動的幾何ソフトやプログラミングを利用したときの「多角形の内角の和」についての探究事例

愛知教育大学　飯島康之
Yasuyuki Iijima
Aichi University of Education

1 はじめに

新しい道具を使うことで，数学的探究がどう変わるのか，そして，それはどう生かすと教育的価値が生まれるのか，さらに教材化し，授業化していくプロセスを模索することが，数学教育学の側の基本的な課題になる([3])。分度器のようなアナログの道具の場合，「誤差」という言葉ですませてしまい数学的探究を深めることをしなかったことが，デジタルの場合には新しい数学的探究の可能性を生むことがある。三角形の内角の和に関する考察や教材化・授業化は過去にも取り組んだ([1],[2])。四角形の内角の和について，どのような数学的探究の様相がありうるかを明らかにするために，まず筆者自身が取り組んでみたところ，三角形の和の場合とはかなり異なり，特に予想と異なる事実の発見や AI の利用など教育的な示唆をえられた。そこで本論文では四角形の内角の和，つまり「内角をそれぞれ測定し，四捨五入によって整数値で表示し，その和を求める」ことに関連して，どのような事実の観察，問題の発生，暫定的解決，その吟味と命題や問題の再定式化などが生まれるのか，またそれに付随してどういう道具(数学ソフト,プログラム)の選択・改良や利用が生まれうるかに関して，筆者自身の探究の分析を中心に記述し，考察する。

2 「三角形の内角の和」の問題とその解決の概要

2.1 「三角形の内角の和」の問題

この問題は筆者にとっては「小学校の先生からの相談」から出発している。「どんな三角形でも内角の和は 180° になる」ことを実感させたいので,「好きな三角形をかきなさい。分度器で測りなさい。三つの角の大きさを加えるとどうなりますか」と児童に投げかけ，できれば全員，少なくとも大多数の児童が「180° になりました」という展開にしたいのに，実際には 180° にならない児童がかなり(40 名中 10 名程度)いる，という相談だった。その場の議論では「児童の測定スキルでは誤差が出てしまう

から仕方がないのだろう」となったのだが，動的幾何ソフトで検証可能な，次のような問題として捉えてみる。

問題 1: △ABC の 3 つの角を正確に測定し，正確に四捨五入し，正確に和を求めるなら，必ず 180° になるといえるだろうか。

この答えは No となる。たとえば，「∠A=60.3°，∠B=60.3°，∠C=59.4°」というような場合を想定すると，小数点以下を四捨五入した値の和は 179° になる。そこで，問いを次のように深める。

問題 2: △ABC の 3 つの角を正確に測定し，正確に四捨五入し，正確に和を求めるなら，どのような値がどのような確率で得られるのだろうか。

2.2 統計的確率を調べるための道具・解決と数学的確率についての考察

「定規・分度器」による測定を 100 回以上行うのは現実的ではない。動的幾何ソフトなら測定と表示精度の設定をし，頂点を動かして記録を取れるが，GC ではさらに「一つの点をランダムに 100 回動かし，測定値やその和を記録し csv ファイルに出力する」機能があるので，Excel を使って処理可能だ。100,1000 回の試行の集計結果は，図 1 のようになり，そこから統計的確率が推測できた。

和	100回	1000回	推測値
179	11	113	1/8
180	75	750	3/4
181	14	137	1/8

図 1 GC での測定・集計の様子と 100,1000 回の試行結果からの統計的確率の推測

出発点の「小学校の先生からの相談」に照らし合わせると，この結果は興味深い。40 人の子どもがいたら和が 180° にならない子が 10 人くらいいるというのは当然のことと解釈できるからだ。

数学的確率を求めるために，次のように考えた。

この試行では点の位置をランダムにとっているけれども，重要なのは，角の大きさの小数点以下の値なので，次の変数を考える。

x = ∠A の小数点以下の値，

y = ∠B の小数点以下の値，

z = ∠C の小数点以下の値

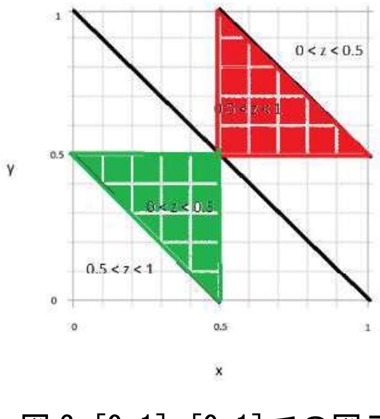


図 2 [0,1]x[0,1]での図示

z は x,y に関する従属変数になることと，（角の大きさの分布には複数の前提が考えられるが，）小数点以下なので一様分布になると仮定すると， x,y $\in$[0,1] なので，[0,1]x[0,1]の中で，和が 179, 180,181 となる領域を考え，その面積比で確率を考えることにした。その結果，図 2 が得られ，統計的実験で得られた結果が，数学的確率としても得られることがわかった。

3 「四角形の内角の和」に関する探究の概要

3.1 三角形の場合の振り返りと四角形の場合の予想

三角形の場合，x=∠A の小数部分，y=∠B の小数部分により，[0,1]x[0,1]に現象を表現できた。この領域の中で，z=(180-(∠A+∠B))の小数部分に関して，z=0, 0.5 の境界線が入り 8 個の領域で和がきまっていた。このことは， ∠A,∠B,∠C に関して，「切り上げ」「切り捨て」があり，それらの組み合わせに依存するので，2^3=8 通りに分割され，1/8, 6/8, 1/8 になったと理解できた。

このことを踏まえると，四角形に関しては，次のようなことが予想される。

(1) 現象は∠A,∠B,∠C,∠Dの小数部分によるものだが，∠Dは他に依存するので，[0,1] x[0,1]x[0,1]に表現できるだろう。

(2) 4 つの変数のそれぞれで「切り上げ」「切り捨て」があるので，2^4=16 通りになるはずだから，確率は k/16 という形になることが予想される。

(3) [0,1] x[0,1]x[0,1]の立方体の中に，斜平面が入って分割される領域として表現されるのだろう。

3.2 最初に使う道具とそれを使った実験から生まれた「3への疑問」

上記の予想は三角形の場合の数学的確率の考察に基づくものだが，数学的確率の考察をそのまま進めるよりも，統計的な実験を進めて確率の値を推測することからはじめることにした。紙の上で定規・分度器を使ってデータを数多く収集するのは現実的ではない。GC を使った実験も少し手間がかかる。2 点以上を動かすことが必要になるし，操作しながらデータを記録していくのは 100 回程度が現実的な限界になる。またランダムに位置を決めると四角形にならない場合も生まれてしまうので自動化にも難点がある。

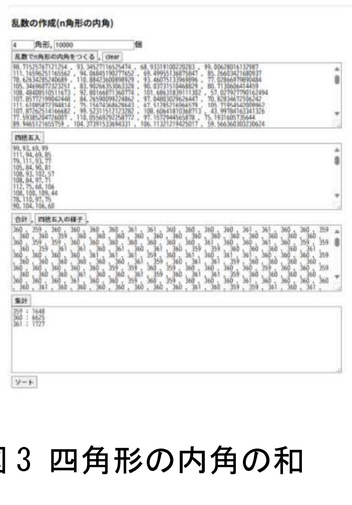


図 3 四角形の内角の和

この現象で重要なのは小数点以下の値なので，乱数を使って実験するプログラミングが妥当と考えた。モンテカルロ法での実験を，当初は Python を使ったのだが，いずれ生徒が使うことも想定すると， JavaScript で記述し，web ブラウザ上で使えるようにした。「n」角形に関して，正多角形の角の大きさを標準とし凸多角形になる範囲で角の値をランダムに設定する。それらの角の大きさを四捨五入した値と，その和を表示することを，指定回数だけ行い，その集計結果を表示している。
(https://yiijima.sakura.ne.jp/iijima/html5/01a_rndoms_angles_03.htm)

100000 回での結果は，次のようになった。

359° ： 16605 回，　360° ： 66770 回，　361° ： 16625 回

実験結果をみて，びっくりした。確率はそれぞれ 1/6, 2/3, 1/6 になると推測できるが，さきほどの予想では k/16 の形，つまり 3 の倍数が分母になるはずはないと思っていたからである。この「3 の存在」を解明することが，四角形の場合の突破口になるはずだ。

3.3　なにが問題なのか？- 次に観察すべきデータの選択・プログラミング・観察・解釈・吟味のサイクル -

3.3.1 「切り上げ・切り捨て」の数の分類とその割合

三角形のとき，切り上げ/切り捨てによる分類で 8 通りに分かれ，すべてが切り上げの場合が 181，すべてが切り捨ての場合が 179，それ以外の混在はすべて 180 になっていた。四角形の場合は 16 通り考えられるが「切り上げの数」に注目すれば，0 から 4 までの 5 通りになる。この 5 通りがそれぞれ発生する割合をまず調べてみることにした。図 2 でのプログラムを若干修正し，調べた結果が図 3 である。モンテカルロ法なので，ぴったり合わないとはいえ，想定される下記の結果とは合わない。

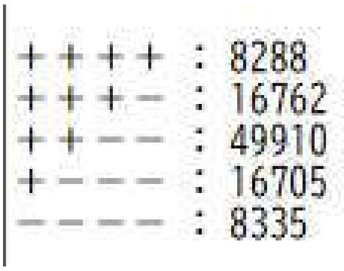


図 3 切り上げ数とその割合

++++, −−−−　1/16 = 0.0625,　+++−, +−−−　$_4C_1/16 = 0.25$,

++−−　$_4C_2/16 = 0.375$

図 3 の結果からは，次の確率が想定される。

++++,−−−− 1/12,　+++−, +−−− 1/6,　++−− 1/2

ここでも分母には「3」が存在していることがわかった。

＋＋＋＋ ： 8393
＋＋＋－ ： 4216
＋＋－＋ ： 4087
＋＋－－ ： 8154
＋－＋＋ ： 4186
＋－＋－ ： 8328
＋－－＋ ： 8381
＋－－－ ： 4159
－＋＋＋ ： 4149
－＋＋－ ： 8327
－＋－＋ ： 8524
－＋－－ ： 4191
－－＋＋ ： 8314
－－＋－ ： 4120
－－－＋ ： 4213
－－－－ ： 8258

最初の3つ	+	−
+++	2	1
++−	1	2
+−+	1	2
+−−	2	1
−++	1	2
−+−	2	1
−−+	2	1
−−−	1	2

＋＋＋＋ 361 ： 8411
＋＋＋－ 360 ： 2059
＋＋＋－ 361 ： 2130
＋＋－＋ 360 ： 2185
＋＋－＋ 361 ： 2152
＋＋－－ 360 ： 8217
＋－＋＋ 360 ： 2134
＋－＋＋ 361 ： 1994
＋－＋－ 360 ： 8353
＋－－＋ 360 ： 8369
＋－－－ 359 ： 2179
＋－－－ 360 ： 2085
－＋＋＋ 360 ： 2090
－＋＋＋ 361 ： 2043

図 4 16 通りの出現数　　図 5 3 つ目までと 4 つ目　　図 6 和との関わり（一部）

16 通りの出現相対度数は約 8300 のグループと約 4200 のグループに分かれる。これは重みづけが 2：1 とみることができる。この比率は何によってきまるのだろうか。三角形の場合は，8 通りのそれぞれは等確率だった。今回も三つまでの結果だけに注目するなら，それぞれ 125000 くらいになって等確率といえる。そこで三つ目までの結果と次の関係を観察すると，図 5 のようになった。三角形のときのように，3 つの角までの 8 通りが等確率で，その先が 2:1 に分かれるとすると，これが分母に登場する「3」の原因なのかもしれない。

さらに，この 16 通りに総和の値も加えて分析してみると，図 6 のようになった。つまり，＋＋＋＋のように，すべて 361 になるものもあるが，＋＋＋－のように 360 と 361 に半々で分かれるものもある。

3.3.3　具体的な数で確かめる

上記でわかったことに関して，三角形の場合と同様に，具体的な数を使って確認した。

(1)「－－－－」の場合

たとえば，90.2, 90.2, 90.3, 89.3 ならば 359 になる。このとき，すべての数で「減る」のだから，360 以上になるはずがない。また，減る数が 2 になるためにはどこかで 0.5 以上減ることが必要になり，それは不可能だから，必ず 359 になる。同様に「＋＋＋＋」のときは必ず 361 になる。

(2)「－－－＋」の場合

たとえば，90.1,90.1,90.1, 89.7 ならば，360 になり，90.4,90.4,90.4,88.8 なら 359 になる。減少の幅は 1.5 未満なので，358 にはなりえない。同様に，「＋＋＋－」のときは，360,361 になりうるが，362 にはなりえない。

(3)「－－＋＋」の場合

90.1, 90.1, 89.9, 89.9 ならば 360 になる。増加あるいは減少は 1 未満なので 361 や 359 をつくれずすべて 360 になる。

現れた現象について一通りの理解をすることができたが，改めて問題を整理した。

3.4　問題の整理とその解決

3.4.1 問題の整理

問題A．「切り上げ３，切り捨て１」のときに 359, 360 が 1:1 になるのはなぜか。
問題B．「∠A, ∠B, ∠C」に対して，∠D はどのような比率できまるのか。

3.4.2　問題 A に対する「最初の解決」

切り上げ３，切り捨て１の場合，４変数の小数点以下を x,y,z,w とすると，

1.5 ＜　3 数(x,y,z)の和　＜　3　となる。

ここで，x,y,z の 3 数が切り上げだとすると，

a．1.5 < x+y+z　<　2　のとき，w は切り捨て
b．2　< x+y+z　<　2 .5　のとき，w は切り上げ
c．2.5 < x+y+z　<　3　のとき，w は切り捨て

となる。w が切り捨ての場合を考えているので，a と c の場合だけを考えればいい。

a．1.5 < x+y+z　<　2　のとき，4 数の和は 361　（例　90.6, 90.6, 90.6, 88.2）
c．2.5 < x+y+z　<　3　のとき，4 数の和は 360　（例　90.9, 90.9, 90.9, 87.3）

x+y+z　がとりうる区間の長さは 0.5 ずつなので，確率は 1/2 ずつになる。

3.4.3　問題 B に対する「最初の解決」

この考え方を問題Ｂに使う。たとえば,「－－－」の場合 0 < x+y+z < 1.5 になる。

a．0　< x+y+z　<　0.5　のとき，w は切り上げ
b．0.5 < x+y+z　<　1　のとき，w は切り捨て
c．1　< x+y+z　<　1.5　のとき，w は切り上げ

となる。x+y+z の区間の長さは 0.5 ずつなので，w が切り上げ，切り捨てになる確率の比は２：１になる。これが，母数に「３」が生まれた原因と考えられると思えた。

3.4.4　検証すると推論結果と実験結果が逆転していることが判明

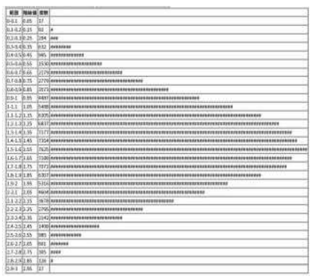
ところがである。上記の推論に基づけば「－－－」から「－－－－」になる確率は「－－－＋」になる確率の 2 倍になるはずだが，実際のデータ(図 4)で検証してみると逆なのだ。谷底に落とされた気持ちになった。

3.4.5　「3 数の和」の分布はどうなる？

x,y,z,w のそれぞれは一様分布になることを仮定しながら取り組んでいた。実際，これらは 4 つの角の大きさの小数点以下であり，w つまり∠D だけが特別なはずはないからだ。でもここでは，3 つの角の大きさの出方を 8 通りに分類しているので，そのそれぞれにおいても一様になるためには独立であることが必要なはずだ。サイコロ二つを振ったときの目の和は 7 が一番出やすいことが示唆するように，x+y+z の分布は一様分布とはかぎらない。そこで，「－－－」の場合を調べるために，x,y,z のすべてが 1 未満の一様分布のとき，和の分布がどうなるかを調べるためのプログラムを作り，調べてみたら，図 7 のような結果を得た。すべての値を半分にすればいいので，

$0< x+y+z < 0.5$ が　1/6，　$0.5< x+y+z <1$ が　2/3，　$1< x+y+z < 1.5$ が　1/6

つまり，w が切り上げになるのは合わせて 1/3，切り捨て 2/3 なので，比が 1:2 と逆転するため，この確率が正しいなら推論される確率と実験結果が一致する。



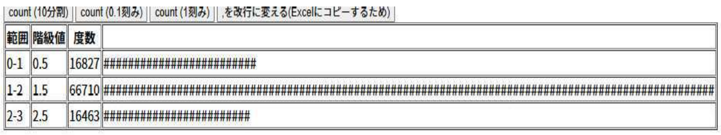


図 7 3 つの一様乱数の和のヒストグラム表示(31 分割，3 分割)

このことは，問題 A に関する解決も見直す必要性を実感させたが，想定する 2 つの場合は分布を下，中，上と 3 分割した両側（上と下）を意味するので，対称性から 2 つの場合の確率は等しいため，推論の記述は変えないといけないけれども，結論は変わらないことがわかった。

3.4.6　「3 数の和」の分布はどうなるはずか(CoPilot で調べる)

高校生だったら，この結果が正しいのかどうか教科書等ではわからないのでどうするだろうかと思ったとき，きっと AI に質問するのではないかと思い,CoPilot に質問してみた。「0 から 0.5 までの値をランダムにとる変数が 3 つあるとき，それらの合計の分布はどんな数式で表現されますか？」(実はこの質問に対して適切な答えが返ってこなくて問い方を変えてみたり，他の AI(chatGPT や Gemini)の結果も観察し，

比較するなど試行錯誤した。実際に AI を使うときにはそういう試行錯誤もあるだろうけれどここでは重要ではないので割愛し）最終的に，0.5 でなく， 1 に変えて質問することで得た答えを次に要約しておく。

(1)一様分布 U(0,1)に従う独立変数 x,y,z に対して, w = x+y+z の分布は，一様分布の畳み込みで得られ，Irwin-Hall 分布の一種になる。

(2)その確率密度関数 f(w)は次のように定義される。

$$f(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}w^2 & \text{for } 0 \leq w < 1 \\ \frac{1}{2}(-2w^2 + 6w - 3) & \text{for } 1 \leq w < 2 \\ \frac{1}{2}(w-3)^2 & \text{for } 2 \leq w \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

問題に合うように，関数を修正し，積分すると図 7 の結果を確認できた。さらに五角形，六角形, . . に一般化できるかどうかを確かめるため，n=5,6 等の場合の Irwin-Hall 分布の数式を質問し，それを使って確率を計算した。5 角形以上になると，さらに場合分けをする必要があるが，一般化への見通しを得た。そして，その結果は図 3 のプログラムで n=5,6 等について調べた結果と一致することがわかった。

最初 Irwin-Hall 分布の理論的根拠についての理解は深めないまま，CoPilot が示した結果を利用し，元の問題の一般化と検証を行うにとどまったけれども，Irwin-Hall 分布について AI に質問すると， n の値が大きくなるとたとえば CoPilot では計算に時間がかかったり，結果に疑問を感じることもうまれたりする。CoPilot の結果はどこまで信用していいのか不安になった。また，計算の仕方が明確になれば，mathematica などで正確な計算をすることができるのではないかと思った。

Irwin-Hall 分布の計算は，たたみこみの計算で行えることがわかったので，それは mathematica でならどういう関数で表現でき

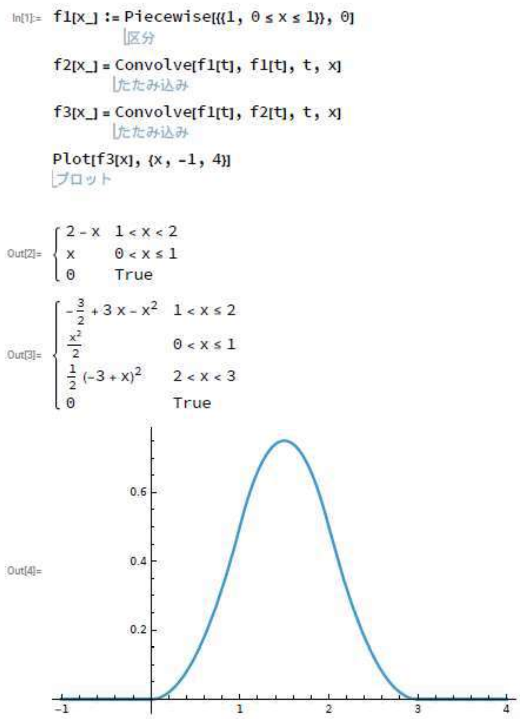


図８ mathematica での結果

るかを調べ， Piecewise 関数や Convolve 関数などを使って RasberryPi 4 上の mathemacica で計算してみると，n=11 くらいまである程度の時間で得られることを実感できた(図 8 は n=3 での結果)。結果は区間ごとの多項式で表示されるので，簡単に求められるのではないかと想像したけれども意外に時間がかかった。AI でこの問題の背景に Irwin-Hall 分布の存在やその数式を得て直接利用するという方法だけでなく，理論的に理解を深めるきっかけも，また数学ソフトを使って実験をひろげていくきっかけをえる可能性もあることを実感できた。このようなきっかけを得て，ひろげていく様子をレポートとしてまとめていくようなやり方は，今後増えていくのではないだろうか。

また，3.1 での予想(3)に関連して，[0,1]x[0,1]x[0,1]の立体がどう分割されるかを知人の中学校教諭の宇治野忠博氏が模型をつくり，また色分けした動画で考察してくれた。三角形の場合の基本領域が三角形なのに対して，今度は三角錐になることがわかる。「3 の存在」は三角錐の体積公式から納得する機会を得た。一方，Irwin-Hall 分布との関わりでいえば，それがなぜ区間別の多項式で表現されるかが不思議だったのだが，この模型はそれを幾何的に理解するきっかけを提供してくれた。数式に対して幾何的な理解を提供可能な事例であることも付記しておきたい。

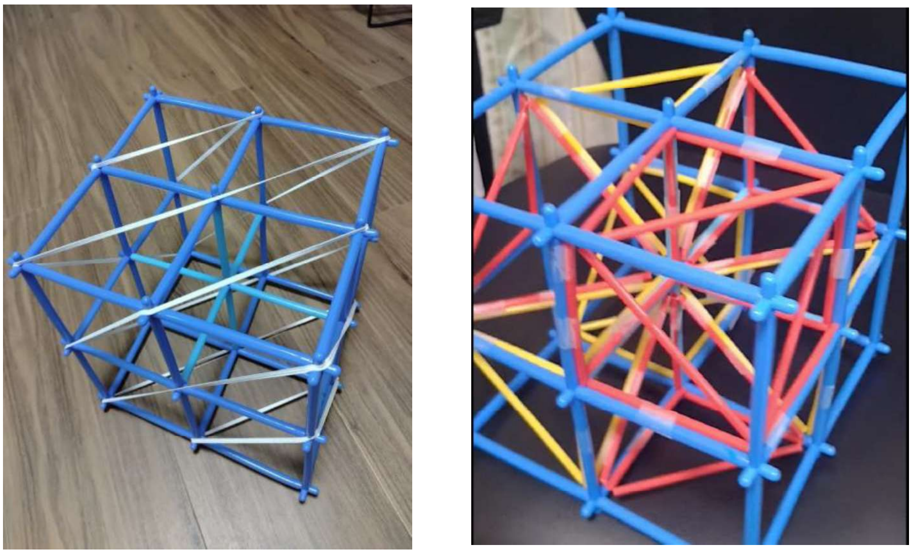


図９　宇治野氏による立方体の分割とその領域分け

4 考察

数学ソフトは内部計算の精度は高い。しかしそのままの結果を表示しても人間には適切ではないので，一定の精度で表示するのが普通だ。そのような意味において，内

部計算の誤差よりも四捨五入等に伴う誤差との接し方は教育的には重要と言える。三角形の内角の和の事例は，アナログの場合は「測定誤差」の存在を理由にして思考停止していた問題を数学的探究の対象に変え，連続変数の確率を考える機会を提供する上で教育的価値があるといえるだろう。それと比較すると四角形の内角の和は連続変数の和の分布が必要でかなり高度な事例になっていることがわかった。しかし，それ以上にこの素材の魅力は，三角形の場合から得られる予想に反する実験結果から「3の存在」という大きな謎を意識化でき，それを解明するために，観察すべき事実を意識化し，そのためにプログラムを改良し，結果を吟味したり考えるべき問題を再検討し,「分布を考察すべき」と焦点化していくプロセスなどにあるのではないだろうか。また今回，適切な疑問を AI に投げかけることで，未習であっても利用し，実験で確証をえるプロセスや，必要を感じたらそれを手がかりにその内容について学ぶ機会を得るという形で AI を利用できるという示唆を得られた点にもあると思う。

この問題を，そのままの形で高校生等がチャレンジするのはむずかしいかもしれないが,「四角形の内角の和」という，小中学生でも数学ソフトを使うときに遭遇する現象を素材として例示できたことは，身近なところに同様の素材があることを示唆していると考える。

参考文献等

[1] 飯島(2023) 幾何的体験を計算機で実現する：どのような体験や対話が生まれてくるか～ 動的幾何ソフト GC/html5 の開発と実践から ～，数理科学, 61(11), 39-46

[2] 飯島(2016) 作図ツール GC/html5 を用いた数学的探究における精度・誤差について-インタラクティブな探究に向けて-，教科開発学論集，4，111-121, http://hdl.handle.net/10424/6634

[3] 飯島(2013) 数学教育でのテクノロジー利用が生み出すさまざまな研究課題について ー作図ツール Geometric Constructor の研究開発に関連してー，教科開発学論集, 1,237-246, http://hdl.handle.net/10424/5274

GC/html5 https://yiijima-gc.org/

ボタンを押して簡単な数学実験,
https://yiijima.sakura.ne.jp/iijima/html5/index_01a.htm