観るものと観られるものの双対性
ー簡単に描けて深い意味のある focal conicsー

東海大学・理学部　前田　陽一
Yoichi Maeda, School of Science, Tokai University

1　問題提起

本稿では、3 次元動的幾何学ソフトウェアを用いて, focal conics のもつ美しい関係を可視化することを試みたい. 最初に, この focal conics にたどり着いた経緯について述べる. 高校の教員をしていた私の友人から, ある日, 次のような質問をされた. 「円錐を軸に垂直に切断すると円ができることは簡単にわかるが, 円錐を斜めに切断した場合, 切断面が楕円になることを直観的に生徒に納得させられるような説明はあるだろうか？」というものであった. もしかしたら, 楕円ではなく卵型になるかもしれない. その時の答えが, 「円を斜めから見た場合に楕円に見えるように, 楕円を斜めから見たら円に見える視点がある. 楕円が円に見えるということは, 視点を頂点とする円錐の上に楕円があるということなので, 楕円が存在する平面とその円錐との交線は楕円になるはず」, というものであった（この答えで生徒にわかってもらえるかどうかは怪しいが, 筆者はこれ以上うまく説明ができない）. このやりとりから今回の問題「楕円が円に見える視点の軌跡はどういう図形を描くか？」という問題が提起されることとなった. 答えは「楕円の長軸の両端点を焦点とし, 楕円の焦点を通過する双曲線（正確にいうと, 楕円が存在する平面に垂直な平面上にある双曲線）である. 結論から言うと, この事実は 100 年前の『直観幾何学』に書かれていたことで, 筆者はそのことを知らなかったのであるが, 数学セミナーの 2025 年 3 月号の「エレガントな解答をのぞむ」にこの問題を出題し, 解答者から様々なことを教えていただくことになった ([1]). その内容も含めて紹介したい. 数

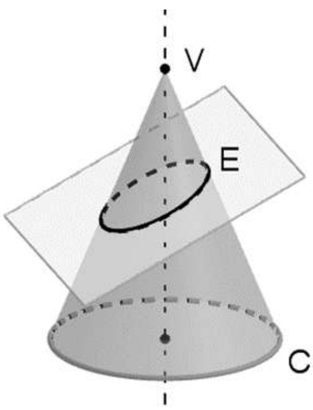

図 1: 「エレガントな解答をもとむ」に掲載された図.

学セミナーで出題した問題は以下のとおりである (図 1 参照).

「エレガントな解答をもとむ」(『数学セミナー』, 2025 年 3 月号)

図のように, 直円錐を, その底面と平行でない平面で切ると, 切り口は楕円になります. この図において, まず直円錐の底面である円 C に注目しましょう. この円は, 図中では楕円で描かれていますが, それは我々には「円は, ふつう楕円に見える」からです. ただし, 直円錐の軸上から底面の円 C を見ると円に見えるので, 「円は, 多くの場合楕円に見えるが, 円に見える視点もある」というのがより正確な表現になります. 次に, 図中の楕円 E に注目しましょう. 直円錐の頂点 V から見ると, 楕円 E は底面の円 C と重なって見えます. このことは, 「楕円は, 多くの場合楕円に見えるが, 円に見える視点もある」ということを表しています. では, 次の設定の下で, 楕円が円に見える視点の集合がどのような図形になるかをお答えください.

問題　3 次元座標空間において, xy 平面上に楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

を置く. この楕円を含む直円錐を考えたとき, 直円錐の頂点 V の軌跡を述べなさい. ただし, V の z 座標は 0 でない範囲で考えるものとします.

2　いくつかの解法と新たな発見

問題出題時点で筆者が知っていた解法は, Dandeline の球面を用いる方法であった. まず, この標準的な解法を紹介する. ダンドラン (G. P. Dandelin(1794-1847)) によって, 楕

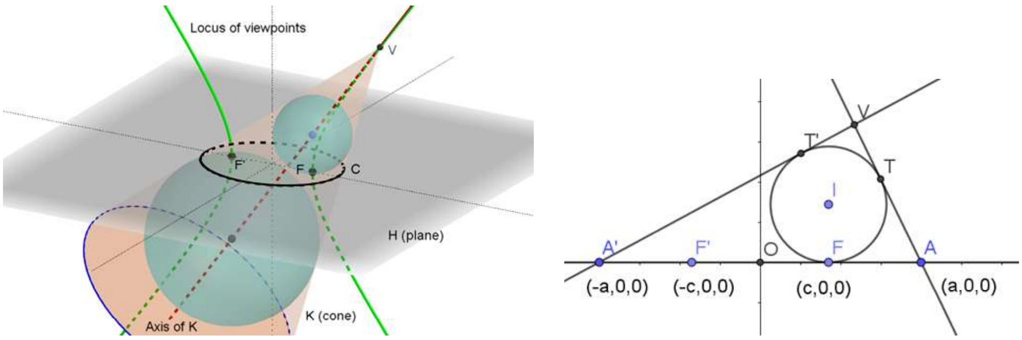

図 2: Dandeline 球 (左) とその断面 (右).

円の焦点の位置が可視化された. 直円錐と切断平面とに内接する 2 つの球面 (焦点球とかダンドラン球と呼ばれている) を考えて, それらが平面と接する接点が楕円の焦点となる (図 2(左), GeoGebra ファイル [5]). この事実を使うと 3 次元の問題を平面幾何に落とし込むことができる (図 2(右)). 対称性から円錐の頂点 V は yz 平面上にあることがわかり,

その平面上では, Dandeline 球の 1 つは, 長軸の両端点 A, A' を通る 2 本の母線 $\mathrm{VA}, \mathrm{VA}'$ と長軸 AA' で囲まれた三角形の内接円に対応する．このことから直ちに,

$$\mathrm{VA} - \mathrm{VA}' = \mathrm{FF}'(= const)$$

であることがわかる (ここで, F, F' は楕円の 2 焦点である)．このことから頂点 V の軌跡は, 双曲線になることがわかる．ただし, この議論では必要条件はわかるが十分性が保証されないので, 十分性についてはさらに議論が必要となる ([1]).

次に紹介するのは, 読者から教えていただいた, 方程式による解法である．3 次元の問題をいかに方程式に落とし込むかという点において, 手本となる鮮やかな手法を用いている．まず, 次の補助命題を証明しておく．

補助命題 (頂点と長軸, 短軸までの距離の関係)
楕円の長軸の 2 端点を A, A', 短軸の 2 端点を B, B' とする．この楕円を含む直円錐の頂点を V とすると, $\mathrm{VA}+\mathrm{VA}' = \mathrm{VB}+\mathrm{VB}'$ である．よって, 3 つの長さの値, $\mathrm{VA}, \mathrm{VB}(= \mathrm{VB}'), \mathrm{VA}'$ は等差数列をなす (図 3).

補助命題の証明 4 点 $\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{B}, \mathrm{B}'$ から直円錐の軸に下ろした垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H_A}, \mathrm{H_{A'}}, \mathrm{H_B}, \mathrm{H_{B'}}$ とする．楕円の中心は長軸 AA' の中点であり, かつ, 短軸 BB' の中点でもあるので,

$$\mathrm{VH_A} + \mathrm{VH_{A'}} = \mathrm{VH_B} + \mathrm{VH_{B'}}$$

である．直円錐の頂点角に注意すると, 4 つの直角三角形 $\triangle\mathrm{VH_AA}, \triangle\mathrm{VH_{A'}A'}, \triangle\mathrm{VH_BB}, \triangle\mathrm{VH_{B'}B'}$ は相似となるので, 題意を得る． $\square$

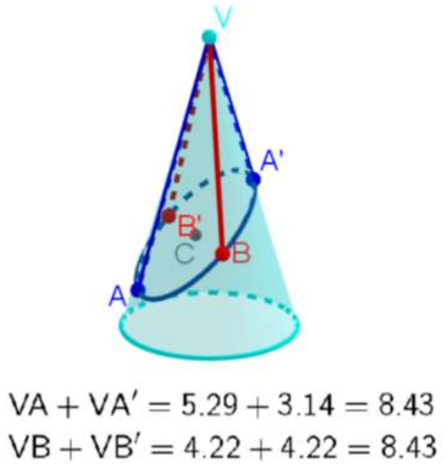

図 3: 円錐の頂点からの距離の和.

この補助命題を使うと, 4 つの方程式が得られ, それを解くことによって軌跡の方程式が得られる．以下では, 長軸の両端点を $\mathrm{A}(a,0,0)$, $\mathrm{A}'(-a,0,0)$, 短軸の両端点を $\mathrm{B}(0,b,0)$, $\mathrm{B}'(0,-b,0)$, 2 焦点を $\mathrm{F}(c,0,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0,0)$ とする ($c=\sqrt{a^2-b^2}$)．補助命題より, 定数 ℓ, d を用いて, VA を $\ell-d$, VB を ℓ, VA$'$ を $\ell+d$ とおくことができる．頂点の座標を $\mathrm{V}(x,y,z)$ とすると,

$$\begin{aligned}(\ell-d)^2 &= (x-a)^2+y^2+z^2, &(1)\\ (\ell+d)^2 &= (x+a)^2+y^2+z^2, &(2)\\ \ell^2 &= x^2+(y-b)^2+z^2, &(3)\\ \ell^2 &= x^2+(y+b)^2+z^2. &(4)\end{aligned}$$

式 (3), (4) より, $y=0$, $\ell^2=x^2+z^2+b^2$ が得られ, 式 (1), (2) より, $\ell d=ax$, $\ell^2+d^2=x^2+z^2+a^2$ が得られる．よって $d^2=a^2-b^2$ となり, $\ell^2d^2=a^2x^2$ であるから, ℓ^2 と d^2 を消去すると,

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

が得られる．この解法の中で, 等差数列の公差 d が楕円の焦点の座標 $(\pm c,0,0)$ と関係しているというのも興味深い．

いただいた解答の中で, 筆者が知らない, 一般にも知られていないであろう事実で非常に驚いたことを紹介しておく．それは, 2 つの Dandeline 球の半径の幾何平均が, 楕円の短軸と関係があるという事実である．図 4 のように, 円錐を頂点 V と 2 焦点 C, C' を通

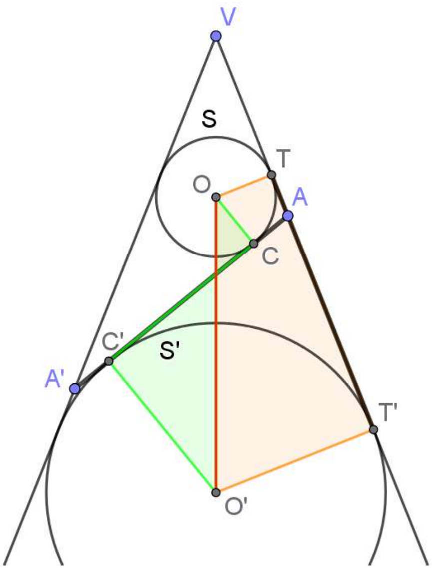

図 4: 2 つの Dandeline 球の半径と中心間の距離.

る平面で切った断面を考える．1 つの母線と Dandeline 球 S, S' との接点を T, T' とする．このとき, 長軸の長さ $2a=\mathrm{AA}'$ と線分 TT' の長さが等しいことに注意しよう．2 つの

Dandeline 球の中心間の距離 OO′ は, 次の 2 通りに表すことができる．四角形 OO′T′T に注目すると,

$$\mathrm{OO'}^2 = (2a)^2 + (r' - r)^2,$$

ここで, r, r' は, Dandeline 球 S, S' の半径である．次に自己交叉する四角形 OO′C′C に注目すると,

$$\mathrm{OO'}^2 = (2c)^2 + (r' + r)^2,$$

となる．これら 2 つの式と $a^2 - b^2 = c^2$ より, $b = \sqrt{rr'}$ が導かれる．この式の意味するところは, 2 つの Dandeline 球の半径の幾何平均が, 短軸の長さ BB′ の半分に等しいということである．円柱を斜めに切断した場合を考えると, $r = r' = b$ なので, 確かに $b = \sqrt{rr'}$ を満たしている．

ここで, GeoGebra での focal conics の作図を見ておこう．

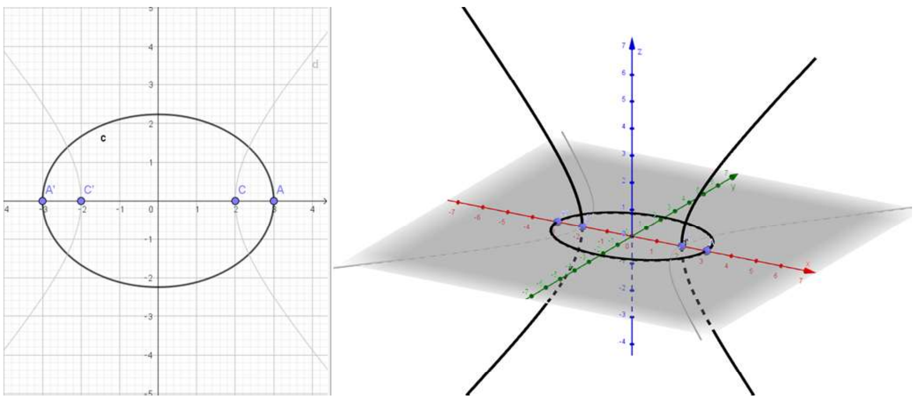

図 5: focal conics の作図.

＜作図法１＞ focal conics の作図 (図 5)

1. x 軸上に, 2 つの焦点 C, C′ と長軸の端点 A, A′ を原点対称にとる．
2. 「楕円」コマンドを選択し, C, C′ をクリックした後, 通過点 A をクリックする．
3. 「双曲線」コマンドをを選択し, A, A′ をクリックした後, 通過点 C をクリックする．
4. 「空間図形」を表示し,「直線のまわりに回転」コマンドを選択し, 双曲線をクリックした後, x 軸をクリックし, 角度として 90° を入力する ．
5. x y 平面上に作図した双曲線を非表示にする．

さらに, focal conics のもつ, 双対性も見ておこう．図 6 は, focal conics の双対性を表している．楕円が円に見える視点の軌跡である双曲線を, 元の楕円上の任意の点から見ると, それぞれの枝が円弧のように見える．正確には, 楕円上の任意の点 V を固定して, 得られた双曲線上のすべての点と直線で結ぶ．そうしてできる線織面は, 点 V を頂点とし,

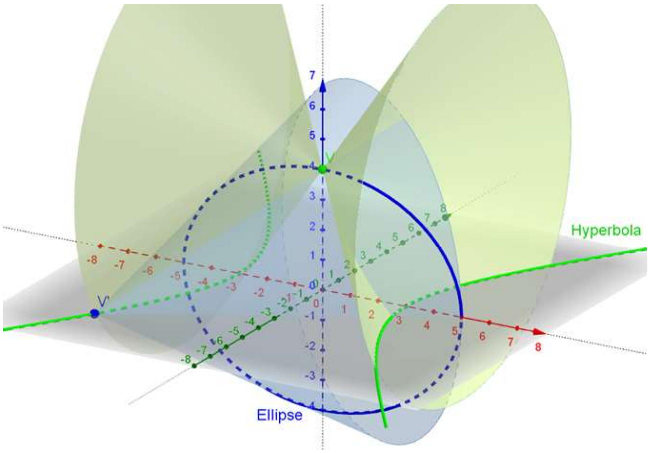

図 6: focal conics の双対性.

点 V での楕円の接線を軸とする円錐になる. 「楕円が円に見える視点の軌跡は, 楕円の焦点を通り, 楕円の長軸の両端点を焦点とする双曲線であり, 双曲線が円に見える視点の軌跡は, 双曲線の焦点を通り, 双曲線の 2 頂点を焦点とする楕円である」(GeoGebra ファイル [6]), また, 「放物線が円に見える視点の軌跡は, 放物線の焦点を頂点とし, 放物線の頂点を焦点とする合同な放物線である」(図 7 , GeoGebra ファイル [7]) ことも示せる. 式で書くと, c を 0 でない定数として,

$$\left\{x=\frac{y^2}{8c}-c, z=0\right\} \longleftrightarrow \left\{x=-\frac{z^2}{8c}+c, y=0\right\}$$

という自己双対性が成り立つ. 円以外のすべての 2 次曲線には, 互いが美しい円に見える相手がいるということである. この事実は, 難しい議論を必要としないので, 高校の教科書のコラムに載せるなど, もっと人口に膾炙されてよいと思われる.

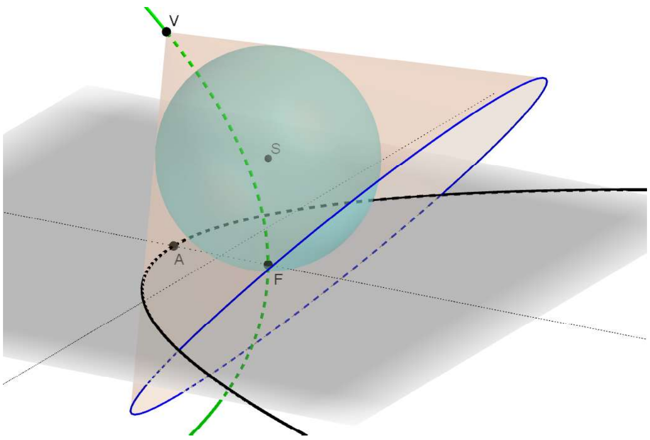

図 7: 放物線の自己双対性.

3　球面への投影と直交性

この節では, 視点を変えて, focal conics のペアについて, お互いがどのように見えるかについて, 球面を投影面として考えることによって, 互いの双対性や相対性を考察する. 図 8 の左図は, 3 次元ユークリッド空間内に円を一つ取り, その円の回転軸上に視点

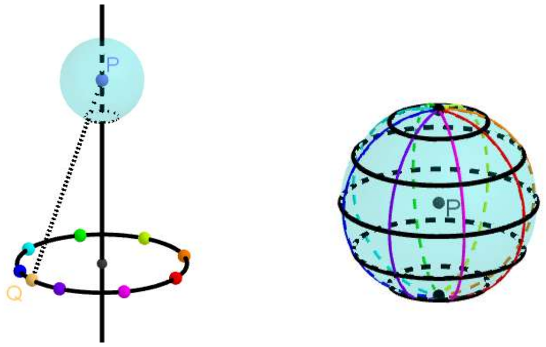

図 8: 円をその軸から見ることによって得られる球面図形.

P を設定したものである. 円の回転軸上の視点から円を見ると円に見え, 軸以外の視点から円を見ると, 円は楕円に見える. 視点を中心にした球面 (半径は任意) に投影すると,「円に見える」ということは「球面上の小円」に対応し, 「楕円に見える」ということは「球面上の楕円」に対応する. (球面上の楕円の定義は, 「球面上に 2 点を固定したとき, その 2 点までの測地線の長さの和が一定である点の軌跡」と定義されるが, 本研究では「円に見える」場合のみを扱っているので球面上の楕円についてはこれ以上考えないこととする.) さて, 図 8 の右図において, 黒い小円族は, 視点 P を軸上で動かしたときにできる円の像の軌跡である. また, 円の各点に注目した場合の像の軌跡には色を付けてみた. そうすると, それぞれの軌跡が地球の緯線と経線のように黒い小円族と直交していることがわかる. この直交性は, 一般の focal conics でも見られる現象である (図 9). 楕円を双対な双曲線の 1 つの枝から見た場合も同様に直交した円族が得られる. こ

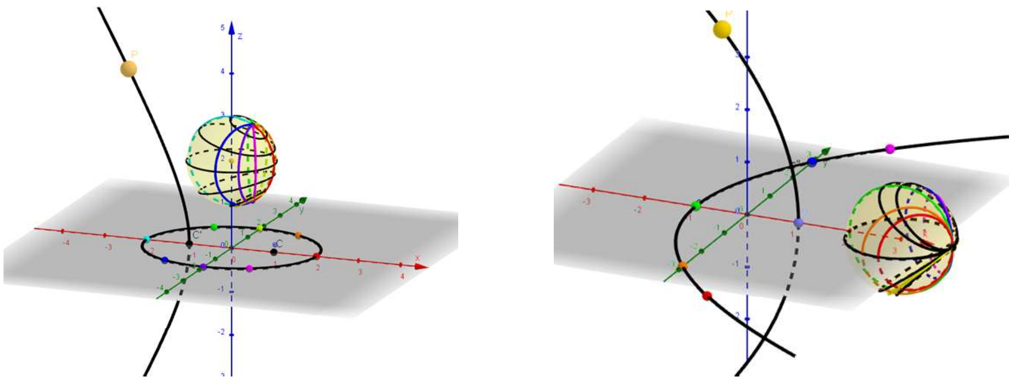

図 9: 楕円を双曲線の 1 つの枝から見た場合 (左) と, 放物線を放物線から見た場合 (右).

のような直交性を証明するためには, 図 10 にあるように, focal conic 上に任意に 2 点を

取ったとき, それらを頂点とし, それぞれ 2 次曲線を含む円錐が互いに直交することを示せばよい. 以下では, $\mathrm{P}(c\cosh t, 0, b\sinh t)$ を双曲線上の点, $\mathrm{Q}(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ を楕円上

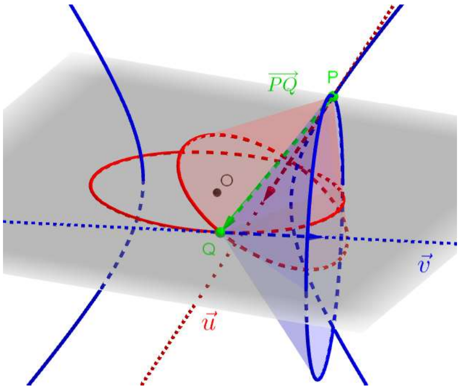

図 10: 直交する 2 つの円錐.

の点とした場合に具体的に計算してみよう. 点 P を頂点とする円錐の軸は, 双曲線の点 P での接線であり, 点 Q を頂点とする円錐の軸は, 楕円の点 Q での接線であるので, ベクトルで表すとそれぞれ, $\mathbf{u} = (c\sinh t, 0, b\cosh t), \mathbf{v} = (-a\sin\theta, b\cos\theta, 0)$ で与えられる. $\mathbf{w} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (a\cos\theta - c\cosh t, b\sin\theta, -b\sinh t)$ とすると, 円錐の母線 PQ での接平面の法線ベクトルは, $\mathbf{w}\times\mathbf{u}$ と $\mathbf{w}\times\mathbf{v}$ となるので, この 2 つの法線ベクトルが直交することを示せばよい. スカラー四重積の公式より,

$$(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} |\mathbf{w}|^2 & \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \end{vmatrix} \tag{5}$$

であるから, あらかじめ以下のものを計算しておく.

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}|^2 &= (a\cos\theta - c\cosh t)^2 + b^2(\sin^2\theta + \sinh^2 t) \\ &= a^2\cos^2\theta - 2ac\cos\theta\cosh t + c^2\cosh^2 t + (a^2-c^2)(1-\cos^2\theta+\cosh^2 t - 1) \\ &= c^2\cos^2\theta - 2ac\cos\theta\cosh t + a^2\cosh^2 t \\ &= (c\cos\theta - a\cosh t)^2. \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} &= a\sinh t(c\cos\theta - a\cosh t), \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} &= -c\sin\theta(c\cos\theta - a\cosh t), \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= -ac\sin\theta\sinh t. \end{aligned}$$

これらの式を, 式 (5) に代入すると, $(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v}) = 0$ となり, 直交性が証明される.

focal conics が放物線同士の場合も, 同様の方法で証明することができる. この場合は,

$$\mathrm{P}\left(\frac{s^2}{8c} - c, s, 0\right), \mathrm{Q}\left(-\frac{t^2}{8c} + c, 0, t\right)$$

とすると,

$$\mathbf{u}=\left(\frac{s}{4c},1,0\right),\mathbf{v}=\left(-\frac{t}{4c},0,1\right),\mathbf{w}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(-\frac{s^2+t^2}{8c}+2c,-s,t\right)$$

となり,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{w}|^2 &= \left(\frac{s^2+t^2}{8c}+2c\right)^2,\\
\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} &= -\frac{s}{4c}\left(\frac{s^2+t^2}{8c}+2c\right),\\
\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} &= \frac{t}{4c}\left(\frac{s^2+t^2}{8c}+2c\right),\\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= -\frac{st}{16c^2}.
\end{aligned}$$

これらの式を, 式 (5) に代入すると, $(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v})=0$ となり, 直交性が証明される.

4 まとめと展望

本稿では, 素朴な疑問から派生した問題から, 数学によく現れる双対性が見いだされることを見てきた. 中学生や高校生でも直観的に理解できる内容なので, 高校の教科書のコラムなどで紹介されることが望まれる. 電子教科書であれば, GeoGebra などのファイルにリンクを張っておけば, さらに理解が深まると思われる. focal conics の球面への投影については, 筆者自身が考え始めたところなので, 本稿中で紹介した証明はより直観的でシンプルになるかもしれない. 今後の課題としたい.

参考文献

[1] 前田陽一, 「エレガントな解答をもとむ」, 『数学セミナー』, 2025 年 6 月号, 88-92.

[2] G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal, *The Universe of Conics: From the ancient Geeeks to 21st century developments*, Springer Spektrum, 2016.

[3] D. ヒルベルト, S. コーン・フォッセン (芹沢正三 訳), 『直観幾何学』, みすず書房 (1966).
D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Springer, 1932.

[4] M. Kishine, Y. Maeda, *Locus of viewpoints from which a conic appears circular*. The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 2023, Vol. 17, No. 2, 138-146.

[5] https://www.geogebra.org/m/wkbg2hnv

[6] https://www.geogebra.org/m/epdxgqz2

[7] https://www.geogebra.org/m/ytxan4vs