BCK-代数における上半束の特徴付けをめぐって

(On the characterizations of upper semilattices in BCK-algebras)

熊澤　昌明

(Masaaki Kumazawa)

1　問題の背景と準備

束 L は半順序構造をもつ代数であり, 束には 2 種類の二項演算 $\cap$ と $\cup$ が定義されている. 一つ目の演算は"交わり"と呼ばれ, L の任意の 2 元 x, y に対して, この 2 元の最大下界 $x \cap y$ を対応させる. 更にもう一つの演算は"結び"といい, L の任意の 2 元 x, y に対して, この 2 元の最小上界 $x \cup y$ を対応させるように定める. 従って, 束は最初からその任意の 2 元に対して下限と上限を備えている順序構造をもっている.

一方で, 種々の論理に由来する代数が知られているが, 例えばブール代数は古典命題論理に対するリンデンバウム-タルスキー代数となっており, ハイティング代数は直観主義的命題論理のリンデンバウム-タルスキー代数となっている. 更にド・モルガン代数はファジー論理の代数化と考えられているが, これら所謂, 論理代数は束としての構造をもつことが殆どである.

井関清志先生は, 1966 年に論文 [3] において, BCK 論理 (Meredith's System B-C-K) の代数化を意図して BCK-代数を次のように定義した.

定義 1.1 (BCK-代数： 井関 [7]) 二項演算 $*$ と定数 0 を持つ $<2,0>$ 型の代数 $X =< X; *, 0 >$ が **BCK-代数**であるとは, X の任意の 3 元 x, y, z に対して, 次の 5 つの条件 **BCK.1～BCK.5** を満たしている代数である.

BCK 1.　$((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$,
BCK 2.　$(x * (x * y)) * y = 0$,
BCK 3.　$x * x = 0$,
BCK 4.　$0 * x = 0$,
BCK 5.　$x * y = 0$ かつ $y * x = 0$　ならば　$x = y$　である.

この BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ において, 先に定義されている二項演算 $*$ を使って, 次のような関係 $\leqq$ を与える.

$$x * y = 0 \quad \text{であるとき, このときに限り} \quad x \leqq y \quad \text{とする.}$$

このように与えられた関係 $\leqq$ は X において順序関係となり, BCK-代数 X 自身が半順序集合となることが知られている.

しかし, 種々の論理から得られた代数のように束とはならない. つまり, 任意の 2 元に対して下限または上限が必ずしも存在するとは限らない. それでは, BCK-代数ではどのような条件を満たせば下限, あるいは上限が存在するのか. この条件を見出したい.

まず, 下限の存在についてである. 1975 年, 田中昭太郎先生は命題論理学についての知見より, 正しい推論における自然な性質を反映させるようにと, 任意の 2 元 x, y に対して, 次の条件

$$\text{可換性：} x \wedge y = y \wedge x \qquad \text{ただし} \quad x \wedge y = y * (y * x) \quad \text{とする}$$

が成り立つことを仮定した $\wedge$-commutative algebra を定義した (S.Tanaka [13]). この新たに提案された代数が, BCK-代数においてこの可換性のみを付与したものとなっていることが後にわかったので (S.Tanaka [14]), 現在ではこの代数を可換 BCK-代数と呼んでいる. この代数に関して次の結果が直ちに示された.

定理 1.1 (S. Tanaka [13]) 可換 BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ は, 二項演算 $\wedge$ に関して下半束 $X =< X; \wedge, 0 >$ となる. 即ち, X の任意の 2 元 x, y に対して, 積 $x \wedge y$ は 2 元 x, y の下限となっている.

この定理に触発され, 私は次の 2 点の違いについて興味を持った. 即ち, BCK-代数において「2 元が代数的に可換であること」と「2 元に対して順序構造として下限が存在すること」の間の関係である. そこで このテーマに関して, 私は 2 元 x, y に対する下限の存在を拡張した概念である”$(\mathrm{I})_{x,y}$-条件”を定義することで, 次の結果を得ることができた.

定理 1.2 (熊澤 [8], M. Kumazawa [9]) (I)-条件を持つ BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ は, 演算 $*$ を用いて定義された二項演算 $\times$ に関して下半束 $X =< X; \times, 0 >$ となる. 即ち, X の任意の 2 元 x, y に対して積 $x \times y$ が下限となっている.

更に, 可換 BCK-代数全体は (I)-条件を持つ BCK-代数全体の中で特別なクラスとなっている. 即ち, 可換 BCK-代数においては 常に $x \wedge y = x \times y$ が成り立っている. この (I)-条件を持つ BCK-代数全体が, すべての BCK-代数の中で, 現在知られている下半束と見做なすことのできる最大のクラスとなっている.

次は, BCK-代数における上限の存在についてである. 1974 年, 井関清志先生は本格的に BCK-代数の研究を再開した論文 [4] において, BCK-代数の特別なクラスとして 最大元 1(unit) の存在を仮定した有界 BCK-代数を定義した. これはちょうど集合論において補集合の存在を保証することと同じような仮定である. このクラスでは $1 * x$ を Nx と記すことにしている. この条件に関して田中先生は次の結果を得た.

定理 1.3 (S. Tanaka [13]) 有界かつ可換な BCK-代数 $X =< X; *, 0, 1 >$ は, 演算 $*$ より導かれる二項演算 $\wedge, \vee$ によって束 $X =< X; \wedge, \vee, 0, 1 >$ となる. 即ち, X の任意の 2 元 x, y に対して, $x \wedge y$ は下限でありかつ $x \vee y$ は上限となる. ただし, $x \wedge y = y * (y * x)$ とし, $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$ とする.

この有界可換 BCK-代数 $X =< X; \wedge, \vee, N, 0, 1 >$ は, 後に 2 つの演算 $\wedge, \vee$ に関して分配法則を満たすことが示され (T. Traczyk [15]), 3 つの演算 $\wedge, \vee, N$ に関してド・モルガン代数となっていることが分かった (K. Iséki, S. Tanaka [5]).

しかし, この代数の上限の存在は直接得られたものではなく, 下限の存在から間接的に得られたものである. 従って, 他の直接的に上限を得ることができる条件を知りたい. そこで更なる考察がなされた.

2　BCK-代数の中の上半束

この節では, 井関清志先生と Wiliam Hugh Cornish 氏によってそれぞれ提案された BCK-代数において上半束と見做すことができる 2 つのクラスについて紹介したい.

まずは, 順序構造を持つ代数である上半束の定義を確認しておく.

定義 2.1　(上半束：G. Birkhoff [1])　二項演算 $\cup$ を持つ代数 $L =< L; \cup >$ が**上半束**であるとは, L の任意の 3 元 x, y, z に対して, 次の 3 つの条件 **UL 1., UL 2., UL 3.** を満たす代数である.

UL 1.　(冪等性)　　$x \cup x = x$,

UL 2.　(可換性)　　$x \cup y = y \cup x$,

UL 3.　(結合性)　　$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$.

この上半束においては, 順序関係 $\leqq$ は二項演算 $\cup$ を使って, 次のように定義される.

$x \cup y = y$　であるとき, このときに限り　$x \leqq y$　とする.

それでは, BCK 代数において上半束ということのできる特別なクラスを紹介しようと思うが, BCK-代数 X に定義された二項演算 $*$ には以下のような他の代数には見られない特殊な基本的な性質がある.

X の任意の 2 元 x, y に関して　$x * y \leqq x$　が成り立つ.

すなわち, 任意の元 x は演算 $*$ を行うことによりもとの元より小さくなってしまう. しかし, X の 2 元 x, y の上限であるならば少なくとも x の上界でなければならない. この性質を考慮して井関先生が工夫して導入した概念が (S)-条件をみたす BCK-代数である. これを最初に紹介する.

定義 2.2 ((S)-条件をみたす BCK-代数：K. Iséki [6])　BCK-代数 X において, X の 2 元 x, y に対して, 次の集合

$$S(x, y) = \{z \in X | z * x \leqq y\}$$

を考える. 更に X の任意の 2 元 x, y に対して, 集合 $S(x, y)$ が常に次の条件 (1), (2) を満たすものとする.

(1)　$S(x, y) \neq \phi$,　　(2)　$S(x, y)$ において, $\leqq$ に関する最大元 z が存在する.

このときに, この BCK-代数 X を **(S)-条件をみたす**という. また任意の 2 元 x, y に対して $S(x, y)$ の最大の元 z は一意的に決まるので, これにより二項演算 $\circ$ が定義できる. 即ち $z = x \circ y$ と定めることにする.

この (S)-条件をみたす BCK-代数は, 次の代数構造を持つ.

定理 2.1　(K. Iséki [6])　BCK-代数 $X =< X; *, 0 >$ が (S)-条件をみたすならば, 代数 $X =< X; \circ, 0 >$ は二項演算 $\circ$ に関して可換半群となる.

また (S)-条件をみたす BCK-代数において, 二項演算 $\circ$ は 次のように $\leqq$ に関して順序関係を保つ.

命題 2.2　(K. Iséki [6])　(S)-条件をみたす BCK-代数 X において, X の 2 元 x, y が　$x \leqq y$　であれば X の任意の元 z に関して, 次の順序関係

$$x \circ z \leqq y \circ z$$

が成り立つ.

次に, BCK-代数の中の上半束を特徴付けるために必要な準備として一つの特別なクラスを定義する.

定義 2.3 (正含意性を持つ (positive implicative) : K. Iséki [4], H. Rasiowa [12])
BCK-代数 X において, X の任意の 3 元 x, y, z に対して, 次の等式：

$$(x * z) * (y * z) = (x * y) * z$$

が常に成り立つとき, BCK-代数 X は**正含意性を持つ (positive implicative)** という.

(S)-条件をみたす BCK 代数において, 次の性質が成り立つ.

命題 2.3 (K. Iséki [6]) (S)-条件をみたす BCK 代数 X において, 次の 2 つの条件は同値である.

$$\text{冪等性：} X \text{ の任意の } x \text{ に対して, } x \circ x = x \iff X \text{ は正含意性を持つ.}$$

上記の定理 2.1 と命題 2.3 より, BCK-代数において上半束となる一つのクラスを与える 次の定理 2.4 が導かれる.

定理 2.4 (上半束 クラス A : K. Iséki [6]) 正含意性を持ち, 更に (S)-条件をみたす BCK-代数 X であれば, 演算 $\circ$ に関して上半束となる.

ここまでは, 井関先生が発見された BCK 代数全体の中で上半束と見做すことが出来る"クラス A"について紹介した. 定理 2.4 の証明に関しては熊澤 [10] において, この報告の中で全てが完結するように書いてあるので, 興味を持って頂けた方は, そちらを参照してほしい.

次に, 井関先生の研究に影響を受けて W. H. Cornish 氏が与えた BCK 代数全体の中で上半束と見做せる"クラス B"に関して紹介する.

定義 2.4 (コーニッシュ性 : W. H. Cornish [2]) (S)-条件をみたす BCK-代数 $X =< X; *, \circ, 0 >$ において X の 2 元 x, y に対して, 次の等式：

$$x \circ (y * x) = y \circ (x * y)$$

が成り立つとき, x と y は**コーニッシュ性 (Cornish property)** を満たすという.

この条件に関して, 次の特別な (S)-条件をみたす BCK-代数のクラスが, 上半束と見做せることが示された.

定理 2.5 (上半束 クラス B : W. H. Cornish [2]) (S)-条件をみたす BCK-代数 $X =< X; *, \circ, 0 >$ において, X の任意の 2 元 x, y が常にコーニッシュ性を満たすと仮定する. このとき,

$$z = x \circ (y * x) = y \circ (x * y)$$

とし, $z = x \bigvee y$ と記すことにすると, BCK-代数 $X =< X; \bigvee, 0 >$ は 二項演算 $\bigvee$ に関して上半束となる.

この定理 2.5 で示された BCK-代数のクラスを, **導来された上限をもつ BCK-代数 (BCK-algebra with a derived supremum)** あるいは**コーニッシュ代数 (Cornish algebra)** ということにする.

なお, 定理 2.5 の証明に関しては, W. H. Cornish [2] を参照してほしい.

3　(Sp)-条件を持つ BCK-代数

”$(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件”は, BCK-代数において上半束となるクラスを直接的に特徴づけることを意図して, 熊澤 [10] で定義した一つの概念である. この節においては $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件の基本性質について述べ, BCK 代数全体の中で上半束と見做せる”クラス C”を紹介する. なお, $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件は BCK-代数における $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件のアナロジーとして考えたものである.

定義 3.1 ($(\mathbf{Sp})_{x,y}$-条件)　BCK-代数 X の 2 元 x, y に対して, X の元 z が存在し, 以下の条件 (I)〜(III) を満たすとき, z は **$(\mathbf{Sp})_{x,y}$-条件を満たす**という.

(I)　$x \leqq z,\ y \leqq z,$

(II)　$z * x \ \leqq\ y * x,$

(III)　$z * y \ \leqq\ x * y.$

更に, この条件を使って BCK-代数全体の中に新たに特別なクラスを定義する.

定義 3.2 ((Sp)-条件を持つ BCK-代数)　BCK 代数 X において, 次の集合

$$\mathrm{Sp}(x,y) = \{z \in X | X \text{ の } 2 \text{ 元 } x, y \text{ に対して } z \text{ が } (\mathrm{Sp})_{x,y}\text{-条件を満たす}\ \}$$

を考える. X の任意の 2 元 x, y に対して, 集合 $\mathrm{Sp}(x,y)$ が次の 2 つの条件 (1), (2) を満たすものとする.

(1)　$\mathrm{Sp}(x,y) \neq \phi$,　　(2)　$\mathrm{Sp}(x,y)$ において, $\leqq$ に関する最小元 z が存在する.

この条件を満たす BCK-代数 X を **(Sp)-条件を持つ**といい, このとき 2 元 x, y に対して $\mathrm{Sp}(x,y)$ の最小元 z を $x + y$ で表すことにする. このとき $+$ は X での二項演算になる. なお, $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件の定義から分かることだが, 演算 $\circ$ と演算 $+$ の間には $x + y \leqq x \circ y$ の関係が成り立つ.

ここで, $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件の基本性質を示すために重要な役割を果たしている 次の定理を紹介しておく. これは (S)-条件をみたす BCK-代数の一つの特徴付けである. 即ち, BCK-代数に新たに定義する二項演算 $\circ$ が以下の等式を満たす事が, BCK-代数が (S)-条件をみたすための必要十分条件となっている.

定理 3.1 (湯谷の等式 : H. Yutani [16])　BCK-代数 $X = < X; *, 0 >$ において, 次の条件が X が (S)-条件をみたすための必要十分条件になっている.

条件 : X 上に新たな二項演算 $\circ$ が定義されたとき, X の任意の 3 元 x, y, z が, 次の等式 :

$$(x * y) * z = x * (y \circ z)$$

を満たす.

(証明)　(熊澤 [11] ; pp 45, 46, 定理 2.3 を参照してほしい.)

$(\mathbf{Sp})_{x,y}$-条件の基本性質

ここから, $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件に関する基本性質を紹介していく. まず, $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件がコーニッシュ性を拡張した概念であることを示す.

命題 3.2　(S)-条件をみたす BCK-代数において, 2 元 x, y が コーニッシュ性：

$$x \circ (y * x) = y \circ (x * y) = z$$

を持つとき, z は $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件も満たす.

(証明)　(熊澤 [11] ; p109, 命題 3.1 を参照してほしい.)

次に, 定理 3.4 を示すための補題を用意する.

補題 3.3　(S)-条件をみたす BCK-代数の 3 元 x, y, z において, 次の同値が成り立つ.

$$z * x \leqq y * x \iff x \circ (y * x) \geqq z.$$

(証明)　(熊澤 [11] ; pp109, 110, 補題 3.2 を参照してほしい.)

次に, $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件が BCK-代数における上限の存在の一つの拡張となっていることを示す.

定理 3.4　(S)-条件をみたす BCK-代数 X において, X の 2 元 x, y に対してその上限 z が存在するとき, z は $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件を満たす.

(証明)　(熊澤 [11] ; pp110, 111, 定理 3.3 を参照してほしい.)

次に, (Sp)-条件を持つ BCK-代数を特徴付けるための結果である定理 3.6 を証明するための補題を用意する.

補題 3.5　BCK-代数 X において, X の 2 元 x, y に対する集合 $\mathrm{Sp}(x, y)$ が空集合でなく, この集合に最小元が存在するとき, X の中に x と y の上限が存在する.

(証明)　背理法を用いて示す. まず始めに, x と y に対してその上限が存在しないと仮定する.
すると, X において x と y の共通の上界の中に異なる 2 つの極小元 u, u' が存在すると仮定しても一般性は失なわれない. 即ち

$$x \leqq u,\ y \leqq u \ \ (\text{条件 I}) \ \ \text{かつ} \ \ x \leqq u',\ y \leqq u' \ \ (\text{条件 I}) \ \ \text{かつ} \ \ u \neq u'$$

を満たしている. また, その存在が仮定されている $\mathrm{Sp}(x, y)$ の最小元を m で表すことにすれば, m は x と y の共通の上界の一つであり, u と u' は x と y 共通の上界の中で極小元なので, 次が成り立つ.

$$u \leqq m \ \ \text{かつ} \ \ u' \leqq m$$

この不等式と m が $\mathrm{Sp}(x, y)$ の元であることから

$$u * x \leqq m * x \leqq y * x \quad (\text{条件 II}), \ \ u * y \leqq m * y \leqq x * y \quad (\text{条件 III})$$

よって, u は $\mathrm{Sp}(x.y)$ の元となり, 同様にして, u' も $\mathrm{Sp}(x, y)$ の元となる. 以上のことから

$$u, u' \in \mathrm{Sp}(x, y) \ \ \text{かつ} \ \ u \leqq m \ \ \text{かつ} \ \ u' \leqq m \ \ \text{かつ} \ \ u \neq u'.$$

が導かれるが, これは m が $\mathrm{Sp}(x, y)$ の中の最小元であることに矛盾する. この矛盾は x と y に対する上限が存在しないと仮定したことから導きだされた. 従って, x と y の上限が X の中に存在することが分かる.

更に, 次の重要な結果が成り立つことを示す.

定理 3.6　BCK-代数 X において, X の 2 元 x, y に対する集合 $\mathrm{Sp}(x, y)$ が空集合でなく, この集合に最小元が存在するとき, この最小元が x と y の上限となる.

(証明)　背理法を用いて示す. まず, X の 2 元 x, y に対する集合 $\mathrm{Sp}(x, y)$ における最小元の存在が仮定されているが, この元を m と書くことにする. そして, 結論の否定 : この m が x と y の上限ではないと仮定する. ここで補題 3.5 より x と y の上限 u は存在するはずなので, 次が導かれる.

$$x \leqq u,\ y \leqq u \ \ (\text{条件 I}) \ \ \text{かつ} \ \ u < m$$

このとき, 上記の不等式と m が $\mathrm{Sp}(x, y)$ の元であることから, 次の不等式が成り立つ.

$$u * x \leqq m * x \leqq y * x \ \ (\text{条件 II}),\ \ u * y \leqq m * y \leqq x * y \ \ (\text{条件 III})$$

よって, 上限 u は $\mathrm{Sp}(x, y)$ に属することになるが, 更に $u < m$ を満たしている.
この事実は, m が $\mathrm{Sp}(x, y)$ において最小元であることに矛盾する. この矛盾は m が x と y の上限でないと仮定したために導かれた. 従って, $\mathrm{Sp}(x, y)$ の中の最小元 m は x と y の上限である.

(Sp)-条件を持つ BCK 代数の特徴付け

先の定理 3.6 より, (Sp)-条件を持つ BCK-代数 X には, X の任意の 2 元 x, y に対して $\mathrm{Sp}(x, y)$ に最小限 m が存在し, その元 m は x, y の上限になるので, 次の定理 3.7 が導かれる.

定理 3.7　(上半束 クラス C)　(Sp)-条件を持つ BCK 代数 $X =< X; *, 0 >$ において, X の任意の 2 元 x, y に対して, $\mathrm{Sp}(x, y)$ の最小元 m とすると, $m = x + y$ と記すことにすると, BCK 代数 $X =< X; +, 0 >$ は二項演算 $+$ に関して上半束となる.

これで, 更にもう一つ BCK 代数の中で上半束と見做すことができる新しいクラスの存在が示された.

ここまでで, BCK 代数全体の中で上半束と見做すことのできる 3 つのクラスの存在が確認できたが, これら 3 クラスの間の関係について調べてみたい.

定理 3.8　正含意性を持ち, 更に (S)-条件をみたす BCK 代数 $X =< X; *, \circ, 0 >$ において, X の任意の 2 元 x と y はコーニッシュ性を満たす. 即ち, 演算 $\bigvee$ が定義できて. 導来された上限をもつ BCK-代数となる.

(証明)　X の任意の 2 元 x, y に対して, $z = x \circ (y * x), z' = y \circ (x * y)$ とする. このとき. $z = z'$ を示す. 仮定より, 湯谷の等式と正含意性を持つことが成り立つので, これを使うと

$$\begin{aligned} z * z' &= z * \{y \circ (x * y)\} \\ &= (z * y) * (x * y) \\ &= (z * x) * y \\ &= z * (x \circ y) \\ &= \{x \circ (y * x)\} * (x \circ y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって, $z \leqq z'$ が成り立つ. 同様にして $z' \leqq z$ も成り立つ. 従って, x と y がコーニッシュ性を満たすことが分かった.

この定理によって, 上半束クラス A が上半束クラス B に含まれることがいえる.

定理 3.9　導来された上限をもつ BCK-代数は (Sp)-条件を持つ BCK 代数である.

(証明)　導来された上限をもつ BCK 代数 X の任意の 2 元 x, y に対して, $z = x \circ (y * x) = y \circ (x * y)$ とすれば, 命題 3.2 より z は $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件を満たす. 更に z は $\mathrm{Sp}(x, y)$ の最小元なので, X は (Sp)-条件を持つ BCK 代数となる.

この結果より, 上半束クラス B が上半束クラス C に含まれることが分かる. しかし, 定理 3.8, 3.9 のそれぞれの定理の逆が成り立つかどうかは分からない. それでも上の 2 つの定理より次の結果は得られる.

命題 3.10　BCK-代数の中で上半束と見做すことのできる 3 つのクラスである正含意性と (S)-条件をみたす BCK-代数 :クラス A, 導来された上限をもつ BCK-代数 :クラス B, (Sp)-条件を持つ BCK-代数： クラス C とすれば, 次の包含関係：

$$\{\,\textbf{クラス A}\} \subseteqq \{\,\textbf{クラス B}\} \subseteqq \{\,\textbf{クラス C}\}$$

が成り立つ.

4　(S)-条件をみたす BCK-代数の例

これまでに, BCK-代数全体の中に上半束と見做すことのできる 3 つのクラスが存在することが分かったが, それらの 3 つのクラスの関係を具体例の中で調べてみる.

例 4.1　4 元からできている集合 $X = \{0, a, b, 1\}$ が全順序関係 $0 < a < b < 1$ を満たすものとする.
この集合 X の上に BCK-代数の代数構造を与えたとき, 非同型な BCK-代数の構造は 6 種類存在する.
これら 6 種類の BCK-代数は, 以下の乗積表 A, B, C, D, E, F となる.

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	1	1	0

乗積表　A

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	1	b	0

乗積表　B

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
1	1	1	1	0

乗積表　C

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
1	1	b	a	0

乗積表　D

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	b	a	0

乗積表　E

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	a	0	0
1	1	a	a	0

乗積表　F

集合 X は全順序構造を備えているので, 当然ながら X 上の BCK-代数は井関の $(S)-$ 条件をみたすが, 演算 $*$ に関する乗積表 A∼F に対する, 演算 $\circ$ についての乗積表 A($\circ$)∼F($\circ$) を以下に挙げる.

$\circ$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	b	1
b	b	b	b	1
1	1	1	1	1

乗積表　A($\circ$)

$\circ$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	b	1
b	b	b	1	1
1	1	1	1	1

乗積表　B($\circ$)

$\circ$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	b	b	1
b	b	b	b	1
1	1	1	1	1

乗積表　C($\circ$)

$\circ$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	b	1	1
b	b	1	1	1
1	1	1	1	1

乗積表　D($\circ$)

$\circ$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	1	1
1	1	1	1	1

乗積表　E($\circ$)

$\circ$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	1	1	1
b	b	1	1	1
1	1	1	1	1

乗積表　F($\circ$)

第 2 に, 例 4.1 の BCK-代数は 6 種類全てが (Sp)-条件も持つ BCK-代数である. 以下, これらについて演算 $+$ に関する乗積表を順に A($+$)∼F($+$) として挙げる.

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	b	1
b	b	b	b	1
1	1	1	1	1

乗積表　A($+$)

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	b	1
b	b	b	b	1
1	1	1	1	1

乗積表　B($+$)

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	b	1
b	b	b	b	1
1	1	1	1	1

乗積表　C($+$)

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	b	1
b	b	b	b	1
1	1	1	1	1

乗積表　D($+$)

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	b	1
b	b	b	b	1
1	1	1	1	1

乗積表　E($+$)

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	b	1
b	b	b	b	1
1	1	1	1	1

乗積表　F($+$)

第3に, 例 4.1 の非同型な 6 種類の BCK-代数がコーニッシュ性を満たすかどうかを調べると乗積表 A, B, C, D の4種類がコーニッシュ性を満たし, 演算 $\bigvee$ に関して上半束となる. 乗積表 E, F ではコーニッシュ性を満たさない. 以下に, その2元の例を挙げておく.

乗積表 E においては, $a \circ (b * a) = a \circ b = 1 \neq b = b \circ 0 = b \circ (a * b)$ となり,

また, 乗積表 F においては, $a \circ (b * a) = a \circ a = 1 \neq b = b \circ 0 = b \circ (a * b)$ となる.

従って, 乗積表 E, F の2種類の BCK-代数はコーニッシュ性を満たさない.

第4に, 6種類の中で正含意性を持つ BCK-代数が存在するのかを調べる. そのために次の命題を用意する.

命題 4.1　BCK-代数 X において, 次の同値性が成り立つ.

X の任意の3元 x, y, z に対して, 正含意性 : $(x * z) * (y * z) = (x * y) * z \iff (x * y) * y = x * y$.

(証明)　(熊澤 [10] ; pp 46, 47, 定理 2.4 を参照してほしい.)

この命題 4.1 より, 正含意性を調べるには3元の間の等式でなく2元の間の等式を調べれば十分であることが分かる. すると乗積表 B, C, D, E, F の5種類は正含意性を持たない. それぞれの成立しない場合を以下に示す.

乗積表 B においては, $(1 * b) * b = b * b = 0 \neq b = 1 * b$ となり,

乗積表 C においては, $(b * a) * a = a * a = 0 \neq a = b * a$ となり,

乗積表 D においては, $(b * a) * a = a * a = 0 \neq a = b * a$, $(1 * a) * a = b * a = a \neq b = 1 * a$, $(1 * b) * b = a * b = 0 \neq a = 1 * b$ となり,

乗積表 E においては, $(1 * b) * b = a * b = 0 \neq a = 1 * b$ となり,

乗積表 F においては, $(b * a) * a = a * a = 0 \neq a = b * a$, $(1 * a) * a = a * a = 0 \neq a = 1 * a$, $(1 * b) * b = a * b = 0 \neq a = 1 * b$ となる.

乗積表 A のみが正含意性を持つが, 最後にそのことを以下に示す. 集合 X は4元から出来ているので 12 個の等式が成り立つかどうかをチェックすればよいが, 以下のようになる.

$(0 * a) * a = 0 * a = 0 = 0 * a, (a * 0) * 0 = a * 0 = a = a * 0,$
$(0 * b) * b = 0 * b = 0 = 0 * b, (b * 0) * 0 = b * 0 = b = b * 0,$
$(0 * 1) * 1 = 0 * 1 = 0 = 0 * 1, (1 * 0) * 0 = 1 * 0 = 1 = 1 * 0,$
$(a * b) * b = 0 * b = 0 = a * b, (b * a) * a = b * a = b = b * a,$
$(a * 1) * 1 = 0 * 1 = 0 = a * 1, (1 * a) * a = 1 * a = 1 = 1 * a,$
$(b * 1) * 1 = 0 * 1 = 0 = b * 1, (1 * b) * b = 1 * b = 1 = 1 * b.$

以上 12 個すべての等式を満たすので, 乗積表 A は正含意性を持つことが分かる.

これまでの例 4.1 の観察より, 次の事実が分かる.

事実 1　乗積表 A, B, C, D, E, F は全て (S)-条件をみたす BCK-代数である. だが, その新たに定義された演算 $\circ$ の積に着目すると, 集合 X で作られる上半束における演算 $\cup$ と一致する代数は乗積表 A のみである.

事実 2　乗積表 A, B, C, D, E, F は全て (Sp)-条件を持つ BCK-代数となり, 新たに定義される演算 $+$ の積は, 6 種類全てで集合 X の上に作られる上半束における演算 $\cup$ の積と一致する.

事実 3　6種類の BCK-代数の中で, 乗積表 A,B,C,D の4種のみが導来された上限をもつ BCK-代数となる.

事実 4　6種類の BCK-代数の中で, 正含意性を持つのは乗積表 A で与えられる BCK 代数のただ一つだけである.

この例 4.1 の調査により分かった重要な点は, 定理 3.8, 3.9 の逆はいずれも成り立たないということが明らかになったことである.

5　主結果：BCK-代数において上半束となる 3 つのクラスの関係

最後に, この報告の中に現れた BCK-代数において上半束と見做せる3つのクラスの関係についてまとめておく.

定理 5.1　正含意性を持ち更に (S)-条件をみたす BCK 代数全体をクラス A, 導来する上限を持つ BCK-代数全体をクラス B, そして (Sp)-条件を持つ BCK-代数全体をクラス C とするとき, 次の包含関係

$$\{\text{ クラス }\mathbf{A}\} \subsetneqq \{\text{ クラス }\mathbf{B}\} \subsetneqq \{\text{ クラス }\mathbf{C}\}$$

が成立する.

この結果より気になる事がある. かつて BCK-代数における下半束の特徴付けの問題に取り組み (I)-条件を持つ BCK-代数と可換 BCK-代数の間に包含関係を見出した. 今回は BCK-代数における上半束の特徴付けに取り組み (Sp)-条件を持つ BCK-代数, 導来する上限をもつ BCK-代数, そして正含意性と (S)-条件をもつ BCK-代数の関係を調べた. BCK-代数は順序関係に関して束のように上下に関して対称的ではないので, 単純にそうであると言うことはできないが, これらの BCK-代数において上下の間には何らかの双対性があるように思えてならない. 現在はこの方向で BCK-代数の下半束と上半束が捉え直せないだろうかと考えている.

謝辞　BCK-代数 X において, X の 2 元 x, y の上限を捉える概念として"$(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件"のアイデアを最初に持ったのは, コロナのパンデミックが起こった 2020 年頃であった. それから 2021 年の [10], 2022 年の [11] を経て足掛け5年の年月が掛かったが, 今回のこの報告でやっと一つの解決にたどり着くことができた. このことは私には大変感慨深いものなった. この結果にたどり着くことができたのは, RIMS において この研究の発表をする機会を与えて頂いたからであると思っている. この場をかりてこの研究集会の研究代表者, 参加者, 関係者の方々にその深い感謝をお伝えしたい.

Acknowlegments

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Resarch Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] G. Birkhoff, Lattice Theory (Third Edition), Colloquium Publication, **25**, American Mathematical Society, (1993).

[2] W. H. Cornish, BCK-Algebras with a Supremum, *Math. Japonicae*,**27**, No. 1 (1982), 63-73.

[3] K. Iséki, An Algebra Related with a Propositional Calculus, *Proc. Japan Acad.*,**42**, No.1(1966), 26-29.

[4] K. Iséki, Some Properties of BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*,**2**(1974), 193-201.

[5] K. Iséki and S. Tanaka, Introduction to the Theory of BCK-Algebras, *Math. Japonicae*, **23**, No.1 (1978), 1-26.

[6] K. Iséki, BCK-Algebra with Condition (S), *Math. Japonicae*, **24**, No.1(1979), 107-119.

[7] 井関清志, BCK-代数, 数理解析研究所講究録=*RIMS Koukyuroku*, **395**, (1980), 95-111.

[8] 熊澤昌明, BCK-代数における $(\mathrm{I})_{x,y}$-条件の性質をめぐって, 数理解析研究所講究録=*RIMS Koukyuroku*, **2130**, (2019), 57-63.

[9] M. Kumazawa, A New Class in BCK-Algebras, *Scientiae Math. Japonicae,* **84**, No.1 (2021), 61-75.

[10] 熊澤昌明, BCK-代数における井関の"(S)-条件"について, 数理解析研究所講究録=*RIMS Koukyuroku*, **2229**(2022), 42-51.

[11] 熊澤昌明, (S)-条件をもつ BCK-代数における $(\mathrm{Sp})_{x,y}$-条件について, 数理解析研究所講究録=*RIMS Koukyuroku*, **2265**(2023), 104-112.

[12] H. Rasiowa, An Algebraic Approach Non-classical Logics, Studies in Logic and The Foundations of Mathematics, **78**, North-Holland, (1974).

[13] S. Tanaka, A New Class of Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 37-43.

[14] S. Tanaka, On $\wedge$-Commutative Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 59-64.

[15] T. Traczyk, On the Variety of Bounded Commutative BCK-Algebras, *Math. Japonicae*, **24**, (1979), 283-292.

[16] H. Yutani, An Axiom System for a BCK-Algebra with the Condition (S), *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **7** (1979), 427-432.