

Gamma values related to certain volume and heuristic trials via ICT

日本大学大学院 理工学研究科 数学専攻・理工学部 数学科・日大豊山女子高校
木村 桂馬・佐々木 秀馬・丸山 晃汰・齋藤 耕太・利根川 聡・鷺尾 勇介・平田 典子

K. Kimura, S. Sasaki, K. Maruyama, K. Saito, S. Tonegawa Y. Washio and N. Hirata-Kohno
Graduate School/College of Science and Tech., Math. Major, Nihon University, Buzan JHS

1 はじめに

本稿においては Gamma 関数 $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ の特殊値が超越数, 従って無理数になるかどうかという問題に関し, ICT 教材を介した視覚的理解を試みるための試行に関して報告する. 題材としては \mathbb{R}^3 で実現される立体図形の体積や表面積を考え, 対象の数量としては Γ 関数の有理数における値によって表せる数を考察した. 立体図形に対しては数学ソフトウェアである Mathematica を用いた図示による視覚化を行なった.

Γ 関数の有理数における特殊値である $\Gamma(1/3)$ 及び $\Gamma(1/4)$ という実数が超越数 (従って無理数) になるということは数学的に証明されているが, これは極めて非自明な結果なのである. π が超越数である事実から, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ も超越数 (これも無理数) になるが, 一般にはこれらの Γ 関数の $1/2$ 以外での特殊値における超越性の証明は極めて難しい. そのため, まず無理数という事実を直感的に判断するために, 一様分布という数学的概念を適用し, 図示による理解に Mathematica 教材を役立てることを考えた.

現状では Γ 関数の他の値, 例えば $\Gamma(1/5)$ が超越数か否か等も未知である. 本来はこのような超越性を予想するための heuristic trial だけでも実践したいのである. しかし与えられた複素数や実数が例えば 3 次の代数的数ではないことを示すだけでも, 多項式の整数係数 4 箇所を動かせる整数格子に帰着させる等の高次元の図示に係る工夫が必要かもしれないが, 超越数の視覚化の構想がなかったため, 今回は無理数性にとどめた. 無理数の視覚化には, 考察すべき実数 x の整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 倍の小数部分 (nx の最大整数部分 $[nx]$ を元の nx から減じた 0 以上 1 未満の実数) を考え, $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\{nx\} := nx - [nx] \text{ が } n \rightarrow \infty \text{ のとき区間 } [0, 1) \text{ で稠密} \iff x \notin \mathbb{Q}$$

という同値性を拠り所にすることができる [5, Example 2.1] (\implies は対偶を考えれば自明). 稠密という現象の視覚的判断も残念ながら厳格ではないが, 経験則に準ずる試行提案ということでご理解いただきたい.

2 Γ 関数の特殊値に関する代数的独立性

Yu. V. Nesterenko の 1996 年の定理 [8, Corollary 5] より, Gamma 関数の特殊値 $\Gamma(1/4)$ についての数論的な結果が以下のように従う. ちなみに, \mathbb{Q} 上で代数的独立と称することと, 代数的数全体の集合 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で代数的独立ということは同値である.

定理 1 (Nesterenko) $\Gamma(1/4)$ と $\sqrt{\pi}$ と e^π の 3 数は \mathbb{Q} 上で代数的独立である。

もとの論文の定理にある $\Gamma(1/4)$ と π と e^π ではなく、 $\Gamma(1/4)$ と $\sqrt{\pi}$ と e^π に対しても同様に直接の証明が成り立つことは、Nesterenko の証明に対する D. W. Masser の注意による。

既に 1976 年に、G. V. Chudnovsky によって $\Gamma(1/4)$ と π の代数的独立性は示されており、従って $\Gamma(1/4)$ の超越性もこの時点で知られていた [1] [2, Chapter 8]. Chudnovsky の証明の概要は以下の通りである。

楕円曲線 $y^2 = 4x^3 - 4x$ を考える。この曲線は有理数体上で定義され、 $\mathbb{Q}(i)$ 上の虚数乗法を持ち、基本周期の一つは $\omega = 2 \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 4t}} = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{\sqrt{8\pi}}$ と表せる [1, 8]. よく知られているように、ベータ関数 $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ は

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

と表せるが、Chudnovsky はまずこの ω と π の代数的独立性を証明し、それを用いて $\Gamma(1/4)$ と π が代数的独立であること、つまり $\Gamma(1/4)$ の超越性を得た。

一方、上記の Nesterenko の定理 1 は 3 個の実数の全てが代数的独立、即ち、有理数係数の任意の非ゼロの 3 変数多項式の各変数に対象となる値を代入しても決して 0 にならないという顕著な定理であり、Chudnovsky の結果よりも強い。また Ramanujan の手法を用いており、証明も異なる。3 個の実数が代数的独立ならば、そのうちの 2 個も必ず代数的独立であり、Nesterenko の定理 1 は Chudnovsky の結果を含む。定理 1 から 3 個の実数の各々は超越数即ち、有理数係数の任意の非ゼロの 1 変数多項式の根に決してならない数になるため、無理数であることも従う。今回は、Gamma 関数の特殊値である $\Gamma(1/4)$ が超越数である事実の可視化が難しいため、次節のようにまず $\Gamma(1/4)$ の無理数としての視覚化のみを試行した。

定義 1 (Ramanujan の P, Q, R 関数) 1916 年に S. Ramanujan は次の関数を定義した。

$$P(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) z^n, \quad Q(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) z^n, \quad R(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) z^n.$$

ここで $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ は約数関数である。特にこれらは次の微分方程式を満たす：

$$z \frac{z}{dz} P = \frac{P^2 - Q}{12}, \quad z \frac{z}{dz} Q = \frac{PQ - R}{3}, \quad z \frac{z}{dz} R = \frac{PR - Q^2}{2}.$$

先に述べた Nesterenko の定理 1 は、以下の定理 2 の系である [8, Corollary 2].

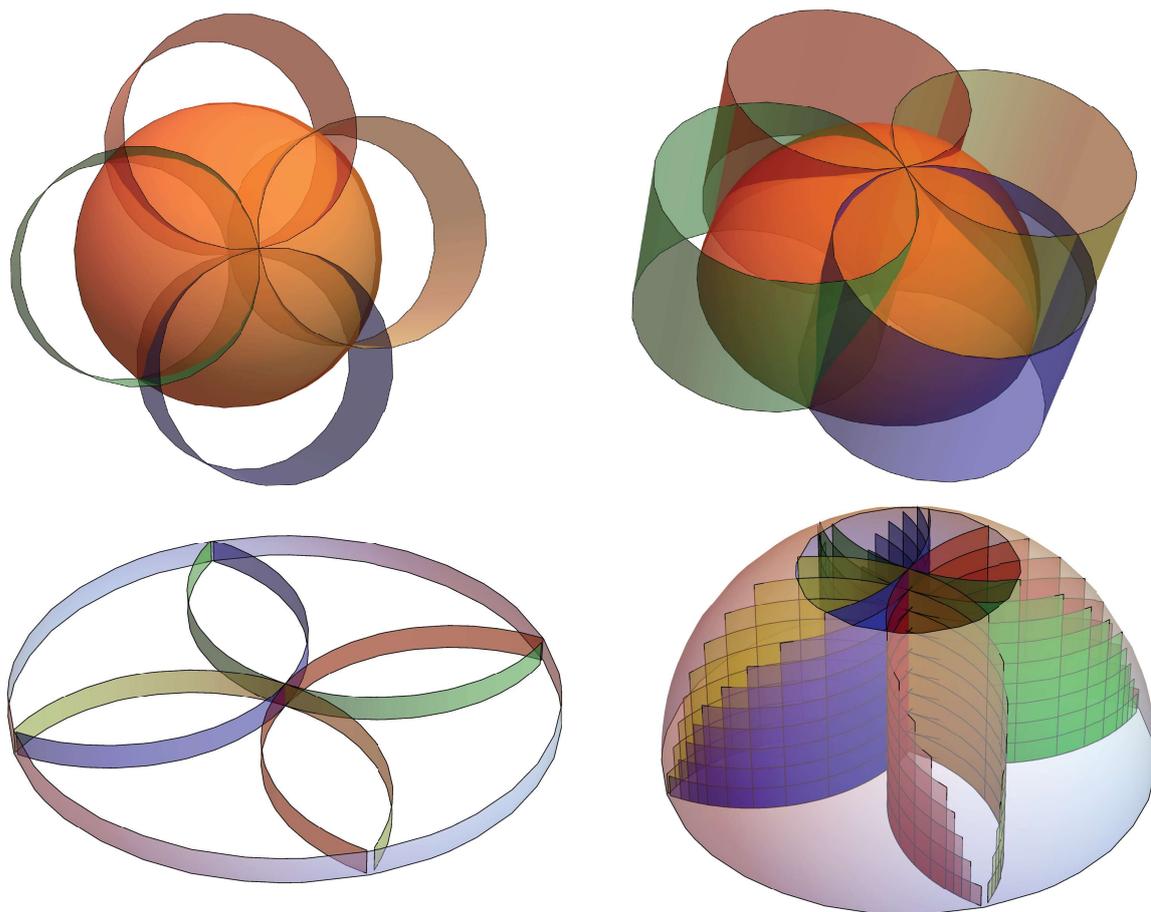
定理 2 (Nesterenko) $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ かつ $0 < |q| < 1 \implies P(q), Q(q), R(q)$ の 3 数は \mathbb{Q} 上で代数的独立である。従って全て超越数である。

3 立体図形 \mathcal{K}_4 の表面積及び体積の数論的性質

我々は $\Gamma(1/4)$ を表面積もしくは体積として具現化できるような立体図形を以下のよ
うに考察した.

- O : 3次元空間 \mathbb{R}^3 における中心 $(0, 0, 0)$, 半径 $\sqrt{2}$ の半球体
- 円柱 A : 中心 $(1, 0, 0)$ (resp. B : 中心 $(0, 1, 0)$), 半径 1 の円が底面の円柱体
- 円柱 C : 中心 $(-1, 0, 0)$ (resp. D : 中心 $(0, -1, 0)$), 半径 1 の円が底面の円柱体
- $E_1 = A \cap B, E_2 = B \cap C, E_3 = C \cap D, E_4 = D \cap A$ (左下図の四つ葉 1 枚ずつの上
部にある円柱内の部分, 即ち, 左上図の交わる円柱体 2 本の共通内部 4 箇所それぞれ)
- $F = \bigcup_{j=1}^4 E_j$ (左下図の四つ葉部分の上部のみにある円柱体の内部)
- $\mathcal{K}_4 = O \setminus F$ (右上図の円柱 4 本を刺し半球体 O をくり抜いた残りの立体, 即ち,
半球体 O から右下図の濃い色の四つ葉の上部を除いた残りの立体)

とおく. \mathcal{K}_4 の表面積としては O の大円と円柱 A, B, C, D の側面からなる部分を除き,
半球面に四つ葉のアナがあいた部分のみを考えることとする. また \mathcal{K}_4 の体積としても,
半球体 O に四つ葉のアナがあいた部分を扱う.



\mathcal{K}_4 の表面積を $S(\mathcal{K}_4)$, 体積を $V(\mathcal{K}_4)$ とおき, それらを計算すると次の値になる.

命題 3 (積分の計算) 立体図形 \mathcal{K}_4 の表面積を $S(\mathcal{K}_4)$, 体積を $V(\mathcal{K}_4)$ とおくと

$$S(\mathcal{K}_4) = \frac{16\sqrt{2} \cdot \pi \sqrt{\pi}}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}, \quad (1)$$

$$V(\mathcal{K}_4) = \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}{\sqrt{\pi}}. \quad (2)$$

命題 4 (立体図形 \mathcal{K}_4 の表面積と体積の数論的性質) $\sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ の代数的数係数の積・商は超越数である. 即ち $S(\mathcal{K}_4) \notin \overline{\mathbb{Q}}, V(\mathcal{K}_4) \notin \overline{\mathbb{Q}}$ である. また無理数性つまり, $S(\mathcal{K}_4) \notin \mathbb{Q}, V(\mathcal{K}_4) \notin \mathbb{Q}$ も直ちに成立する.

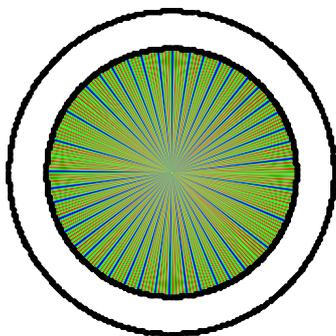
命題 4 は定理 1 から直ちに従う ($\sqrt{2}$ 係数での代数的独立性も従う).

4 無理数の可視化と一様分布

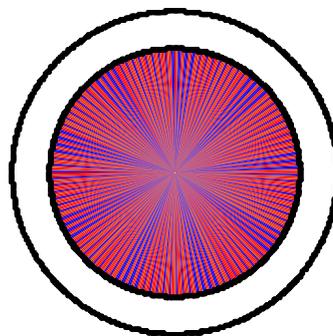
Mathematica の場合, 入力数としては必ず有限ケタの小数であるため, 無限回の実行や無限ケタの小数入力は現実的に不可能であることをお断りしておく. そのため, 十分大きな有限ケタ数での小数の入力になってしまうが, それでも稠密性の可視化を試みた.

以下はまず, $S(\mathcal{K}_4) \notin \mathbb{Q}, V(\mathcal{K}_4) \notin \mathbb{Q}$ である事実の確認として, これらの実数を x とおき, その整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 倍の小数部分 (nx の最大整数部分 $[nx]$ を元の nx から減じた 0 以上 1 未満の実数) を考え, 第 1 節で述べた $\{nx\} := nx - [nx]$ が $n \rightarrow \infty$ のとき区間 $[0, 1)$ で稠密になることと $x \notin \mathbb{Q}$ の同値性に則り, $S(\mathcal{K}_4) \notin \mathbb{Q}, V(\mathcal{K}_4) \notin \mathbb{Q}$ の可視化を試みた.

0 と 1 の間に点 $\{nx\}$ が稠密に詰まってゆく様子を, n を動かしながら, 区間 $[0, 1)$ ではなく円周の長さ 1 の円周上に $\{nx\}$ をプロットした Mathematica ファイル出力図をお見せする.



$x = S(\mathcal{K}_4)$ でギッシリに見える



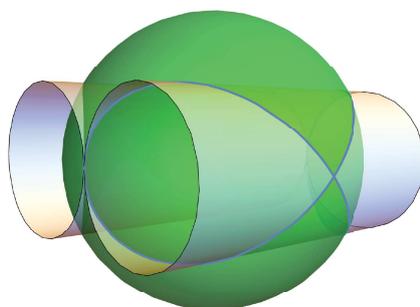
$x = V(\mathcal{K}_4)$ でギッシリに見える

一方、有理数 x については点 $\{nx\}$ が稠密にならない。この有理数の可視化も実装して比較した。無限回の実行は現実的に不可能であるが、それでもまばら状態になるように見える。

次図の Viviani Cave と呼ばれる立体の表面積 (パラシュート状の上側のみ) は驚くべきことに有理数 4 で、体積も有理数 $8/9$ である ([3, 4] 参照)。非自明であろうが、計算自体は大学の微分積分学の範囲で可能である。

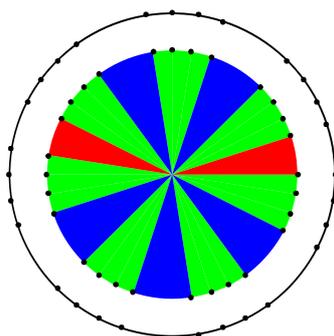
Viviani Cave (Viviani 窮面) \mathcal{V} とは以下の立体図形である。

- O : 中心 $(0, 0, 0)$, 半径 1 の半球体
- 円柱 A : 中心 $(1/2, 0, 0)$ (resp. B : 中心 $(-1/2, 0, 0)$), 底面の半径が $1/2$ の円柱体
- $F = A \cup B$ (互いに接する円 2 個を底面にした円柱体 2 本)
- $\mathcal{V} = O \setminus F$ (半球体 O から円柱体 2 本の内部を除いた立体 (上半分のみ))



Viviani Cave: 半球面の円柱外側のみの緑色パラシュート状の立体図形 (上半分: 表面積 4)

この Viviani Cave の体積, 即ち半球体 O から円柱体 2 本をくり抜いた部分 \mathcal{V} の体積 $x = 8/9$ (上半分) に対し, 下図の $\{nx\}$ の点のプロットは確かにまばらに見える。



Viviani Cave の体積 $x = 8/9$ でまばらな $\{nx\}$

一様分布の視覚化では, 残念ながら超越数と代数的無理数の区別は出来ないことも, 述べておく。なお Nesterenko の定理 2 より $\Gamma(1/3)$ と $\sqrt{\pi}$ と $e^{\sqrt{3}\pi}$ の 3 数が代数的独立であることも従うので, 次回は $\Gamma(1/3)$ についても考えたい。

参考文献

- [1] Gregory V. Chudnovskii (Chudnovsky), *Algebraic independence of constants connected with the exponential and elliptic functions*, Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR 1976:8, (1976), 698–701 (in Russian).
- [2] Gregory V. Chudnovskii (Chudnovsky), *Contributions to the Theory of Transcendental Numbers*, Mathematical Surveys and Monographs, 19, American Math. Soc., 1980.
- [3] 藤森 祥一, いくつかの曲面の面積, 数学セミナー **61-12-734**, (2022), 52–55.
- [4] 木村 桂馬, 一瀬 陽雲, 鷺尾 勇介, 鷺尾 夕紀子, 鈴木 潔光, 平田 典子, STEAM 教育における発問力醸成を意識した数学クイズ, J. of JSEE, **73-4**, (2025), 55–59.
- [5] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Pure and applied mathematics, Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [6] Yuri V. Nesterenko, *Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and applications in the theory of transcendental numbers*, Izvestiya Math., **11**, (1977), 239–270.
- [7] Yuri V. Nesterenko, *Estimates for the characteristic function of a prime ideal*, Math. USSR-Sbornik, **51**(1), (1985), 9–32.
- [8] Yuri V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence questions*, Sbornik Math., **187** (9), (1996), 1319 – 1348 DOI: 10.1070/SM1996v187n09ABEH000158 .
- [9] Yuri V. Nesterenko, and P. Phillipon, *Introduction to Algebraic Independence Theory*, Lecture Notes in Math., **1752**, Springer, Berlin, 2001.