,s_1))$ を始点と終点の役割を入れ替えた, 逆方向の辺とする. また, $\phi_+^\iota:=\{\varphi^\iota\mid\varphi\in\phi_+\}$ として, $\phi:=\phi_+\cup\phi_+^\iota\subset(S\times S)\times(S\times S)$ を両方向を合わせた辺集合とする.

定義 4.1. 有向グラフ $(S\times S,\phi_+)$ を考える. $\phi=\phi_+\cup\phi_+^\iota$ に対して $(S\times S,\phi)$ が対称な有向グラフとなるとき, ϕ_+ を**遷移則**とよぶ. 以下, 組 (S,ϕ_+) も遷移則と呼ぶことにする.

様々な遷移則の例は [5] で挙げられている. (V,E) を結晶格子としたとき, 結晶格子上の状態の配置は配置空間 $S^V:=\prod_{x\in V}S$ の元として表される. $\eta=(\eta_x),\eta'=(\eta_x')\in S^V$ に対して, ある $(x,y)\in E$ が存在して $((\eta_x,\eta_y),(\eta_x',\eta_y'))\in\phi_+$ が成り立つとき, η から η' へ遷移できると考える. $\Phi_E=\{(\eta,\eta')\in S^V\times S^V\mid\exists(x,y)\in E,\ ((\eta_x,\eta_y),(\eta_x',\eta_y'))\in\phi_+\}$ とおくと, 遷移則の定義より (S^V,Φ_E) は対称グラフとなる. 結晶格子上の大規模相互作用系は, Φ_E を遷移とする S^V 上の確率過程として実現する. しかしながら結晶格子上のランダムウォークの場合と同様の議論はそのままでは必ずしも成り立たない. 例えば (2) と同様に $(\eta,\eta')\in\Phi_E$ に対して遷移率 $c_{\eta\eta'}>0$ を定めて $f\in C(S^V)$ に対して無限小生成作用素を

$$Lf(\eta)=\sum_{(\eta,\eta')\in\Phi_E}c_{\eta\eta'}(f(\eta')-f(\eta))$$

と定義しようとすると, (S^V,Φ_E) は局所有限とは限らないために, 右辺は一般的には無限和となり値は定まらない. 多粒子系を扱うために，まず局所関数を導入する.

定義 4.2. 関数 $f\colon S^V\to\mathbb{R}$ について, ある有限な $\Lambda\subset X$ が存在して, 任意の $\eta=(\eta_x)\in S^V$ に対して $f(\eta)$ が $(\eta_x)_{x\in\Lambda}$ だけに依存するとき, f は（Λ に関する）**局所関数**であるという.

$C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ を S^V 上の局所関数全体とすると, 局所関数 f に対して Lf も S^V 上の局所関数となり, $L\colon C_{\mathrm{loc}}(S^V)\to C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ が定義される. 次に関数の微分を考える. $E_+:=E\times\phi_+$ として, 任意の $\eta=(\eta_z)\in S^V$ に対して, 配置 η の $e=((x,y),\varphi)\in E_+$ による遷移 $\eta^e=(\eta_z^e)\in S^V$ を, (η_x,η_y) が φ の始点と一致する場合に (η_x^e,η_y^e) を φ の終点として定義する. より具体的

に $\varphi = ((s_1, s_2), (s_1', s_2')) \in (S\times S)\times(S\times S)$ のとき, $z \neq x, y$ に対して $\eta^e_z \coloneqq \eta_z$ とおき,

$$(\eta^e_x, \eta^e_y) \coloneqq \begin{cases} (\eta_x, \eta_y) & (\eta_x, \eta_y) \neq (s_1, s_2) \\ (s_1', s_2') & (\eta_x, \eta_y) = (s_1, s_2) \end{cases}$$

と定義する. $f \in C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ と $e \in E_+$ に対して $\nabla_e f(\eta) \coloneqq f(\eta^e) - f(\eta)$ とおくと, e での微分 $\nabla_e \colon C_{\mathrm{loc}}(S^V) \to C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ が定義される. 微分 (6) の類似として $C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ の微分を

$$\nabla \colon C_{\mathrm{loc}}(S^V) \to \prod_{e\in E_+} C_{\mathrm{loc}}(S^V), \qquad \nabla f = (\nabla_e f)_{e\in E_+}$$

と定義する. 結晶格子の格子群 Γ は, 上記に同変的に作用する. しかしながら $C_{\mathrm{loc}}(S^V)^\Gamma$ は定数関数のみとなってしまうために, 定義 3.2 と同様に (S^V, Φ_E) の同変コホモロジーを定義することは叶わない. ここで導入するのが, 佐々田氏により提唱された「一様関数」の概念である（[1,2]）. 以下, 実数 $R > 0$ と $x \in V$ に対して, $B(x, R) \subset X$ を中心 $x \in V$, 半径 R のグラフ (V, E) 内の閉円板とする.

定義 4.3. S^V 上の局所関数の族 $(f_x)_{x\in V}$ に対して, ある $R > 0$ が存在して, f_x は $B(x, R)$ に関する局所関数とする. このとき, 局所関数の形式和 $\sum_{x\in V} f_x$ を, S^V 上の**一様関数**とよぶ.

一様関数 $f = \sum_{x\in V} f_x$ が与えられたとき, $\nabla_e f_x$ は e の頂点が $B(x, R)$ の点と交わらないと 0 となる. 従って, $\nabla_e f = \sum_{x\in V} \nabla_e f_x$ は有限和であり, 局所関数である. S^V 上の一様関数全体の空間を $C_{\mathrm{unif}}(S^V)$ とすると, 微分

$$\nabla \colon C_{\mathrm{unif}}(S^V) \to \prod_{e\in E_+} C_{\mathrm{loc}}(S^V), \qquad \nabla f = (\nabla_e f)_{e\in E} \tag{7}$$

が定義される. 格子群 Γ は上記に同変に作用する.

定義 4.4. 格子群 Γ の結晶格子 (V, E) を考える. (S, ϕ_+) を遷移則としたとき, 結晶格子上の配置空間の同変一様コホモロジーを, 以下のように定義する.

$$H^1_\Gamma(S^V) \coloneqq (\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma / \nabla(C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma)$$

次に, 同変一様コホモロジーを具体的に計算する. このために最初に, 遷移則に付随する保存量を定義する. (S, ϕ_+) を遷移則として, $\phi \coloneqq \phi_+ \cup \phi_+^\iota$ とする. 遷移則の定義より, $(S\times S, \phi)$ は対称グラフとなる.

定義 4.5. 関数 $\xi \colon S \to \mathbb{R}$ に対して, $S \times S$ 上の関数 $\xi_{\{1,2\}}(s_1, s_2) \coloneqq \xi(s_1) + \xi(s_2)$ がグラフ $(S\times S, \phi)$ の連結成分上定数のとき, ξ は遷移則 (S, ϕ_+) の**保存量**であるという.

保存量は, 粒子の数やエネルギーなど, 系の状態を抽出するための関数である. 定数関数は自明に保存量である. $\mathrm{Consv}^\phi(S)$ を遷移則 (S, ϕ_+) の保存量全体の空間を, 定数関数からなる部分空間で割った商空間とする. 保存量 $\xi \colon S \to \mathbb{R}$ を考える. 任意の $x \in V$ に対して, $\xi_x \colon S^V \to \mathbb{R}$ を $\xi_x(\eta) \coloneqq \xi(\eta_x)$ と定義する. すると,

$$\xi_V \coloneqq \sum_{x\in V} \xi_x$$

は一様関数である．定数関数は一様関数であることから, $C^0_{\mathrm{unif}}(S^V)$ を一様関数全体の空間 $C_{\mathrm{unif}}(S^V)$ を定数関数からなる部分空間で割った商空間とすると, 単射な $\mathbb{R}$ 線形写像

$$\mathrm{Consv}^{\phi}(S) \to C^0_{\mathrm{unif}}(S^V), \qquad \xi \mapsto \xi_V \tag{8}$$

が導かれる．定数関数の微分は消えるため，微分 (7) は $C^0_{\mathrm{unif}}(S^V)$ 上定義され, $\nabla C^0_{\mathrm{unif}}(S^V) = \nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V)$ となる．また, 保存量は遷移で不変なため, $\mathrm{Consv}^{\phi}(S)$ の像は $\mathrm{Ker}\,\nabla$ に含まれる．

任意の $(s_1, s_2) \in S \times S$ に対して (s_1, s_2) と (s_2, s_1) がグラフ $(S \times S, \phi)$ の同じ連結成分に入るとき, 遷移則 (S, ϕ_+) は**交換可能**であるという．

定理 4.6. (V, E) を結晶格子とする．遷移則 (S, ϕ_+) が交換可能であれば, 式 (8) の単射は同型 $\mathrm{Consv}^{\phi}(S) \cong \mathrm{Ker}\,\nabla$ を誘導する．

【証明】．[3, Theorem 3.11] 参照. 写像で与えられる遷移則の場合は [1, Theorem 3.7]. □

系 4.7. 定理 *4.6* の状況で, 同変一様コホモロジーは下記によって与えられる．

$$H^1_{\Gamma}(S^V) \cong H^1_{\Gamma}(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Consv}^{\phi}(S).$$

【証明】．完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Consv}^{\phi}(S) \longrightarrow C^0_{\mathrm{unif}}(S^V) \xrightarrow{\nabla} \nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V) \longrightarrow 0$$

の Γ 不変部分を取ることによって得られる長完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Consv}^{\phi}(S) \longrightarrow C^0_{\mathrm{unif}}(S^V)^{\Gamma} \xrightarrow{\nabla} (\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^{\Gamma} \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathrm{Consv}^{\phi}(S)) \longrightarrow \cdots$$

より, 単射 $\delta\colon H^1_{\Gamma}(S^V) = (\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^{\Gamma}/\nabla(C_{\mathrm{unif}}(S^V)^{\Gamma}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathrm{Consv}^{\phi}(S))$ を得る．V の Γ の作用による基本領域を Λ として, 任意の $\tau \in \Gamma$ と $\xi \in \mathrm{Consv}^{\phi}(S)$ に対して $\xi_{\tau^{-1}\Lambda} := \sum_{x \in \tau^{-1}\Lambda} \xi_x$ とする．いま, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathrm{Consv}^{\phi}(S))$ とすると, 任意の $\tau \in \Gamma$ に対して $\psi(\tau) \in \mathrm{Consv}^{\phi}(S)$ である．$\mathfrak{A}_{\psi} := \sum_{\tau \in \Gamma} \psi(\tau)_{\tau^{-1}\Lambda} \in C_{\mathrm{unif}}(S^V)$ とおくと, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma\mathfrak{A}_{\psi} - \mathfrak{A}_{\psi} = \psi(\gamma)_X$ となり, $\nabla\mathfrak{A}_{\psi} \in (\nabla C_{\mathrm{unif}}(V))^{\Gamma}$ が示される．従って, $\psi = \delta(\nabla\mathfrak{A}_{\psi})$ となる．この計算より，δ は全射であることが導かれる (詳細の計算は [1, Proposition 5.18] を参照). 系の主張は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathrm{Consv}^{\phi}(S)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Consv}^{\phi}(S)$ と定理 3.3 より従う． □

以上より，一様関数は，配置空間のコホモロジーを考える上で，自然で有用な概念であることが分かる．

5. 多粒子系の配置空間の調和解析

本節では配置空間 (S^V, Φ_E) 上の調和形式と無限小生成作用素の関係を扱う．まず，遷移率を定める．$(r_e)_{e \in E_+}$ を局所関数 $r_e\colon S^V \to \mathbb{R}_{>0}$ の族として，任意の $\gamma \in \Gamma$ と $\eta \in S^V$ に対して $r_{\gamma e}(\gamma\eta) = r_e(\eta)$ が成り立つと仮定する．任意の $\eta \in S^V$ と $e \in E_+$ に対して $\eta^e \neq \eta$ のと

き，$r_e(\eta)$ は η から η^e への遷移率を表していると考える．このとき，$f \in C_{\mathrm{unif}}(S^V)$ に対して無限小生成作用素を

$$Lf(\eta) \coloneqq \sum_{e \in E_+} r_e(\eta)(f(\eta^e) - f(\eta)), \qquad \eta \in S^V$$

と定義する．これは S^V 上の連続時間マルコフ過程を与える．

次に S に離散位相を考え，S^V を直積位相によるボレル可測空間とみなす．$s \in S$ に対して $\nu(s) > 0$ をみたす S 上の確率測度 ν を考えて，$\mu \coloneqq \prod_{x \in V} \nu$ を S^V 上の直積測度とする．$f, g \in C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ に対して，内積を

$$\langle f, g \rangle_\mu \coloneqq \int_{S^V} fg\mu = \mathbb{E}_\mu[fg], \qquad \langle f, g \rangle_{r_e\mu} \coloneqq \int_{S^V} r_e fg\mu = \mathbb{E}_\mu[r_e fg]$$

と定義する．これらの内積で $C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ を完備化して得られるヒルベルト空間を $L^2(\mu)$ や $L^2(r_e\mu)$ などと記す．

$$(\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma \subset \prod_{e \in E_+/\Gamma} C_{\mathrm{loc}}(S^V) \subset \prod_{e \in E_+/\Gamma} L^2(r_e\mu)$$

である．ヒルベルト空間の有限直積 $\prod_{e \in E_+/\Gamma} L^2(r_e\mu)$ は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{r_e\mu}$ の直積で与えられる内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{r\mu}$ で自然とヒルベルト空間になることから，$(\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma$ の閉包 $\overline{(\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma} \subset \prod_{e \in E_+/\Gamma} L^2(r_e\mu)$ もまた $\langle \cdot, \cdot \rangle_{r\mu}$ を内積とするヒルベルト空間となる．微分 (7) の双対は，$\mathbb{R}$ 線形写像

$$\nabla^* \colon \overline{(\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma} \to (C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma)^\vee$$

を定義する．ただし $(C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma)^\vee$ は $C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma$ 上の $\mathbb{R}$ 線形写像全体の空間とする．定義より $\nabla^*\omega(g) = \langle \omega, \nabla g \rangle_{r\mu}$ をみたす．これより，結晶格子上の配置空間の ホッジの分解定理に相当する以下の定理を証明できる．

定理 5.1. $\mathcal{H}(r\mu) \coloneqq \operatorname{Ker} \nabla^*$ を調和形式とよぶ．結晶格子の配置空間の同変一様コホモロジーは，以下の通り調和形式で表される．

$$H^1_\Gamma(S^V) \cong \mathcal{H}(r\mu).$$

【証明】．任意の $\omega \in \overline{(\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma}$ に対して, $\nabla^*\omega = 0$ であることと任意の $g \in C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma$ に対して $\nabla^*\omega(g) = \langle \omega, \nabla g \rangle_{r\mu} = 0$ が成り立つことは同値であることから，$\mathcal{H}(c\pi)$ は $\overline{(\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma}$ の中で $\nabla(C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma)$ の直交補空間となっている．定理の主張は，同変一様コホモロジーの定義と収束の議論（[4, Theorem 3.2, Corollary 3.4] 参照）による． □

定理 5.1 は，以下の分解が与えられていることを意味する．

$$\overline{(\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma} \cong \mathcal{H}(r\mu) \oplus \overline{\nabla(C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma)}. \tag{9}$$

関数 $f \in C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma$ に対して局所関数 $f_0 \in C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ が存在して $f = \sum_{\tau \in \Gamma} \tau f_0$ と表されることが知られている．$f, g \in C_{\mathrm{unif}}(S^X)^\Gamma$ に対して $f = \sum_{\tau \in \Gamma} \tau f_0$，$g = \sum_{\tau \in \Gamma} \tau g_0$ と表される

とき，直積測度 μ は $\tau \in \Gamma$ の作用により平行移動で不変であることから，

$$\langle f, g\rangle_{\mathrm{unif}} \coloneqq \sum_{\tau\in\Gamma}\langle \tau f_0, g_0\rangle_\mu = \sum_{\tau\in\Gamma}\langle f_0, \tau g_0\rangle_\mu$$

とおくと，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{unif}}$ は $C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma$ の双線形写像を定義する．これより線形写像 $C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma \to (C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma)^\vee$ が定義される．

定義 5.2. (S, ϕ_+) を交換可能な遷移則とする．結晶格子 (V, E) 上の配置空間の**ラプラシアン**を以下のように定義する．

$$\mathcal{L} \coloneqq -\nabla^*\nabla\colon C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma \to (C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma)^\vee$$

S^V 上の直積測度 μ が任意の $\eta \in S^V$ と $e \in E_+$ に対して

$$f_e(\eta)\mu(\eta) = r_{\bar{e}}(\eta^e)\mu(\eta^e)$$

をみたすとき，測度 μ は遷移率 r に対して釣り合い条件をみたすという．ラプラシアンを定義に基づいて計算すると，以下の命題を得る．これは，多粒子系の無限小生成作用素が，配置空間の幾何学的なラプラシアンと解釈できることを意味している（[4] 参照）．

命題 5.3. (S, ϕ_+) を交換可能な遷移則とする．(V, E) を結晶格子として，測度 μ は配置空間 S^V 上遷移率 r に対して釣り合い条件をみたすとする．このとき，任意の $g \in C_{\mathrm{unif}}(S^V)$ に対して

$$\langle \mathcal{L} f, g\rangle_{\mathrm{unif}} = \langle \frac{1}{2} L f, g\rangle_{\mathrm{unif}}$$

が成り立つ．すなわち，$(C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma)^\vee$ の中で $\mathcal{L} = \frac{1}{2}L$ が成り立つ．

以降，上記の結果が流体力学極限にどう反映されるか，概要を解説する．詳細は [4] などを参照いただきたい．$f = \sum_x f_x \in C_{\mathrm{unif}}(S^V)$ と $g \in C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ に対して $\langle f, g\rangle_\mu \coloneqq \sum_x \langle f_x, g\rangle_\mu$ と定義すると，f の一様性から上記は有限和として定まり，局所関数の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ を拡張する形で $C_{\mathrm{unif}}(S^V)$ と $C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ の間の双線形写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ を定める．いま，$A_{\mathrm{unif}}(S^V) \coloneqq (C_{\mathrm{unif}}(S^V)/\ker\nabla)$ として，$A_{\mathrm{loc}}(S^V) \coloneqq (\mathrm{Ker}\,\nabla)^\perp = \{g \in C_{\mathrm{loc}}(S^V) \mid \forall f \in \mathrm{Ker}\,\nabla\ \langle f, g\rangle_\mu = 0\}$ とすると，$\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ は $A_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma$ と $A_{\mathrm{loc}}(S^V)_\Gamma$ の間の双線形写像を誘導する．

いま単射 $A_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma \xhookrightarrow{\nabla} \prod_{e\in E_+/\Gamma} L^2(r_e\mu)$ に対して，L^2 空間から $A_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma$ に誘導される内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ と定義し，この内積による完備化として定義されるヒルベルト空間を $\mathscr{H}_1$ と記す．構成よりヒルベルト空間の内積を保つ以下の同型を得る．

$$\mathscr{H}_1 \cong \overline{(\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma} \subset \prod_{e\in E_+/\Gamma} L^2(r_e\mu) \tag{10}$$

命題 5.4. $g \in A_{\mathrm{loc}}(S^V)$ とする．このとき，写像 $\langle\cdot, g\rangle_\mu\colon A_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma \to \mathbb{R}$ は，$\mathscr{H}_1$ によって誘導される位相により連続である．

この事実を認めると，任意の $g \in A_{\mathrm{loc}}(S^V)$ に対してリースの表現定理より $\theta(g) \in \mathscr{H}_1$ が存在して，$\langle\cdot,\theta(g)\rangle_1 = \langle\cdot, g\rangle_\mu$ が成り立つ．このことより，線形写像 $\theta\colon A_{\mathrm{loc}}(S^V)_\Gamma \to \mathscr{H}_1$ が

定義される．$A_{\mathrm{loc}}(S^V)_\Gamma/\mathrm{Ker}\,\theta$ に $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ より誘導される内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle_{-1}$ と定義し，この内積による完備化として定義されるヒルベルト空間（双対ソボレフ空間）を $\mathscr{H}_{-1}$ と記す．

いま，$f \in A_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma$ に対して

$$L_0 f(\eta) \coloneqq \sum_{e\in E_+/\Gamma} r_e(\eta)(f(\eta^e) - f(\eta)), \qquad \eta \in S^V$$

とおくと，$L_0\colon A_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma \to A_{\mathrm{loc}}(S^V)_\Gamma$ が定義される．このとき，以下が導かれる．

定理 5.5. L_0 はヒルベルト空間の内積を保つ同型 $L_0\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_{-1}$ を誘導する．すなわち L_0 はユニタリ変換であり，逆写像は θ によって与えられる．

この結果をホッジ分解 (9) と $\mathscr{H}_1$ の定義 (10) と合わせると，$\mathscr{H}_{-1}$ に対して以下の分解

$$\mathscr{H}_{-1} \cong \mathcal{V}(r\mu) \oplus \overline{L(C_{\mathrm{loc}}(S^V))} \tag{11}$$

が証明できる．ただし $\mathcal{V}(r\mu)$ は同型 $\mathscr{H}_{-1} \cong \mathscr{H}_1 \cong \overline{(\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma}$ で $\mathcal{H}(r\mu)$ と対応する部分であり，二つ目の成分は $f \in C_{\mathrm{unif}}(S^V)^\Gamma$ とすると局所関数 $f_0 \in C_{\mathrm{loc}}(S^V)$ を用いて $f = \sum_{\tau\in\Gamma} \tau f_0$ と表され，$L_0 f = L f_0$ となることより導かれる．上記の分解が，非勾配系の流体力学極限の文脈で重要となる，バラダン分解（Varadhan Decomposition）である．

$A_{\mathrm{loc}}(S^V)$ 内の局所関数は，多粒子系の観測量を表している．(−1) ノルム $\|\cdot\|_{-1} \coloneqq \langle\cdot,\cdot\rangle_{-1}^{1/2}$ は，この可測量を時間積分した時の揺らぎの大きさ（長時間分散）を反映している．また分解 (11) において $\overline{L(C_{\mathrm{loc}}(S^V))}$ 部分は，長期的には寄与を残さず「消えてしまう」 成分である．従って，流体力学極限によって得られるマクロな偏微分方程式の拡散行列の情報は，$\mathscr{H}_{-1}$ の中で長時間にわたって累積的に残る調和形式成分 $\mathcal{V}(r\mu)$ から得られる．

従来の確率論の先行研究の場合，(−1) ノルムは V の有限部分集合ごとに定義されるノルムの極限として ad hoc に定義される．バラダン分解も，モデルに依存した解析的議論を重ねる必要があり，幾つかの特定のモデルに対して証明されただけであった．本研究 [4] では，多粒子系の配置空間の一様関コホモロジーの理論を構築することで，比較的一般的な大規模相互作用系に対して双対ソボレフ空間 $\mathscr{H}_{-1}$ を体系的に構成し，ホッジ分解との関係を通してバラダン分解 (11) を証明することに成功した．

6. 拡散行列と周期行列

この章では前章の枠組みを利用して，流体方程式の拡散行列について述べる．流体方程式を導出するとき，保存量で与えられる観測量が重要となる．相互作用 (S,ϕ) に対して，S 上の確率測度 ν で $\nu > 0$ をみたすもの全体を $\mathcal{M}$ と記す．$\nu \in \mathcal{M}$ を固定する．任意の保存量 $\xi \in \mathrm{Consv}^\phi(S)$ に対して $Z(\xi) \coloneqq \mathbb{E}_\nu[e^{-\xi}]$ として，S 上の関数を $\nu_\xi(s) \coloneqq (1/Z(\xi))e^{-\xi(s)}\nu(s)$ と定義する．このとき，$\nu_\xi \in \mathcal{M}$ を得る．この対応より $\iota\colon \mathrm{Consv}^\phi(S) \to \mathcal{M}$ が定義される．いま，保存量の空間の基底 $\xi^1, \dots, \xi^c \in \mathrm{Consv}^\phi(S)$ を固定して，保存量の期待値による写像

$$\varrho\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}^c, \quad \boldsymbol{\rho}(\nu) = (\mathbb{E}_\nu[\xi^1], \dots, \mathbb{E}_\nu[\xi^c])$$

を考える．このとき，合成写像 $\varrho\circ\iota\colon \mathrm{Consv}^\phi(S) \to \mathbb{R}^c$ は単射となることが示される．従って $D \coloneqq \varrho\circ\iota(\mathrm{Consv}^\phi(S)) \subset \mathbb{R}^c$ としたとき，$\boldsymbol{\rho} \in D$ に対して $\nu_{\boldsymbol{\rho}} \in \mathcal{M}$ が一意に定まり，

$\varrho(\nu_{\boldsymbol{\rho}}) = \boldsymbol{\rho}$ をみたす．結晶格子 (V, E) に対して $\mu_{\boldsymbol{\rho}} := \nu_{\boldsymbol{\rho}}^{\otimes V}$ は，各保存量の期待値が $\boldsymbol{\rho}$ となる S^V の直積測度を与える．特に $r = (r_e)_{e \in E}$ に対して $r_e(\eta)\mu_{\boldsymbol{\rho}}(\eta) = r_{\bar{e}}(\eta^e)\mu_{\boldsymbol{\rho}}(\eta^e)$ が任意の $\eta \in S^V$ と $e \in E$ に対して成り立つとき，$\mu_{\boldsymbol{\rho}}$ は可逆であると言い，期待値 $\boldsymbol{\rho} \in D$ で規定された多粒子系の平衡状態を表しているとみなす．特に最初の $\mu = \nu^{\otimes V}$ が可逆であれば，任意の $\boldsymbol{\rho} \in D$ に対して $\mu_{\boldsymbol{\rho}}$ も可逆となり，S^V 上の可逆な平衡状態を表す族 $\{\mu_{\boldsymbol{\rho}}\}_{\boldsymbol{\rho} \in D}$ が与えられる．以降，前章までの理論において測度を $\mu_{\boldsymbol{\rho}}$ として取る．

以下，簡単のため，結晶格子がユークリッド格子 $(\mathbb{Z}^d, E)$ の場合を考える．整数 $N > 0$ に対して $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ を $x \mapsto (1/N)x$ とすると，$\mathbb{Z}^d$ は $\mathbb{R}^d$ の細分を与える．実際に流体力学極限を考えるときは N を無限大まで飛ばす．いま，$S^{\mathbb{Z}^d}$ 上の局所関数 f に対して

$$L_e f(\eta) := r_e(\eta)(f(\eta^e) - f(\eta)), \qquad \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$$

と定義する．$O = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ を原点として，原点 O から $j = 1, \ldots, d$ 方向へ 1 だけ動いた辺を $e_j \in E$ と記す．また，$\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma$ を，$\mathbb{Z}^d$ の e_j 方向の単位平行移動を表すとする．このとき，$i = 1, \ldots, c$ と $j = 1, \ldots, d$ に対して，原点 O における保存量 ξ^i の j 方向の粒子流（current）w^i_j と勾配（gradient）u^i_j を，

$$w^i_j := L_{e_j}\xi^i_O, \qquad\qquad u^i_j := (\gamma_j - 1)\xi^i_O$$

と定義する．これは $A_{\mathrm{loc}}(S^{\mathbb{Z}^d})$ の局所関数を与える．流体力学極限の証明は，w^i_j が u^i_j の $\mathbb{R}$ 線形和で記述できる場合は「勾配型」と呼ばれ，相対的に簡単な場合として知られている．この場合の変換行列 $D(\boldsymbol{\rho}) \in GL_{cd}(\mathbb{R})$ は $\boldsymbol{\rho}$ に依存し，流体力学極限が証明されている場合には，流体方程式の拡散行列 (1) を与えている．

勾配型でない「非勾配型」の場合は，極めて難解な場合と認識されている．バラダンによる勾配置換（gradient replacement）では，$\mathscr{H}_{-1}$ 内で w^i_j と u^i_j を分解 (11) の $\mathcal{V}(r\mu_{\boldsymbol{\rho}})$ 成分に直交射影して，直交射影間の変換行列 $D(\boldsymbol{\rho}) \in GL_{cd}(\mathbb{R})$ を考える．$\mathcal{V}(r\mu_{\boldsymbol{\rho}})$ 以外の部分は流体方程式に影響を与えないと考えられている．実際，非勾配型で流体力学極限が知られている場合，拡散行列はこの $D(\boldsymbol{\rho})$ で与えられる．従来の先行研究では，双対ソボレフ空間 $\mathscr{H}_{-1}$ を構成して勾配置換をするという技術的指針はあったものの，構成がモデルごとに ad hoc であったために，バラダン分解の成立や $D(\boldsymbol{\rho})$ が一般的にうまく定義できるかは未知であった．[4] では，一般の結晶格子上，交換可能な遷移則が与えられたとき，$\mathscr{H}_{-1}$ を構成して分解 (11) を証明し，$\{w^i_j\}$ と $\{u^i_j\}$ の直交射影は $\mathcal{V}(r\mu_{\boldsymbol{\rho}})$ の $\mathbb{R}$ 基底を与えることを示した．この結果を用いると，一般の状況で $D(\boldsymbol{\rho})$ が定義される．

上記を踏まえて，[4] では以下を予想する．

予想 6.1. 一般の結晶格子上，交換可能な遷移法則が与えられ，遷移率 $r = (r_e)_{e \in E}$ に対して可逆な測度の族 $\{\mu_{\boldsymbol{\rho}}\}$ が与えられたとき，これらから定義される変換行列 $D(\boldsymbol{\rho})$ は，流体方程式の拡散行列 (1) を与える．

行列 $D(\boldsymbol{\rho})$ と配置空間の周期行列との関係は次の通りである．一様関数は，遷移率や測度に依存しない，位相幾何的な情報と捉えることができる．反面，遷移率や測度は，空間に内積（計量）を与えることから，微分幾何的な情報と捉えることができる．勾配 $\{u^i_j\}$ は

$\mathcal{V}(r\mu_\rho)$ の $\mathbb{R}$ 基底を与え，同型を通して調和形式の空間 $\mathcal{H}(r\mu_\rho)$ の基底を与える．反面，粒子流 $\{w^i_j\}$ は遷移率や測度に依存しない $(\nabla C_{\mathrm{unif}}(S^V))^\Gamma$ の元と対応する．両者の一様コホモロジーへの像は，$H^1_\Gamma(S^V)$ の $\mathbb{R}$ 基底を与え，変換行列 $D(\rho)$ は，微分幾何的な基底と位相幾何的な基底の変換行列と解釈できる．これはまさしく $D(\rho)$ が, 配置空間の一様コホモロジー $H^1_\Gamma(S^V)$ の周期行列と呼ぶに相応しいものであることを示している．

当初確率論の研究を始めたとき，数論幾何の知見が有用になるとは全く想像できていなかった．この文脈で, 代数多様体の Hasse-Weil L 関数の特殊値の予想などの研究で, 筆者に馴染み深い周期行列の類似物が現れたことは，深い驚きがあり，感慨深い．

謝辞. 本研究は，佐々田氏と亀谷幸生氏の研究に，筆者が論文 [1] で参入したことにより始まった．数論幾何を専門とする筆者に確率論の世界を紹介していただいた佐々田氏に感謝する．この研究は，JST CREST「作用素論的データ解析に基づく複雑ダイナミクス計算基盤の創出」戦略的研究」（代表：河原吉伸）及び，科研費・挑戦的研究（萌芽）「無限直積空間上の幾何学の創出による流体力学極限の普遍的理論体系の構築」（代表：佐々田槙子）の支援を受けている．確率論の話題にも関わらず，本研究集会で発表・掲載の機会をくださった世話人の三枝洋一先生，中村健太郎先生，杉山真吾先生に感謝する．拡散行列という確率論的な量が，整数論・数論幾何で馴染みある周期行列として解釈できることは興味深い．整数論とより広い分野との研究をつなげるきっかけとなれば幸いである．

参考文献

[1] K. Bannai, Y. Kametani, and M. Sasada, *Topological Structures of Large Scale Interacting Systems via Uniform Functions and Forms*, Forum Math. Sigma **12** (2024), e107.

[2] K. Bannai and M. Sasada, *A Decomposition Theorem of Varadhan Type for Co-local Forms on Large Scale Interacting Systems* (2021), to appear from RIMS Kôkyûroku Bessatsu, available at `arXiv:2105.06043[math.PR]`.

[3] ———, *On Uniform Functions on the Configuration Space of Large Scale Interacting Systems* (2024), preprint, available at `arXiv:2408.12886[math.PR]`.

[4] ———, *Inverse Harmonic Periods and the Diffusion Matrices associated to Large Scale Interacting Systems* (2025), in preparation.

[5] K. Bannai, J. Koriki, M. Sasada, H. Wachi, and S. Yamamoto, *On Interactions for Large Scale Interacting Systems* (2024), preprint, available at `arXiv:2410.06778[math.PR]`.

[6] M. Z. Guo, G. C. Papanicolaou, and S. R. S. Varadhan, *Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions*, Comm. Math. Phys. **118** (1988), no. 1, 31–59. MR954674

[7] T. Sunada, *Topological crystallography*, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, vol. 6, Springer, Tokyo, 2013. With a view towards discrete geometric analysis. MR3014418

Email address: `bannai@math.keio.ac.jp`

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kouhoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan

Mathematical Science Team, RIKEN Center for Advanced Intelligence Project (AIP), 1-4-1 Nihonbashi, Chuo-ku, Tokyo 103-0037, Japan