グラフを描くことから読むことへ ―カリキュラムの改革―

生涯学習数学研究所　渡辺信

From drawing graphs to reading them: Curriculum reform

Shin Watanabe

Life Long Learning on Mathematics Research Institute Japan

概要：高等学校の微分積分（数学Ⅱ）において関数のグラフは増減表を用いて描くことが重要な課題であり，グラフを描くことが目標となっている．現在グラフは数学ソフトによって関数を入れることによって見ることが可能になった．このグラフを見ることを出発点としたカリキュラムを作る．グラフを見て，そのグラフが語ることを読み取ることが重要になる．現在のカリキュラムを改めて，数学ソフト活用を前提としたい．この目標から出発するカリキュラムを提案する．そして，新しく加えるならばAIによる改革の時代を迎えようとしている中で，将来のAT時代へのカリキュラムをも考えたい．

１．Technologyの発展と数学技能

最近，Technologyの発展の勢いは凄まじい．日々変化するとともに，この変化に人々は追いつかない．そのような中で，数学技能はほとんどすべてがTechnologyに置き換わった．しかし，現在の数学教育の基本は,数学技能を身に付けることによって数学理解を目指しているために,Technologyを使わない教育がなされている．GIGAスクール構想によって各自一台の情報機器が与えられた．このTechnology活用を数学教育でも考える必要がある．数学教育においてTechnology活用は，数学技能はTechnologyを活用することであり，数学教育の考え方を根本から変える必要性がある．

Technologyを使わない数学教育は数学技能を身に付けることを目的とした．この目的は数学教育現代化以降，数学教育の基礎基本として確立された．この新しい方向を決めた段階でTechnology活用は見送られた.アメリカで行われたグラフ電卓を用いる会議に日本からの視察団が来ていたが,取り入れないことを前提に鍛えたのではないかと思えるくらい短時間で帰っていった．

> 数学教育現代化以降
> 　　基礎基本に戻る(Back to Basic)
> 　　　　日本　数学技能を身に付ける
> 　　　　アメリカ　問題解決(Problem Solving)

その後アメリカ数学教育が抱えた問題は『数学嫌い』の解消問題であった．この『数学嫌い』の現象は世界共通の問題であったが，Technologyを用いることでアメリカでは解消された．まだ，パソコンの普及する以前，数学汎用機としてのグラフ電卓を取り入れた．数学技能をTechnologyによって置き換え，だれもがいつでも計算可能として，数学技能からの解放を試みた．

アメリカの数学教育の変遷は,文字計算可能なCAS（文字計算可能）を取り入れることによって，大学の教育改革にもつながった．この段階では高校の先生方が中心になってT3（Teachers, Teaching with Technology）の会議で「明日の教育教材の共有」がなされ，大学では学生からの『グラフ電卓活用要求』がなされた．高校時代グラフ電卓を活用していたが，大学での講義ではグラフ電卓を使うことが禁止されていても，学生は授業の先をTechnologyによって眺めていた．各大学は3年間の

猶予を持って，数学教育にグラフ電卓を活用することを決め，大学の数学講義担当者に対して使用を強制した．この結果，高校の先生方の主催する T3 会議に多くの大学教授が参加する現象が起こり，翌年には大学の T3 が実施されるようになった．

電卓→グラフ電卓→CAS 計算可能→センサー開発（グラフ電卓で自然を見る）→パソコン

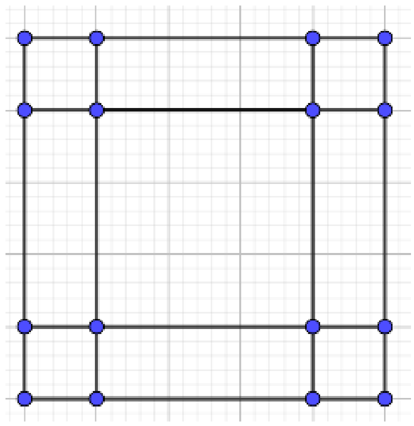
この数学技能を Technology 活用で積極的に行いたい．そのために大きく変化する内容は微分積分の扱いである．

２．アメリカの F.Demana による提案

アメリカから F.Demana が来日してグラフ電卓を紹介したときの問題は，現在日本の教科書では高校 2 年の微分の応用として扱われている内容であった．F.Demana はグラフを見ることによって，答えを得ることができることを示した．このとき日本からの参加者はグラフを見ることに否定的であったために，提案された解法には否定的であった．．残念ながら，この問題提起に対して日本の数学教育は反応を示さなかった．当時アメリカではグラフ電卓が盛んに使われていたが，日本の数学教育には馴染まなかった．このときの講演では F.Deamana 教授は楽しそうに機器を取り扱っていたのが印象的であった．そしてこのグラフから見える極大点と変曲点についても考えられることを示した．（極大点・変曲点などの名前は知らなくてもよい）

F.Demana の提案した問題

正方形の 4 隅から小さな正方形を切り取り，立体を作る．この立体の体積が最大になる x の値を求めなさい．



$V＝x(15-2x)^2$

F.Demana の提案　グラフを描く

極大点として解が見える

数学Ⅱでは増減表を作る（微分の応用）

$V＝x(15-2x)^2$ を展開する

$＝4x^3−60x^2＋225x$　　　数学Ⅱの範囲では積の微分公式は使えない

$d/dx(4x^3−60x^2＋225x)$

$＝12x^2−120x＋225$

$12x^2−120x＋225＝0$　　　因数分解・解の公式

$3(2x−15)(2x−5)＝0$

$x＝15/2, 5/2$

増減表を作る

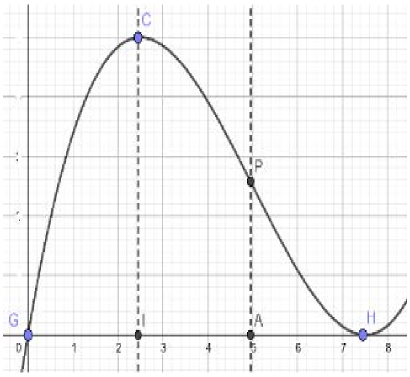
x	0		5/2		15/2		15
d/dx(V)		＋	0	−			
V	0	↗	極大	↘	極小	↗	

グラフを描くのは参考のためで，計算結果から最大値がわかる

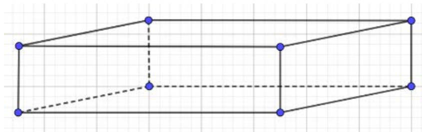
F.Demana の提案ではグラフは簡単に描ける（変曲点もあり興味深いグラフである）．このグラフ

を見ることによって，与えられた問題の解がわかる．最大の値も計算する必要はない．

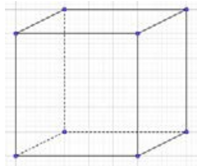
この問題のグラフ



体積最大の図（直方体で世御窓外の解を得た）



変曲点が立方体になっている）



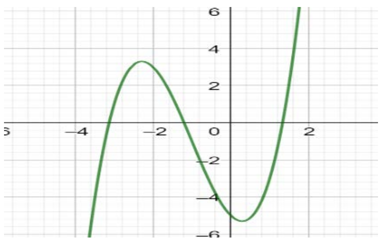
３．グラフを描くことが数学教育の目標か

現在高校数学Ⅱにおいて,微分の応用では増減表を用いてグラフを描くことが目標になっている．関数のグラフを描くために微分をすることが重要であり，極大・極小を調べてグラフの概形を推測する．関数のグラフを描いて，次に何をするかが示されていないことはグラフを描くことだけが，数学教育の目標になる．その関数の変化を問うことはない．関数のグラフを描けることを目指した数学教育では,その描かれたグラフから何を読み取ることができるかなどの次の課題がないことは,現在の数学教育の目標が関数のグラフを描くことと言える．

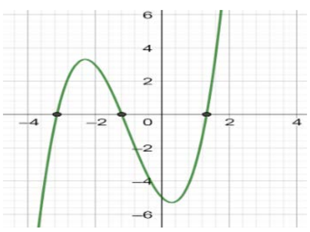
関数のグラフを描くことが最終目標なのかについての疑問は，グラフ電卓が普及してからの問題点であった．グラフを簡単に示すことができることを見たときは驚きとともに，解析学が大きく変化するのではないかと思ったが，日本の数学教育では全く変化はしなかった．グラフを描いて何に用いるのかは示されなかった．微分方程式も扱わない数学教育では増減表を作るために微分が存在するだけであり，関数のグラフを描くため道具に過ぎないのではないか．

４．グラフを見て注目する点はどこか

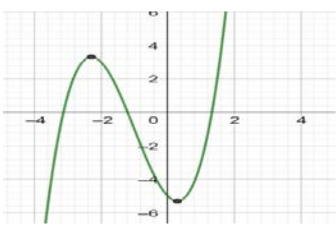
次の 3 次関数のグラフを Technology を用いて描いてみる．このグラフの注目すべき点は何かを考える．



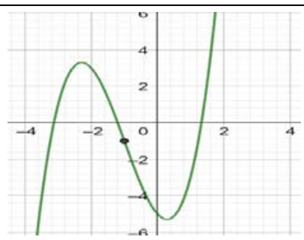
$f(x)=x^3+3x^2-2x-5$ のグラフ



(1) x 軸を基準とした上下の境界



(2) 増加・減少の境界



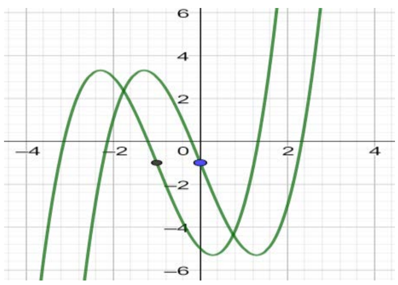
(3) 曲がり方の変化する点

この3か所に注目することは今までのカリキュラムと変化はないが，グラフの特徴を捉えることによって数学として何を求めたいかが理解できる．カリキュラムが変化しても名前は変えない．計算はどのように求められたかはBlack Boxでわからない．

(1) 方程式 $x^3+3x^2-2x-5=0$ を解く・・・ $x=-3.13,\ -1.20,\ 1.33$
(2) 極点・・・ $(-2.29, 3.3)$ $(0.29, -5.3)$
(3) 変曲点・・・ $(-1, -1)$

方程式を解く公式を求めるときに，3次方程式では2次の項を，4次方程式では3次の項がない．関数にてx軸方向に平行移動するとn次方程式ではn-1次の項が消える．n次方程式をx軸方向に $b/n\cdot a$ 平行移動する（xを $x-b/n\cdot a$ とおく）と $n-1$ 次の項がきえる．グラフ上ではどのような変化が起きるかを見たい．

２次関数のグラフは放物線で軸に対して線対称であり，３次関数のグラフは変曲点で点対称である．3次方程式の解の公式を求めるときに２次の項をx軸に平行移動することによって消去している．この結果，変曲点がy軸上にあることがわかる．



グラフをx軸方向にp平行移動するためには $x \to x-p$ とおく

$y(x)=x^3+3x^2-2x-5$

$y(x-p)=x^3+(3-3p)x^2-(3p^2-6p-2)x-p^3+3p^2+2p-5$

ここで x^2 の項を消去するために $3-3p=0$ $p=1$

$y(x-1)=x^3-5x-1$

変曲点が $(-1,-1)$ であるのでグラフをx軸に1平行移動することはy軸上に変曲点 $(0,-1)$ が来る．
極点は変曲点で点対称で $(-1.29, 3.3)$ $(1.29, -5.3)$ になる．

3次方程式を解くことは，因数分解 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ を利用してcをxとおくと，$x^3-(3ab)x+a^3+b^3=0$ となり2次の項がない．

$x^3-(3ab)x+a^3+b^3=0$

$(x+a+b)(x^2-(a+b)x+(a^2-ab+c^2))=0$

$x=-(a+b), ((a+b)\pm\sqrt{(-3(a-b)^2)})/2$

となって，解くときには2次の項がない方程式を解くことができるがグラフ上での意味が分からない．しかし，2次関数（放物線）をx軸に平行移動することによって，放物線の軸をy軸にすることができる．このとき実数解は左右対称である．2次方程式は $x^2=C$ を求めることが本質的なことがわかる．

5. グラフを見ることが数学教育の出発点

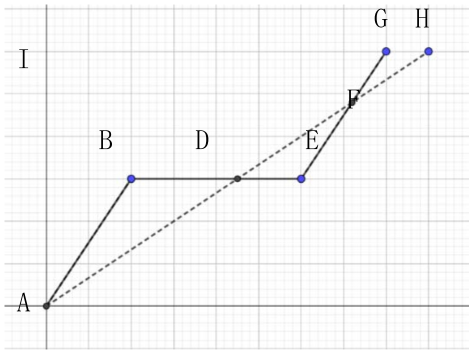
関数のグラフを見ることを提起したのはF.Demanaであった．しかし，工学からの考え方として提起したのは全国数学教育学会で示された．工学からの視点から数学教育にグラフの重要なことを指摘された．この指摘ではグラフを見ることによって，実験データから誤りを見つけ出すことができ

ることや，グラフを見てデータが語る性質発見が示され，グラフの威力を知ることができた．
「基礎数学をもっと活用すべきである事例」を今回は特に「グラフの活用」を例にして，数学知識を効率的に実践で使えるように，高校や１年次でどのように数学を教育すべきかが語られた．

また，水産関係の学生が大量の魚を捕まえ，その重さを丁寧に一匹ずつ記録した．この記録用紙に書かれた数値を見てもほぼ同じ魚の群れを追っているとしか見えなかったが，データのグラフを描きたとき，2 つの山が現れたことを知ることができた．その中に 2 種類の魚がいたことを突き詰めたときにもグラフが持つ情報量の多さを知ることができた．統計的な考え方がこれからの科学の思考方法として重要な役割を演じるとき，データの処理としてグラフを見ることは重要になる．

かって行ったシンポジウム「Society5.0 社会で必要な数学のための数学教育の在り方の研究」において，社会の変化は Technology によって始まる．専門科目から数学教育への提言を踏まえ，数学教育の在り方を問うことは，今の自裁ではなかろうか．

数学ソフトによってグラフを見ることができることを活かした数学教育の改革を提案したい．この例としてグラフに物語（Story）を付けたい．歩いている人を想定して「物語」を語れるであろうか．



このグラフを見てどのような物語が考えられるかは，グラフを見る混錬になる．

物語の例

２人Ｍさん(実線),Ｎさん(点線)が散歩をしている．２人ともに同じ場所点Ａから同時に出発した，この出発点を原点にする．目的地は点Ｉである．

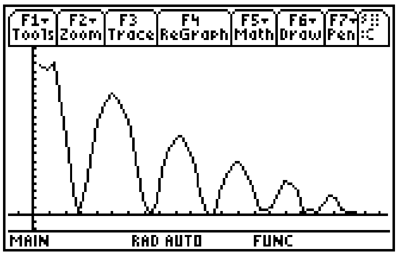
Ｍさんはさんよりも早く歩いたが，点Ｂで休憩しているために点ＤでＮさんに追い越された．天ＥでＭさんは再び前と同じ速さで歩き始め，点ＦでＮさんを追いぬき，目的地に着いた．着いたときはＭさんの方が早かった．

Ｎさんは常に一定速度で歩いていたことも分かる．

グラフが語りかけてくることを「物語」として説明できることは，そのグラフの変化を読むことができることでもあり，グラフが示す変化を理解できる．逆に「物語」からグラフを作ることも可能であろ．このときの出発点はグラフにあり，グラフがすでに描かれていることが前提になる．今までは関数ｙ＝ｆ（ｘ)を見て，その変化を知るためにグラフを描こうと思ったかもしれないが，現在は関数のグラフが先に見える．この見えるグラフから数学教　育が出発することができる．今までのグラフを描くことによって変化を見ることが目標（到達点）であったことに対して，書かれているグラフを出発点にすることができる．出発点と到達点の逆転が Technology によって起こると考えられる．Technology が数学教育を変える一つの例になる．

また，始線会に存在する数学現象はグラフを見ることによって数学の存在を見ることもできる．例えば,距離センサーを使ってボールの落下運動を見たグラフは放物線が並んでいることがわかる．なぜ放物線を学んでいたのかを具体的な日常生活の中に数学が存在することを知ったとき，昔ガリ

レオが言った言葉『自然という書物は数学の言葉で書かれている』ことを再確認したと言われている．たとえば下のグラフはボールの落下現象を見ることができるグラフである．



この自然を見ることによって『自然の中に数学が存在する』ことを具体的に『見る』ことができたことによって，数学を学ぶ態度に変化が現れた．

グラフ電卓で日常生活を見る→『自然は数学でできている』→数学を学ぶ

この放物線の頂点を結ぶ回帰曲線は指数関数で表示される．指数関数は温度変化にも表れ，ニュートンの冷却法則も見ることができる．このように自然界の弦諸王をグラフによって見ることは，ガリレオの言葉『自然という書物は数学の言葉で書かれている』ことの再来として考えられる．

6. AI 時代における数学教育の深刻さ

コンピュータ技術の発展により社会は今，劇的に変わりつつある．これに伴い学問も教育も変化が求められる時代である．特に AI を用いる時代になって教育は大きな変化が生まれるであろう．AI によって教育は劇的に変化して，カリキュラムの一部を直すだけでは変化に追いつかない．アメリカでの数学教育は『数学アプリ』を活用することによって，数学技能は Technology によって置き換えられ，個別学習によって進度は各自ばらばらで，教室のない学校制度も出来上がっていた．我々は数学技能には Technology を使わず，『数学アプリ』も使わない 50 年間を過ごした．個別学習よりも一斉学習が重んじられてきたが，AI 時代には個別学習が中心になり，今までとは違う学校制度が生まれるであろう．

AI 時代においては GIGA スクール構想による情報機器をいつでも・どこでも・何をやることにも使える環境になるであろう．しかし，大学入学試験では受験者は『紙と鉛筆』の時代が続くのではなかろうか．大学では AI が使われる学習が行われ，若者も AI を使う時代になると，若者は大学へは神学をしない時代になるであろう．

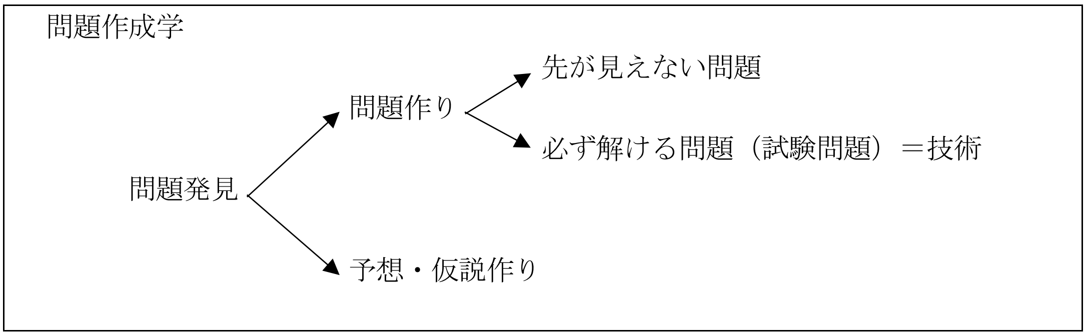
このような AI の時代が来るかは分からないが，AI 活用の時代はすぐ近くまで来ている．このときに数学教育は問題を解く時代ではなくなる．数学教育にとって深刻な時代になるのではなかろうか．そこで，改革の方向性を創造定育成を本格的に取り入れたい．幼児期には知的好奇心が旺盛で何を見ても「なぜ？，なんで？」と問いかける．しかし，学校教育では知的好奇心は科学的知識に向かう．特に数学では『すでに出来上がった知識を覚えること』と『与えられた問題を解くこと』に力点が移る．学校教育を終えた大人の知的好奇心は幼児期とは異なる．科学的な知的好奇心を育むために『問題作成学』を構築したい．ここで考えられるのは数学の問題を創造することが良いであろう．

7. 数学教育改革の必要性

Technology の発展と，GIGA スクール構想によって教育環境の変化がみられる．この変化は社会からの影響であり，教育が社会に対して負う責任がある．Technology を使わない数学教育に対して，他分野はもっと Technology 活用によって発展していくことによって，数学教育が取り残されている．Technology を使うことによって，今までの数学教育の利点を害するという考え方もあるが，我々

が探し求めることはTechnologyを用いて何ができるようになったかであり，そのTechnologyを用いて数学教育がどのように変わりうるかを考えることではなかろうか.

AI時代になり，数学の問題はすべてAIが解く時代になる．この時代が来ることを前提にして，数学教育を考えなくてはならない．数学の問題を解くことの楽しさはAIによって消えてなくなる．このときに数学教育はいかにあるべきかを考えたとき,『問題作成学』が数学の問題を作ることになるであろう．数学教育において，いかにして問題を作るかが問われる.



この段階では，今数学教育の問題を作るのではなく，自らの知識を活かした「予想・仮説作り」を提唱したい．この問題作成を行うことによって，数学を楽しむことができる．学校で学んだ知識をもとにして自分なりの問題を作る．この例として考えられたのが「パスカルの三角形の規則の発見―数学を楽しむこととは何か―」である．学校教育(In School）での学びを活かし，Out School（生涯学習）を楽しみたい.

謝辞
この論文は京都大学にある国際共同利用･研究センターである数理解析研究所の支援を受けました.

参考文献
(1) S.Watanabe, The aim of mathematical learning at next society, International Conference on Math and Math Learning at Laos, 2018
(2) 渡辺信，数学問題から発展学習へ－因数分解と合同問題－,第52回全国数学教育学会,2020
(3) 渡辺信，数学教育にもTechnology活用－｢知ること｣と｢感じること｣－,科学教育学会,2020
(4) 波多野誼余夫&稲垣佳世子（1967）知的好奇心，中公新書318
(5) 中村桂子（2015）知の発見，朝日出版社
(6) 渡辺信（2025）『問題作成学』の提唱，第276回数学教育談話会
(7) 渡辺信（2025）こんな数学はどこで扱うのか，数学教育学会　110-112
(8) S. Watanabe (2025) Connecting "Problem Creation Studies" with Intellectual Curiosity, Japan Science and Technology Information Aggregator, Vol.40 No.1 P.11-14