数式処理を活用した和算の教育プログラムの構築

福島高専・一般教科　西浦　孝治
Koji Nishiura
General Education, National Institute of Technology, Fukushima College

1　はじめに

江戸時代に発展した和算は，日本独自の数理文化として国際的にも高く評価されてきた．とりわけ神社仏閣に奉納された算額に刻まれた幾何問題は，当時の人々の高度な数理的洞察を示すと同時に，視覚的にも美しい構造を有している．算額は単なる遊戯的要素ではなく，共同体の知識伝達や学術的交流の場として重要な役割を担っていたと考えられている．しかし，現代の数式体系や教育現場にそのまま応用することは容易ではない．特に，典型的な算額問題の多くは解法過程で無理式を含む方程式に帰着するため，計算機代数による処理が困難であった．この点が，和算を現代教育の教材として活用する上での大きな障壁となってきた．近年，この困難を克服する方法論として，数式処理システム Maxima と数学ソフトウェア KeTCindy による mnr 法が開発された ([1, 2]). mnr 法は，三角形の 2 つの底角の半角の正接と内接円の半径を変数として導入することによって，これまで数式処理システムでは無理式を含む連立方程式として表されていたものが有理式で記述できるようになった．これによって，和算の図形問題を数式処理システム上で体系的に処理することが可能となり，和算を教育現場に導入する道が大きく開かれた．

和算は複雑な条件設定や巧妙な補助線を含むため，学習者にとって,「何がわかっていて何がわかっていないか」を整理し立式する力を育成する格好の素材である ([3, 4])．また，論理的思考力を育成し，数学的探究心を喚起すると考えられる．さらに KeTCindy との連携により，問題設定や解法過程を視覚的に提示でき，数式処理と図的直観を行き来しながら学習を進めることが可能となる．このような数式処理と動的可視化を統合する教材設計を通じて，学生が自律的に問題を分析し，数式化へとつなげる新しい学習様式を構築する．そして学生の論理的思考力や立式能力を育成し，数学的探求心を喚起する教育プログラムを構築する。本稿では数式処理システムを用いて，和算を現代数学教育に活かすための指針を提示する．

2　mnr 法について

三角形の 2 つの底角の半角の正接を m, n，内接円の半径を r とおくと，三角形の頂点の座標，辺の長さ，三角形の五心などを m, n, r の有理式で表すことができる．この方法を mnr 法といい，以下のように頂点の座標などが求められ，大域変数と関数が定義されている ([1, 2]).

図1のように，三角形ABCの2底角の半角の正接を $m=\tan\dfrac{B}{2}$，$n=\tan\dfrac{C}{2}$，内接円の半径を r とおき，内接円の中心Iを原点，底辺BCを x 軸に平行にとる．このとき，頂点BとCの座標は

$$\mathrm{B}\Big(-\frac{r}{m},\ -r\Big),\ \mathrm{C}\Big(\frac{r}{n},\ -r\Big)$$

となる．頂角 A については

$$\begin{aligned}\tan\frac{A}{2} &= \tan\frac{\pi-B-C}{2}=\cot\frac{B+C}{2}\\ &= \frac{1-mn}{m+n}\end{aligned}$$

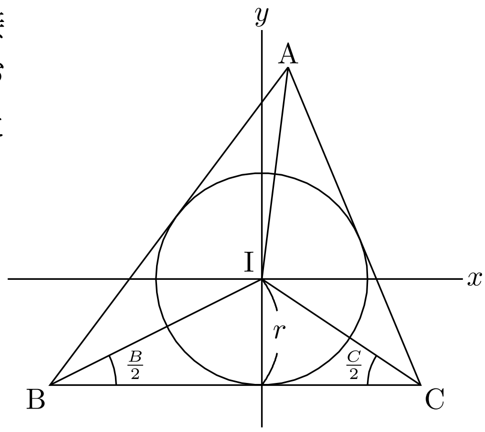


図1. mnr法

となる．また，頂点Aの座標も直線AB, ACの交点として求めると

$$\mathrm{A}\Big(\frac{r(n-m)}{1-mn},\ \frac{1+mn}{1-mn}\Big)$$

となる．各頂点の座標が求められたから，辺の長さは次のように計算される．

$$\mathrm{BC}=\frac{r}{m}+\frac{r}{n},\ \mathrm{AB}=\frac{r(1+m^2)}{m(1-mn)},\ \mathrm{AC}=\frac{r(1+n^2)}{n(1-mn)}$$

外心，重心，垂心，傍心，および内接円，外接円，傍接円の半径なども $m,\ n,\ r$ の有理式で表される．mnr法では半角の正接が重要となる．そこで，$\alpha\ (-\pi<\alpha<\pi)$ について，$\tan\dfrac{\alpha}{2}=t$ となる α を (t) と表すことにする．すなわち，$\alpha=2\tan^{-1}t$ である．

次の3つの関数がmnr法の基本関数である．

putT(m,n,r)	底角 $B=(\mathrm{m})$，$C=(\mathrm{n})$，内接円の半径がr，内心が原点，底辺BCが x 軸に平行な三角形ABCを置く
slideT(pt1,pt2)	点pt1が点pt2に一致するように三角形を平行移動
rotateT(m,pt)	点ptを中心に角(m)だけ三角形を回転

これらの関数を実行すると，三角形の頂点，辺の長さ，五心などが次の大域変数に代入される．

頂点	vtxT, vtxL, vtxR
辺の長さ	edgB, edgL, edgR
内心, 内接円の半径	inC, inR
外心, 外接円の半径	cirC, cirR
垂心, 重心	ortC, barC
傍心, 傍接円の半径	exCa, exRa, exCb, exRb, exCc, exRc

$\alpha=(t)$ の補角 $\pi-\alpha$ は，$\tan\dfrac{\pi-\alpha}{2}=\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{t}$ より $\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$ と表される．また，余角 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ は $\tan\Big(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\Big)=\dfrac{1-t}{1+t}$，2つの角の和と差は加法定理から次の関数を定義する．

supA(t) :=1/t	角 (t) の補角の半角の正接
comA(t) :=(1-t)/(1+t)	角 (t) の余角の半角の正接
plusA(t1,t2) :=(t1+t2)/(1-t1*t2)	角 (t1) と (t2) の和の半角の正接
minusA(t1,t2) :=(t1-t2)/(1+t1*t2)	角 (t1) と (t2) の差の半角の正接

さらに次の関数が定義されている．

numer(f)	有理式 f の分子を因数分解して返す
denom(f)	有理式 f の分母を因数分解して返す
frfactor(f)	有理式 f の分母と分子を因数分解して有理式を簡単化
frev(eq,rep)	有理式 eq に値 rep を代入して有理式を簡単化
frevL(eqL,rep)	有理式のリスト eqL に値 rep を代入して有理式を簡単化
nthfactor(pol,k)	多項式 pol の k 番目の因子を返す
lenSeg2(p1,p2)	2 点 p1 と p2 を結ぶ線分の長さの平方 lenSeg2(p1) は原点と点 p1 を結ぶ線分の長さの平方
dotProd(v1,v2)	2 つのベクトル v1 と v2 の内積
crossProd(v1,v2)	2 つのベクトル v1 と v2 の外積
meetLine(pts1,pts2)	2 つの線分 pts1 と pts2 の交点 （pts は 2 点のリスト）
comTan(C1,r1,C2,r2)	中心 C1，半径 r1 の円と中心 C2，半径 r2 の円の共通接線
contCL(C,r,p1,p2)	中心 C，半径 r の円と 2 点 p1 と p2 を通る直線が接する条件

3　和算と算額について

和算は江戸時代に日本で独自に発展した数学であり，庶民，僧侶，町人，職人の間で広がった．算術から始まり，代数的な方程式の解法や高度な幾何学的問題まで含む．算額は和算文化の一部で，神社や寺に奉納された幾何学の問題を描いた額である．きわめて美しい図と洗練された命題が特徴で，解くために高度な技巧を必要とする場合がある．図 2 は福島県の見渡神社の算額であり，左から 2 番目の問題は次の通りである ([5, 6])．

図 2. 福島県見渡神社の算額

問：今有如図三角内以三等斜作内三角容等円四個只云外三角辺若干問得内三角辺術如何
訳：今，図の如き三角有り．内に三等斜を以て内三角を作り，等円四只を容る．
　　云う，外三角の辺は若干なり．問う，得る容三角の辺は如何に．
術：術曰置二十一個開平方加三個以除外辺三倍之得内辺合問
訳：術に曰く，二十一個を置き，開平して三個を加え，もって
　　外辺の三倍を除す．これをもって内辺を得，問いに合う．

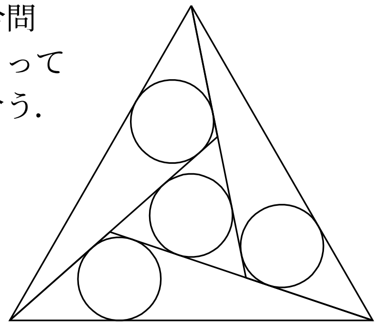


図 3. 算額の図

図 3 のように正三角形の内部に長さが等しい 3 つの線分を引いて三角形を作り，半径が等しい 4 つの円が入る．このとき，内側にできる正三角形の 1 辺の長さは，外側の正三角形の 1 辺の長さの $\frac{3}{\sqrt{21}+3}$ 倍になるという問題である．この算額には解の求め方は記されていない．このような問題を数式処理システムで解こうとしても，無理式を含む方程式が現れるため解を求めることが難しかったが，mnr 法では方程式を有理式で表し解くことができる．ただし，図 3 の算額の問題は，mnr 法で解く場合でもさまざまな工夫が必要なため，mnr 法を学習したばかりの学生にとっては難問である．

4　和算教育プログラム

mnr 法を用いた和算教育は，準備，mnr 法のスクリプトに方程式を含まない問題の解法，方程式を含む問題の解法の順で行う．

(1) 準備

mnr 法では Maxima，KeTCindy，Cinderella を使うため，はじめにそれらをインストールする．次に，KeTCindy による図の作成の演習を行う．そして，mnr 法の概要とその使い方を説明する．mnr 法の使い方は，次の通りである．

① KeTCindy のサンプルフォルダ samples/s21mnr にある `0startmnr.cdy` をコピーし，作業フォルダに貼り付けてファイル名を変える（ここでは，`exercise.cdy` とする）．

② `exercise.cdy` を開き，CindyScript を開く．そこの Initialization の KETlib と Draw の figures を用いる．

図 4. KETlib の画面

図 4 の KETlib を実行すると，作業フォルダ内に 3 つのテキストファイル

`exerciseketlib.txt`，`exercisefigures.txt`，`exercisemkcmd.txt`

が作成される（6行目の`Readymnr(1,0.5,1);`がコメントアウトされているときは，`//`を外してから実行する）．`exerciseketlib.txt`を開き，中身をすべてコピーし，KETlibに上書きで貼り付ける．このとき，`import(Cdyname()+"mkcmd.txt");`はコメントアウトされているが，`//`は外す．次に，`exercisefigures.txt`を開き，中身をすべてコピーし，figuresに上書きで貼り付ける．図5は貼り付けた後のfiguresの画面である．figuresを実行し，`exercise.cdy`を保存して閉じる．

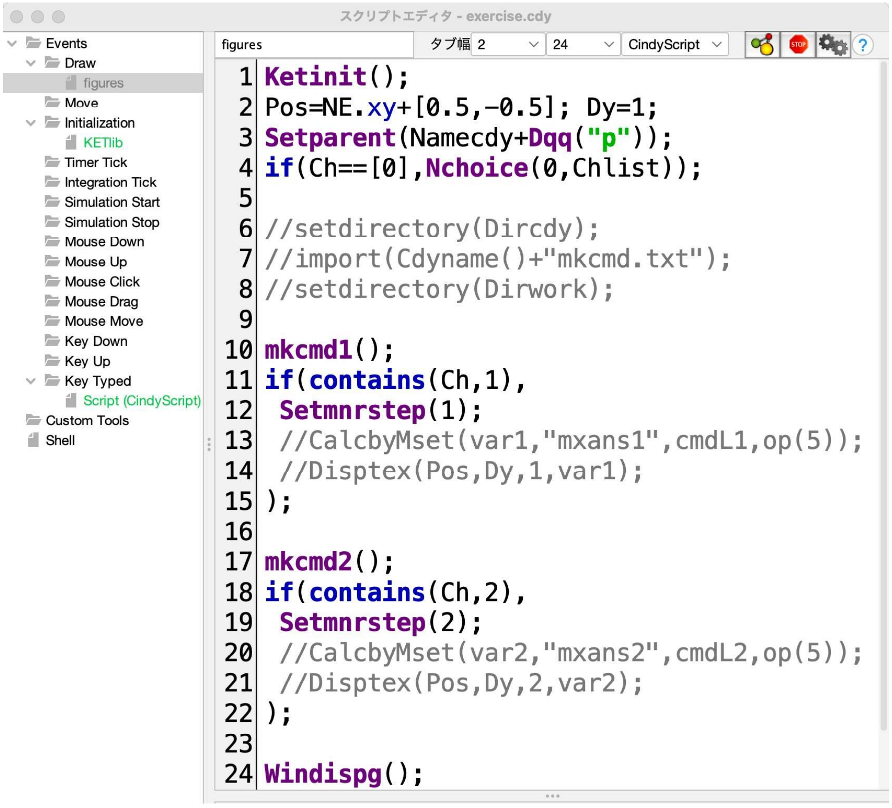


図5. figuresの画面

終了後，`exerciseketlib.txt`と`exercisefigures.txt`は削除してよい．

③ `exercisemkcmd.txt`が主ファイルである．図6はそのファイルであり，3行目からmnr法のコマンドを書く．

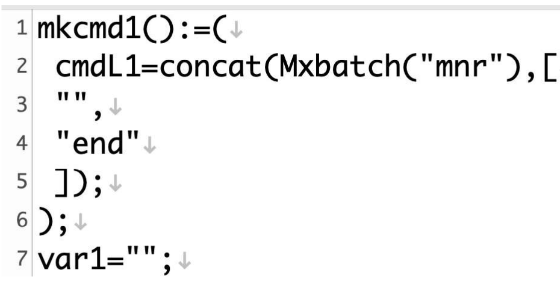


図6. exercisemkcmd.txtファイル

ファイルを作成後，`exercise.cdy`のfiguresの図5の13行目`CalcbyMset`と14行目`Disptex`のコメントアウト`//`を外し，実行する．

(2) 方程式を含まない問題

mnr 法の使い方を身につけるために，スクリプトに方程式を含まない問題から始める．例題と演習問題は次の通りである．

1. 例題：中点連結定理
2. 演習問題 1：中線定理
3. 演習問題 2：福島県熊倉神社の算額

例題として，学生がよく知っている中点連結定理（図 7）を mnr 法を用いて示す．図 8 は，そのスクリプトである．

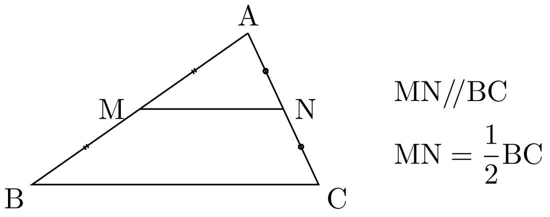


図 7. 中点連結定理

```
1  mkcmd1():=(
2   cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
3   "putT(m,n,r)",                           ← 三角形 ABC を置く
4   "A:vtxT; B:vtxL; C:vtxR",                ← 変数 A, B, C に頂点の座標を代入
5   "M:(A+B)/2",                             ← 変数 M, N に中点の座標を代入
6   "N:(A+C)/2",
7   "AB:edgL; BC:edgB; CA:edgR",             ← 変数 AB, BC, CA に辺の長さを代入
8   "BC2:BC^2",                              ← BC² を計算し，変数 BC2 に代入
9   "MN2:lenSeg2(M,N)",                      ← MN² を計算し，変数 MN2 に代入
10  "MN2:factor(MN2)",                       ←MN2 を因数分解し，MN2 に代入
11  "end"
12  ]);
13 );
14 var1="A::B::C::M::N::BC2::MN2";           ← 変数列 var1 に A〜MN2 を代入
```

図 8. 中点連結定理のスクリプト

3 行目 `putT(m,n,r)` で基本となる三角形を置いている．5，6 行目で 2 つの辺の中点 M と N の座標を求め，9，10 行目でその 2 点間の距離の平方 MN^2 を求めて因数分解している．このスクリプトを実行すると，Cinderella の画面上に図 9 の結果が得られる．BC2 と MC2 を比較すると，$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$ が成り立つことが分かる．また，B と C の y 座標，および M と N の y 座標がそれぞれ等しいことから，MN と BC は平行であることも分かる．2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の成分を求めることによっても，中点連結定理を示すことができるが，演習問題では線分の長さを求める必要があるため，コマンド `lenSeg2` を用いた．mnr 法を初めて学習する学生にとっては，ベクトルの成分で証明することもよい演習問題となる．

$$\text{1 A:}\left[\frac{(n-m)r}{1-mn},\frac{(mn+1)r}{1-mn}\right]$$

$$\text{B:}[-r/m,-r]$$

$$\text{C:}[r/n,-r]$$

$$\text{M:}\left[\left(\frac{(n-m)r}{1-mn}-r/m\right)/2,\left(\frac{(mn+1)r}{1-mn}-r\right)/2\right]$$

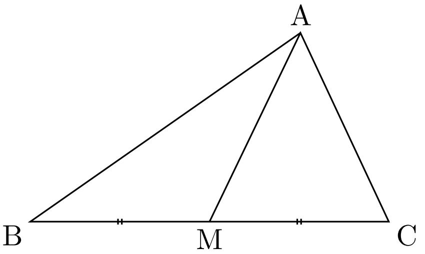
$$\text{N:}\left[\left(\frac{(n-m)r}{1-mn}+r/n\right)/2,\left(\frac{(mn+1)r}{1-mn}-r\right)/2\right]$$

$$\text{BC2:}\frac{(n+m)^2r^2}{m^2n^2}$$

$$\text{MN2:}\frac{(n+m)^2r^2}{4m^2n^2}$$

図 9. 中点連結定理の結果

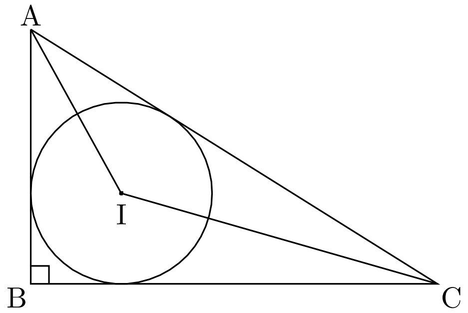
例題の解説の後に，学生は演習問題として中線定理（図 10）を mnr 法で示す．



$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

図 10. 中線定理

中点連結定理のスクリプトを参考にして，中線定理のスクリプトを作ることができる．算額の問題にも方程式を立てずに解くことができるものがある．図 11 は，福島県いわき市の熊倉神社の算額の問題である（[3] の p.39 問題 2.2.1）．



$$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{CI}=\sqrt{2}\mathrm{AC}\cdot r$$

図 11. 福島県熊倉神社の算額

$B=90^\circ$ の直角三角形 ABC の内接円の中心を I，半径を r とするとき，$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{CI}=\sqrt{2}\mathrm{AC}\cdot r$ が成り立つというものである．$B=90^\circ$ より $\tan\dfrac{B}{2}=1$ だから三角形を置くときに，putT(1,n,r) とすることに注意する．図 12 は左が中線定理，右が熊倉神社の算額のスクリプトである．

```
mkcmd1():=(
 cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
 "putT(m,n,r)",
 "A:vtxT; B:vtxL; C:vtxR",
 "M:(B+C)/2",
 "AB:edgL; BC:edgB; CA:edgR",
 "AM2:lenSeg2(A,M)",
 "BM2:lenSeg2(B,M)",
 "ls:factor(AB^2+CA^2)",
 "rs:factor(2*(AM2+BM2))",
 "end"
 ]);
);
var1="A::B::C::M::ls::rs";
```

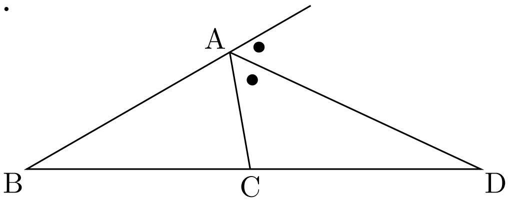
```
mkcmd1():=(
 cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
 "putT(1,n,r)",
 "A:vtxT; B:vtxL; C:vtxR",
 "AC:edgR; I:inC; r1:r",
 "AI2:lenSeg2(A,I)",
 "CI2:lenSeg2(C,I)",
 "AC2:AC^2",
 "r2:r1^2",
 "ls:factor(AI2*CI2)",
 "rs:2*AC2*r2",
 "end"
 ]);
);
var1="A::B::C::I::r1::ls::rs";
```

図 12. 演習問題のスクリプト

(3) 方程式を含む問題

mnr 法のスクリプトの基本的な書式を学習した後に，方程式を立てる必要がある問題に取り組む．例題と演習問題は次の通りである．

1. 例題 1：外角の二等分線の定理
2. 演習問題 1：内角の二等分線の定理
3. 例題 2：宮城県八坂神社の算額
4. 演習問題 2：福島県田村大元神社の算額



AB : AC = BD : DC

図 13. 外角の二等分線の定理

最初の例題は外角の二等分線の定理（図 13）で，図 14 は，そのスクリプトである．

```
1  mkcmd1():=(
2   cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
3   "putT(m1,n1,r1)",                          ← 三角形 ABC を置く
4   "A:vtxT; B:vtxL; C:vtxR",
5   "AB:edgL; AC:edgR; aA1:angT",              ← aA1 に tan(∠BAC/2) を代入
6   "putT(supA(n1),n2,r2)",                    ← 三角形 ACD を置く
7   "slideT(vtxL,C)",           ← 左の頂点 vtxL が点 C に重なるように平行移動
8   "D:vtxR; DC:edgB; aA2:angT",               ← aA2 に tan(∠CAD/2) を代入
9   "eq1:numer(supA(aA1)-timesA(2,aA2))",
10  "eq2:numer(vtxT[2]-A[2])",
11  "sol:solve([eq1,eq2],[n2,r2])",
12  "fe:frevL([D,DC],sol[2])",
13  "D:fe[1]; DC:fe[2]",
14  "BD2:lenSeg2(B,D)",
15  "ls:factor(AB^2/AC^2)",
16  "rs:factor(BD2/DC^2)",
17  "end"
18  ]);
19 );
20 var1="A::B::C::D::eq1::eq2::sol::ls::rs";
```

図 14. 外角の二等分線の定理のスクリプト

はじめに三角形 ABC を置き，次に三角形 ACD を置く．三角形 ACD の形と大きさ，すなわち n2 と r2 を決定するために，9, 10 行目で方程式を作っている．9 行目は形で，$180^\circ - \angle\mathrm{BAC} = 2\angle\mathrm{CAD}$，10 行目は大きさで，(△ACD の点 A の y 座標)=(△ABC の点 A の y 座標) についての方程式である．11 行目で連立方程式 eq1, eq2 を n2 と r2 について解き，解を sol に代入している．12 行目でその解を D と DC に代入している．15, 16 行目の辺の長さの平方の比がともに $\frac{{n_1}^2({m_1}^2+1)^2}{{m_1}^2({n_1}^2+1)^2}$ という結果が得られ，外角の二等分線の定理が成り立つことが証明される．

学生は演習問題として内角の二等分線の定理を mnr 法を用いて示す．角についての方程式が外角のときと異なるが，外角のとき同様にして示すことができる．

次の例題は図15の宮城県大崎市の八坂神社の算額の問題である（[3] の p.44 問題2.3.4）.

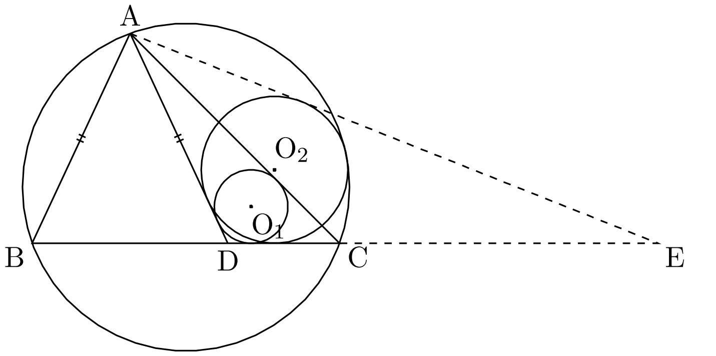


図 15. 宮城県八坂神社の算額

三角形 ABC の辺 BC 上に点 D を AB = AD となるようにとる．三角形 ADC の内接円 O_1 の半径を r_1，AD と CD に接し，三角形 ABC の外接円に内接する円 O_2 の半径を r_2 とするとき，$r_2 = 2r_1$ が成り立つというものである．線分 AE と CE は問題を解くために引いた補助線である．図 16 は，そのスクリプトで，3 行目で三角形 ABC，6 行目で三角形 ADC，13 行目で三角形 ADE を置いている．円 O_2 は三角形 ADE の内接円と考え，三角形 ADE の形と大きさ，すなわち n2 と r2 を決定するために，16, 18 行目で方程式を作っている．18 行目が 2 つの円が内接する条件式である．

```
3  "putT(m,n,r)",
4  "A:vtxT; B:vtxL; C:vtxR",
5  "I:inC; Cc:cirC; R:cirR",
6  "putT(supA(m),n,r1)",
7  "slideT(vtxR,C)",
8  "D:vtxL; I1:inC",
9  "eq1:vtxT[2]-A[2]",
10 "sol1:solve(eq1,r1)",
11 "fe1:frevL([D,I1,r1],sol1)",
12 "D:fe1[1]; I1:fe1[2]; r1:fe1[3]",
13 "putT(supA(m),n2,r2)",
14 "slideT(vtxL,D)",
15 "E:vtxR; I2:inC",
16 "eq2:vtxT[2]-A[2]",
17 "d1:lenSeg2(Cc,I2)",
18 "eq3:(R-r2)^2-d1",
19 "sol2:solve([eq2,eq3],[n2,r2])",
20 "fe2:frevL([E,I2,r2],sol2[2])",
21 "E:fe2[1]; I2:fe2[2]; r2:fe2[3]",
```

図 16. 八坂神社の算額のスクリプト

演習問題は図17の福島県田村郡三春町の田村大元神社の算額の問題である（[3] の p.44 問題 2.3.5）．AB = AC の二等辺三角形 ABC の辺 BC の中点を M とする．三角形 ABC の内接円 O_1 の半径を r_1，AM と BC に接し，三角形 ABC の外接円に内接する円 O_2 の半径を r_2 とするとき，$r_1 = r_2$ が成り立つというものである．この問題も円 O_2 を補助線を引いてできる三角形の内接円と考えて示す．

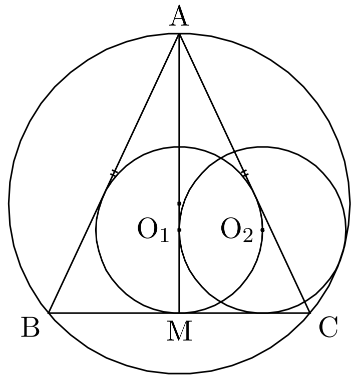


図 17. 福島県田村大元神社の算額

5　まとめと今後の課題

本研究では，和算教育プログラムを試験的に高専の一部の学生を対象として実践した．その結果，方程式を立てる必要のない比較的単純な問題だけでなく，方程式を含む複雑な問題についても，学生はおおむね自力で解答にたどり着くことができた．スクリプトの記述においては，変数名の誤りや演算子の記入漏れなど，初歩的なミスが散見されたものの，問題解決の過程を理解し，修正しながら解く姿勢が見られたことは大きな成果である．当初，算額の問題を mnr 法によって解くことは学生にとって難易度が高く，理解が困難であると予想していた．しかし，段階的に構成された教材と明確な手順を提示することで，学生が自ら問題を分析し，数学的な構造を読み解きながらプログラムを構築できることが確認できた．これは，mnr 法が単なる解法の習得にとどまらず，論理的思考力や数理的表現力を養う教育手法として有効であることを示唆している．ただし，今回の演習で扱った問題は例題に近い形式のものであり，既習内容の応用として取り組みやすいものであった．そのため，今後はより多様な算額問題に学生を挑戦させ，問題の種類や構造の違いによって mnr 法の適用可能性がどのように変化するのかを分析する必要がある．また，学生がどのような段階でつまずくのか，どのような支援を与えると自力での修正や再構成が可能になるのかといった，学習過程の詳細な観察と分析も重要である．さらに，対象とする学生数を増やし，学年や専門分野の異なる学生に対しても実践を行うことで，教育プログラムとしての汎用性や有効性を検証したい．その際，授業時間内での実施を想定し，教材の操作性・理解度・視覚的わかりやすさを高めるよう改良を加える必要がある．特に，誤り検出を支援するフィードバック機能を組み込むことで，より効果的な学習支援が可能になると考えられる．

今後は，これらの改善を重ねながら，和算教育プログラムを体系化し，数式処理システムや動的幾何ソフトとの連携を強化することで，学生が自らの数理的アイデアを形にできる環境の構築を目指す．最終的には，和算を通じて数学の美しさや論理性に対する関心を深め，創造的な問題解決力を育成する教育モデルとして発展させたい．

参考文献

[1] S. Takato, H. Makishita, A Method to Prove Japanese Theorems and Others Appeared in Wasan using Maxima, Springer LNAI14991, SCSS 2024, pp.57–78, 2024.

[2] 高遠節夫, 北本卓也, Maxima と KeTCindy による和算問題の解法と教材化, 京都大学数理解析研究所講究録 2320, pp.1–10, 2025.

[3] 深川英俊, D. Pedoe, 日本の幾何–何題解けますか?, 森北出版, 1991 .

[4] H. Fukagawa, T. Rothman, Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry, Princeton University Press, 2008.

[5] 福島県和算研究保存会, 福島の算額, 福島県和算研究保存会, 1989.

[6] 和算の館 http://www.wasan.jp