

# The Three Distance Theorem and a Trial to show a Proof relying on Continued Fractions by Mathematica

日本大学大学院 理工学研究科 数学専攻・理工学部 数学科

柴山 将一・一瀬 陽雲・齋藤 耕太・鷺尾 夕紀子・鈴木 潔光・古津 博俊・平田 典子

M. Shibayama, Y. Hitose, K. Saito, Y. Washio, K. Suzuki, H. Furutsu and N. Hirata-Kohno  
Graduate School/College of Science and Technology, Mathematics Major, Nihon University

## 1 Three Distance 定理 とは

中心角を一定に保ったまま円周を切り続ける際に起きる不思議な現象を述べた Three Distance 定理（もしくは Three Gaps 定理）と呼ばれる著名な定理がある [1][5]. 数論的近似, 或いは組合せ論等による証明を持つ定理であり, Hugo Steinhaus というポーランドの数学者による予想として述べられた後に, V. T. Sós らによる証明が与えられた [8][9][10]. その後に様々な別証明や高次元化等が考察された. 本稿では連分数を用いた T. van Ravenstein の証明 [6] を参考にして, 連分数展開における現象と関連する円周上の点の動きを通し, Three Distance 定理の主張の理解に有用であろうと思われる動的教材を紹介する. 数学ソフトウェアとしては Mathematica を用いた.

## 2 The Three Distance 定理 の主張

無理数  $0 < \alpha < 1$  を固定する. 有理数の場合は簡単であるため, まずは連分数展開が無限に続く無理数のみを扱うことにする.  $[\alpha]$  を  $\alpha$  を超えない最大整数,  $\alpha$  の小数部分  $\{\alpha\} := \alpha - (\alpha \text{ の整数部分 } [\alpha])$  と定める (fractional part of  $\alpha$ ). この定義と  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  より  $\alpha - 1 < [\alpha] < \alpha$  である.

**定義 1 (ギャップ (Gap))**  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  の  $n$  倍 ( $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) の小数部分の集合

$$\left\{ \{n \cdot \alpha\} \mid n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \right\}$$

の元を値の小さい順 (smallest to largest) に並べた数列を ( $N$  も  $\alpha$  も略して)

$$u_j := \{u_j(N) \cdot \alpha\} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (\text{この } \{ \} \text{ は小数部分の記号})$$

とおく. 円周の長さが 1 である円周上に点をプロットする場合を考えるため, 長さとしては直線距離ではなく, 円弧の長さを考えることにする.  $u_{N+1} = u_1$  と定める. 並べ方より  $0 < u_j < u_{j+1} < 1$  である. この数列の隣接 2 項の差をギャップ (distance of successive terms) と呼び, 次のように記する

$$\delta_j := \|u_{j+1} - u_j\| \quad (\|\cdot\| \text{ は円弧の長さとしての距離, } 1 \leq j \leq N).$$

**定理 1 (ギャップは高々 3 種類)** 集合  $\{\delta_j \mid j = 1, 2, 3, \dots, N\}$  の元は高々 3 個である.

いつも高々3種類しかないというこの事実は、回数  $N$  や、もとの  $\alpha$  に依らない。また、3種類未満になる場合は  $\alpha \in \mathbb{Q}$  の場合に相当する。

なおかつギャップがちょうど3種類のときには次の定理2が成立する。

**定理 2 (V. T. Sós ら)**  $1 \leq \forall j \leq N$  に対して  $\delta_j$  は以下3種類の数のいずれかに等しい:

$$\|u_2\alpha\|, \quad \|u_2\alpha\| + \|u_N\alpha\|, \quad \|u_N\alpha\|. \quad (1)$$

これよりギャップは高々3種類であることに加え、

$$\text{大ギャップ} = \text{小ギャップ} + \text{中ギャップ}$$

という等式も従う。

### 3 The Three Distance 定理 の連分数による表示

連分数の  $n$  次近似分数の分母  $q_n$  を用いて  $u_2, u_N$  を明示的に表示することが可能である。

**定理 3 (Ravenstein : 定理 1 の連分数版)** 任意の  $n \geq 2, 1 \leq k \leq a_n$  に対して  $q_{n,k} = q_{n-2} + kq_{n-1}$  とおく。このとき

$1 \leq N \leq q_1$  ならば、 $u_j = j - 1$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) が成り立つ。

また  $q_{n-1} < N \leq q_{n,1}$  ( $n \geq 2$ ) ならば

$u_2 = q_{n-1}$  ( $n$  奇数),  $q_{n-2}$  ( $n$  偶数) かつ  $u_N = q_{n-2}$  ( $n$  奇数),  $q_{n-1}$  ( $n$  偶数) が成り立つ。

さらに  $q_{n,i-1} < N \leq q_{n,i}$  ( $n \geq 2, 2 \leq i \leq a_n$ ) のときは

$u_2 = q_{n-1}$  ( $n$  奇数),  $q_{n,i-1}$  ( $n$  偶数) および

$u_N = q_{n,i-1}$  ( $n$  奇数),  $q_{n-1}$  ( $n$  偶数) が成り立つ。

この  $q_n$  は次節で述べる  $\alpha$  の連分数展開における  $n$  次近似分数の分母である。全てのギャップは  $q_n$  で表されているので、ギャップを求める問題は  $\alpha$  の連分数展開の近似分数を求める問題に帰着される。

### 4 連分数展開の近似分数とは

**定義 2 ( $n$  次近似分数)** まず  $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  に対して形式的に連分数表示 (正則連分数と称される, 分子が常に1の形)

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \in \mathbb{Q}$$

を定める.  $\alpha$  の整数部分を  $a_0$  として, 次に  $\alpha - a_0$  の逆数の整数部分を  $a_1$  とおいてこの操作を続けると  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  に対して  $\exists a_0 \in \mathbb{Z}, \exists a_1, a_2, \dots, \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  で  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, a_1, \dots, a_n]$  を満たす数が存在する. この表示を  $[a_0, a_1, \dots]$  を  $\alpha$  の連分数展開と呼ぶ.  $n \geq 0$  に対し,  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  の分数表示を  $p_n/q_n$  ( $q_n > 0$ ) とおき,  $n$  次近似分数と呼ぶ. すなわち  $p_n/q_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  である ( $p_n, q_n$  は互いに素になることが知られる).

**命題 4**  $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$  が成立する (これは  $\alpha$  の良い有理近似になっている).

さて, 連分数展開の近似分数を活用して  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  に対するギャップを計算してみよう.

**例 5** ( $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ )  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ,  $N = 100$  とおくと定理 1 の 3 種類のギャップは以下の 3 通りである.

$$99\sqrt{2} - 140, \quad 99 - 70\sqrt{2}, \quad 29\sqrt{2} - 41.$$

**Proof.**

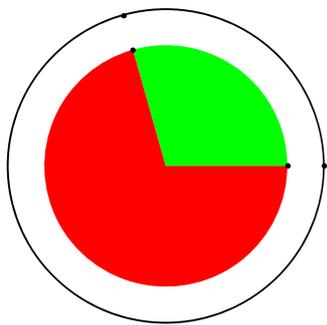
$$\alpha^2 = 2\alpha + 1. \quad \therefore \alpha = 2 + \frac{1}{\alpha} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha}} = \dots = [2, 2, \dots, 2, \alpha],$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	...
$p_n$	2	5	12	29	70	169	408	...
$q_n$	1	2	5	12	29	70	169	...

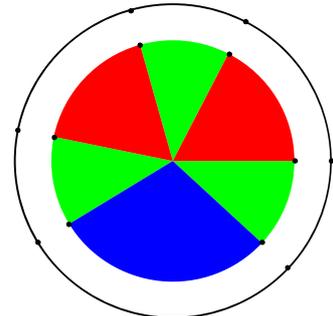
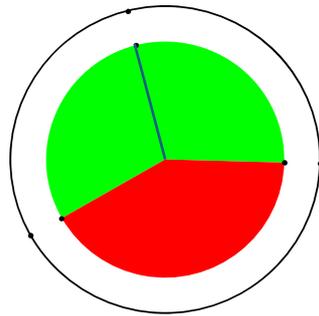
これより以下が従う: 中ギャップ  $= \|99\alpha\| = 99\alpha - 239 = 99\sqrt{2} - 140$ ,  
 小ギャップ  $= \|70\alpha\| = 169 - 70\alpha = 99 - 70\sqrt{2}$ ,  
 大ギャップ  $= \|99\alpha\| + \|70\alpha\| = 29\sqrt{2} - 41 = \text{中} + \text{小}$ .

## 5 丸いケーキのカット角としての図示

1. 円周 1 の丸いケーキを考える.
2. 角を  $0 < \alpha < 1$  として固定し, 中心角  $\alpha$  でケーキを  $N$  回切ることにする.
3. 各  $N$  に対して, 常に 3 種類以下のケーキ片の角が存在, つまり現れるケーキ片の角は高々 3 種類であることが分かる.
4. ちょうど 3 種類のとき, 大角  $=$  中角  $+$  小角 が成立する.



第1カット (ギャップ2種) 第2カット (ギャップ2種)



第5カット (ギャップ3種)  
青 = 赤 + 緑

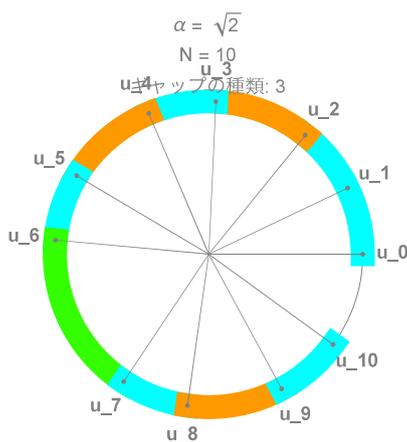
## 6 動的教材：ギャップの値も計算，大 = 中 + 小も確認

さて本稿講演時にはこの節に記する Mathematica 教材を動かし，連分数の近似分数を計算しながら  $u_j$  の値を円周上にプロットする動画を講演時にお目につけた． $N = 10$  に対し  $n$  が  $n = 1, 2, \dots, N$  と動くときに，数列  $u_j$  が連分数展開の近似分数表示に応じて， $u_0, u_1, \dots$  と動く仕組みになっている．以下の  $\alpha$  に対する動的教材を構成した．

(1)  $\alpha = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  (連分数展開は周期的), (2)  $\alpha = 1/11 \in \mathbb{Q}$ , (3)  $\alpha = \sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}$ , (4)  $\alpha = \pi \notin \mathbb{Q}$ , (5)  $\alpha = \text{黄金数} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$  (連分数展開は周期的  $1, 1, 1, \dots$ ), (6)  $\alpha = \text{オイラー・マスケ}$

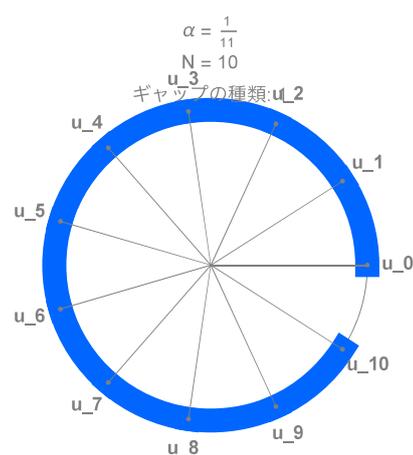
ローニ定数  $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right)$  (無理数と予想されているが未解決)．

以上の6種類の  $\alpha$  に対して，各々の連分数の近似分数を構成して  $u_j$  を円周上に記し，ギャップの種類のみならず，そのギャップの値まで自動的に計算できるようにした Mathematica 動画教材が下図である．



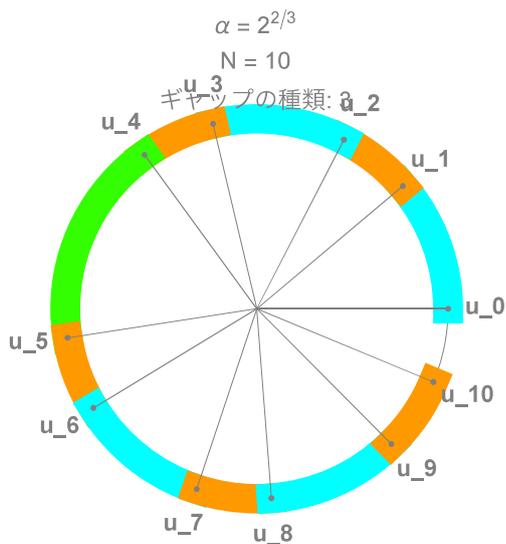
ギャップの種類ごとの値:  $\{10-7\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}, -7+5\sqrt{2}\}$

$\alpha = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$   
(ギャップ3種類)



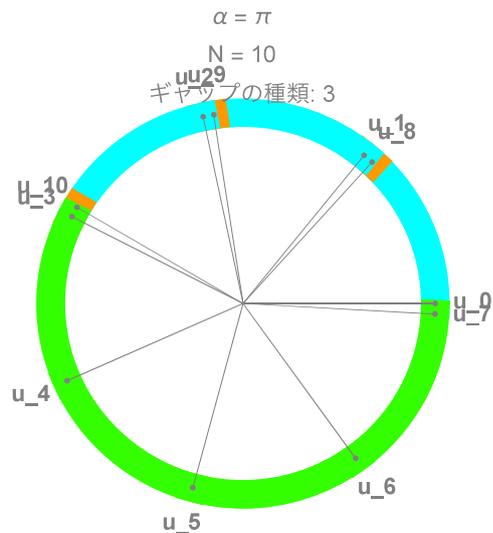
ギャップの種類ごとの値:  $\{\frac{1}{11}\}$

$\alpha = \frac{1}{11} \in \mathbb{Q}$   
(ギャップ1種類)



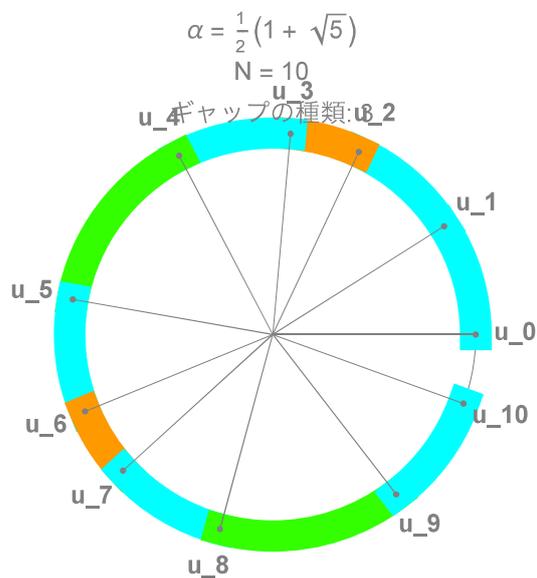
ギャップの種類ごとの値:  $\{8 - 5 \cdot 2^{2/3}, -3 + 2 \cdot 2^{2/3}, -11 + 7 \cdot 2^{2/3}\}$

$\alpha = \sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}$   
 (ギャップ 3 種類)



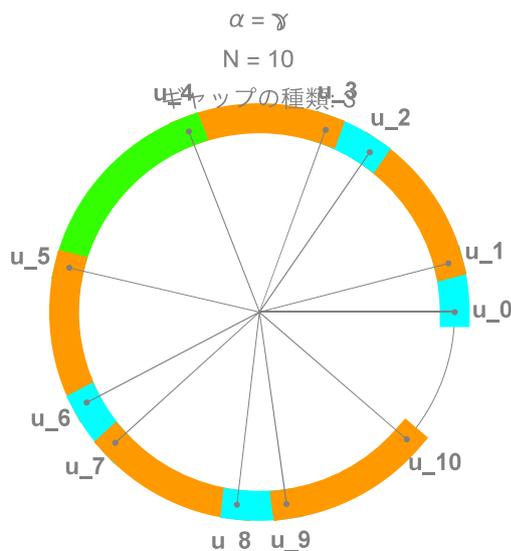
ギャップの種類ごとの値:  $\{22 - 7\pi, -3 + \pi, -25 + 8\pi\}$

$\alpha = \pi \notin \mathbb{Q}$   
 (ギャップ 3 種類)



ギャップの種類ごとの値:  $\{14 + \sqrt{5} - 5(1 + \sqrt{5}), 5 - \frac{3}{2}(1 + \sqrt{5}), -8 + \frac{5}{2}(1 + \sqrt{5})\}$

$\alpha = \text{黄金数} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$   
 (ギャップ 3 種類)



ギャップの種類ごとの値:  $\{3 - 5 \text{ EulerGamma}, -1 + 2 \text{ EulerGamma}, -4 + 7 \text{ EulerGamma}\}$

オイラー・マスケローニ定数  $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right)$  (ギャップ 3 種類)

$\gamma$ は無理数と予想はされているが証明されていない。なお、実際に授業で用いた場合の考察については、追ってご報告したい。

## 参考文献

- [1] V. Berthé and C. Reutenauer, *On the Three-Distance Theorem*, Math. Intelligencer, Gems and Curiosities, **46**, (2024), 183–188.
- [2] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Pure and applied mathematics, Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [3] M. Langevin, *Stimulateur cardiaque et suites de Farey*, Periodica Math. Hungarica, **23** (1), (1991), 75–86.
- [4] F. M. Liang, *A short proof of the 3d distance theorem*, Discrete Math., **28**, (1979), 325–326.
- [5] J. Marklof and A. Strömbergsson, *The three gap theorem and the space of lattices*, Amer. Math. Monthly, **124**, (2017), 741–745.
- [6] T. van Ravenstein, *The three gap theorem (Steinhaus conjecture)*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **45** (1988), no. 3, 360–370.
- [7] P. Shiu, *A Footnote to the Three Gaps Theorem*, Amer. Math. Monthly, **125** (3), (2017), 264–266.
- [8] N. B. Slater, *Gaps and steps for the sequence  $n\theta \bmod 1$* , Proc. Camb. Phil. Soc., **63**, (1967), PCPS 63-130, 1115–1123.
- [9] V. T. Sós, *On the theory of Diophantine approximations I*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **8**, (1957), 461–472.
- [10] V. T. Sós, *On the distribution mod 1 of the sequence  $n\alpha$* , Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math., **1**, (1958), 127–134.