参入放棄のある待ち行列における
参入数で条件付けた過渡解析

林 海斗　井上 文彰　滝根 哲哉
大阪大学・工学研究科

Kaito Hayashi　Yoshiaki Inoue　Tetsuya Takine
Graduate School of Engineering, The University of Osaka

1　はじめに

本稿では，参入放棄のあるマルコフ型待ち行列において，有限時間区間 $[0, T]$ ($T \in (0, \infty)$) における総参入客数が K 人 ($K = 1, 2, \ldots$) であるという事象で条件付けた過渡状態確率の解析を行う．特に，客の到着は非斉時ポワソン過程に従い，到着時の系内客数に応じた参入放棄があるという仮定の下で，各時刻 t ($0 \leq t \leq T$) に対して，時間区間 $[0, t]$ にシステムに参入した累積客数 (累積参入数)，参入を放棄した累積客数 (累積放棄数)，時刻 t における系内客数ならびにサービスフェーズの結合確率を解析する．

システムがマルコフ型であるという仮定より，上記の結合確率はマルコフ連鎖の過渡状態確率を用いて特徴づけられる．しかしながら，マルコフ連鎖の過渡解析によってこの量を求める場合，無限個の状態を扱う必要があり，数値計算が困難であるという課題が存在する．また，時間区間 $[0, T]$ における総参入客数で条件付けるためには時間区間 $[t, T]$ における状態遷移を考える必要がある．素朴なアプローチでは，各時刻 t に対してこの状態遷移を別個に計算する必要があり，複数の t に対して過渡状態確率を計算する場合，非効率であるという問題も存在する．

本稿では，これらの解決策として，累積放棄数に関して確率母関数を利用した解析法を考察し，累積放棄数の階乗積率を導出する．また，時刻 $T - u$ におけるシステムの状態で条件付けた時刻 T における累積参入数の条件付き分布が，u に関する線形一階微分方程式の解として与えられることを示す．これにより，時刻 T までの累積参入数で条件付けた，時刻 t における累積放棄数の階乗積率を効率的に計算することが可能となる．

以下の本稿は次のように構成される．2 節において本稿で考察するモデルについて説明し，素朴なアプローチで解析した際の数値計算上の課題点ならびに本稿で行う解析の概要を示す．3 節において累積参入数で条件付けた累積放棄数に関する確率母関数の解析法を示し，それを用いて累積放棄数の階乗積率の解析法を示す．4 節において数値例を示し，最後に 5 節で本稿を締めくくる．

2　モデルと解析法

2.1　モデル

有限時間区間 $[0,T]$ $(T \in (0,\infty))$ に客が到着する待ち行列を考える．客の到着は率 $\lambda(t)$ の非斉時ポワソン過程に従うと仮定し，$t > T$ に対して $\lambda(t) = 0$ とする．さらに，システムに到着した客は自身の到着直前の系内客数に応じた確率で参入を放棄するものとする．具体的には，到着客が系内に ℓ 人 $(\ell = 0,1,\ldots)$ を見たとき，確率 β_ℓ $(\beta_\ell \in [0,1])$ でシステムに参入し，確率 $1-\beta_\ell$ で即座に退去するものとする．

$A(t)$ $(t \geq 0)$ を時間区間 $[0,t]$ にシステムに到着した累積客数 (累積到着数) とする．また，時間区間 $[0,t]$ に到着した客のうち，システムに参入した累積客数 (累積参入数) を $A^{\mathrm{join}}(t)$，参入を放棄した累積客数 (累積放棄数) を $A^{\mathrm{balk}}(t)$ とする．さらに，$D(t)$ を時間区間 $[0,t]$ にサービスを完了してシステムを離脱した累積客数 (累積離脱数) とし，$L(t)$ を時刻 t における系内客数とする．ただし，時刻 0 においてシステムは空である，すなわち，$L(0) = 0$ であると仮定する．このとき，定義より次の関係が成り立つ．

$$A(t) = A^{\mathrm{join}}(t) + A^{\mathrm{balk}}(t), \quad A^{\mathrm{join}}(t) = L(t) + D(t), \qquad t \geq 0$$

システムのサービス機構はマルコフ型であると仮定し，時刻 t におけるシステムのサービスフェーズを $S(t)$ とする．ただし，$S(t)$ はシステムの挙動を記述するのに十分な情報を含んでおり，有限状態集合 $\mathcal{S}$ の要素であるとする．このとき，累積参入数，系内客数，サービスフェーズの組 $\{(A^{\mathrm{join}}(t), L(t), S(t))\}_{t\geq 0}$ は，状態空間 $\Omega^{\mathrm{orig}} \coloneqq \{(k,\ell,s);\ k = 0,1,\ldots,\ \ell = 0,1,\ldots,k,\ s \in \mathcal{S}\}$ 上の連続時間マルコフ連鎖をなす．この連続時間マルコフ連鎖の遷移速度行列を $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{orig}}(t)$ とする．ただし，状態は辞書式順序で並べられているとする．このとき，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{orig}}(t)$ は $A^{\mathrm{join}}(t)$ をレベル変数，$(L(t), S(t))$ の組をフェーズ変数に持つ 2 変数マルコフ連鎖の遷移速度行列とみなすことができる．

本稿では，時刻 T までの累積参入数が K 人 $(K = 1,2,\ldots)$ であるという事象で条件付けたシステムの過渡解析を行うため，累積参入数が K 人以下である状態のみを考えれば十分である．そこで，累積参入数が K 以下である状態の集合を $\Omega \coloneqq$

$\{(k,\ell,s);\ k=0,1,\dots,K,\ \ell=0,1,\dots,k,\ s\in\mathcal{S}\}$ とする．このとき，連続時間マルコフ連鎖 $\{(A^{\mathrm{join}}(t),L(t),S(t))\}_{t\geq 0}$ の遷移速度行列 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{orig}}(t)$ は，有限の状態空間 Ω に属する状態間の遷移を表す劣遷移速度行列 $\boldsymbol{Q}(t)$ を用いて，次のように表される．

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{orig}}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}(t) & \boldsymbol{Q}_{1,2}(t)\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_{2,2}(t)\end{pmatrix}$$

時刻 t におけるシステム状態の結合確率を $p_{k,\ell,s}(t)$ と定義する．

$$p_{k,\ell,s}(t)\coloneqq \Pr[A^{\mathrm{join}}(t)=k,L(t)=\ell,S(t)=s],\quad (k,\ell,s)\in\Omega$$

さらに，$p_{k,\ell,s}(t)$ を辞書式順序で並べた行ベクトルを $\boldsymbol{p}(t)$ とする．定義より，$\boldsymbol{p}(0)$ の各要素 $p_{k,\ell,s}(0)$ は次式で与えられる．

$$p_{k,\ell,s}(0)=\begin{cases}\Pr[S(0)=s], & k=0,\ell=0,s\in\mathcal{S}\\ 0, & \text{その他}\end{cases}\tag{1}$$

$\boldsymbol{p}(t)$ は，初期条件 (1) の下で，次の微分方程式の解として与えられる．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{Q}(t)\tag{2}$$

本稿では時刻 T までの累積参入数が K 人である条件下で，時刻 $t\in[0,T]$ における累積参入数，系内客数，サービスフェーズ，累積放棄数の結合確率 $\pi_{k,\ell,s,b}(t\mid K)$ を考える．

$$\pi_{k,\ell,s,b}(t\mid K)\coloneqq \Pr[A^{\mathrm{join}}(t)=k,L(t)=\ell,S(t)=s,A^{\mathrm{balk}}(t)=b\mid A^{\mathrm{join}}(T)=K],\\ (k,\ell,s)\in\Omega,\ b=0,1,\dots\tag{3}$$

2.2 解析法

式 (3) で定義される条件付き結合確率 $\pi_{k,\ell,s,b}(t\mid K)$ を計算する素朴な方法として，四つの変数の組 $\{(A^{\mathrm{join}}(t),L(t),S(t),A^{\mathrm{balk}}(t))\}_{t\geq 0}$ が従う状態空間 $\widehat{\Omega}\coloneqq\{(k,\ell,s,b);\ k=0,1,\dots,K,\ \ell=0,1,\dots,k,\ s\in\mathcal{S},\ b=0,1,\dots\}$ 上の連続時間マルコフ連鎖を解析する方法が考えられる．この連続時間マルコフ連鎖の過渡状態確率を $p_{k,\ell,s,b}(t)$ とする．

$$p_{k,\ell,s,b}(t)\coloneqq \Pr[A^{\mathrm{join}}(t)=k,L(t)=\ell,S(t)=s,A^{\mathrm{balk}}(t)=b],\quad (k,\ell,s,b)\in\widehat{\Omega}$$

このとき，$p_{k,\ell,s,b}(t)$ を並べた行ベクトル $\hat{\boldsymbol{p}}(t)$ は，次の微分方程式を満たす．

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}(t)}{\mathrm{d}t}=\hat{\boldsymbol{p}}(t)\widehat{\boldsymbol{Q}}(t)\tag{4}$$

ただし，$\widehat{\boldsymbol{Q}}(t)$ は，$\widehat{\Omega}$ 上の状態遷移を表す劣遷移速度行列である．

式 (3) で定義される条件付き確率は，$p_{k,\ell,s,b}(t)$ を用いて次のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
&\pi_{k,\ell,s,b}(t \mid K) \\
&\quad = \frac{\Pr[A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s, S^{\mathrm{balk}}(t)=b, A^{\mathrm{join}}(T)=K]}{\Pr[A^{\mathrm{join}}(T)=K]} \\
&\quad = \frac{p_{k,\ell,s,b}(t)\Pr[A^{\mathrm{join}}(T)=K \mid A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s, S^{\mathrm{balk}}(t)=b]}{\Pr[A^{\mathrm{join}}(T)=K]} \\
&\quad = \frac{p_{k,\ell,s,b}(t)\Pr[A^{\mathrm{join}}(T)=K \mid A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s]}{\Pr[A^{\mathrm{join}}(T)=K]} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ただし，最後の等号では，時刻 t におけるシステム状態 $(A^{\mathrm{join}}(t), L(t), S(t))$ が与えられたという条件下で，$A^{\mathrm{join}}(T)$ と $A^{\mathrm{balk}}(t)$ が条件付き独立であることを用いた．ここで，遷移確率 $\Pr[A^{\mathrm{join}}(T)=K \mid A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s]$ は，遷移速度行列 $\boldsymbol{Q}(t)$ から求められるため，累積参入数で条件付けた過渡確率 $\pi_{k,\ell,s,b}(t \mid K)$ は式 (5) で完全に特徴づけられる．しかしながら，上記の方法で $\pi_{k,\ell,s,b}(t \mid K)$ を数値計算するにあたり，以下の二つの点が課題となる．

(i) 累積放棄数の解析

加算無限の状態空間 $\widehat{\Omega}$ 上のマルコフ連鎖を考察するため，その過渡状態確率 $\hat{\boldsymbol{p}}(t)$ を式 (4) によって直接数値計算するのは不可能である．累積放棄数 $\{A^{\mathrm{balk}}(t)\}_{t\geq 0}$ を，背後状態 $(A^{\mathrm{join}}(t), L(t), S(t)) \in \Omega$ を持つマルコフ型計数過程として扱う方法も考えられるが，$|\Omega| = O(K^2|\mathcal{S}|)$ という大きな背後状態数を扱う必要が生じる．例えば，$K = 100$，$|\mathcal{S}| = 2$ の場合，背後状態数はおよそ $10{,}000$ であり，K が大きい場合に数値計算が困難となる．

(ii) 遷移確率 $\Pr[A^{\mathrm{join}}(T)=K \mid A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s]$ の計算

上記の遷移確率は微分方程式 (2) を適当な境界条件の下で解くことで得られる．しかしながら，複数の時刻 t に対して $\pi_{k,\ell,s,b}(t \mid K)$ を計算する場合，考察時刻 t ごとに時間区間 $(t, T]$ の状態遷移を計算する必要があり，非効率である．

課題点 (i) の解決策として，本稿では確率母関数を用いたアプローチを考える．過渡状態確率 $p_{k,\ell,s,b}(t)$ を直接計算するのは困難であるが，確率母関数を用いることにより，累積放棄数の積率は効率的に計算できる．具体的には，累積放棄数に関する (条件なしの) 確率母関数を $p^*_{k,\ell,s}(z,t)$ ($|z| \leq 1$, $0 \leq t \leq T$) とし，累積放棄数の i 次階乗積率を

$p^{(i)}_{k,\ell,s}(t)$ $(i=0,1,\ldots,\ 0\le t\le T)$ と定義する．

$$p^*_{k,\ell,s}(z,t) \coloneqq \sum_{b=0}^{\infty} p_{k,\ell,s,b}(t) z^b = \mathrm{E}\big[z^{A^{\mathrm{balk}}(t)} \cdot \mathbb{1}_{\{A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s\}}\big], \\ (k,\ell,s)\in\Omega,\ 0\le t\le T \quad (6)$$

$$p^{(0)}_{k,\ell,s}(t) \coloneqq p^*_{k,\ell,s}(1,t) = p_{k,\ell,s}(t)$$

$$p^{(i)}_{k,\ell,s}(t) \coloneqq \frac{\partial^i p^*_{k,\ell,s}(z,t)}{\partial z^i}\bigg|_{z=1} = \mathrm{E}\Bigg[\prod_{h=0}^{i-1}(A^{\mathrm{balk}}(t)-h)\cdot \mathbb{1}_{\{A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s\}}\Bigg], \\ i=1,2,\ldots \quad (7)$$

ただし，$\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ は指示関数である．同様に，時刻 T までの累積参入数で条件付けた累積放棄数に関する確率母関数 $\pi^*_{k,\ell,s}(z,t\mid K)$ ならびに階乗積率 $\pi^{(i)}_{k,\ell,s}(t\mid K)$ を次式で定義する．

$$\pi^*_{k,\ell,s}(z,t\mid K) \coloneqq \sum_{b=0}^{\infty} \pi_{k,\ell,s,b}(t\mid K) z^b \\ = \mathrm{E}\big[z^{A^{\mathrm{balk}}(t)} \cdot \mathbb{1}_{\{A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s\}} \mid A^{\mathrm{join}}(T)=K\big], \\ (k,\ell,s)\in\Omega,\ 0\le t\le T \quad (8)$$

$$\pi^{(0)}_{k,\ell,s}(t\mid K) \coloneqq \pi^*_{k,\ell,s}(1,t\mid K) = \Pr[A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s \mid A^{\mathrm{join}}(T)=K]$$

$$\pi^{(i)}_{k,\ell,s}(t\mid K) \coloneqq \frac{\partial^i \pi^*_{k,\ell,s}(z,t\mid K)}{\partial z^i}\bigg|_{z=1} \\ = \mathrm{E}\Bigg[\prod_{h=0}^{i-1}(A^{\mathrm{balk}}(t)-h)\cdot \mathbb{1}_{\{A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s\}} \mid A^{\mathrm{join}}(T)=K\Bigg], \\ i=1,2,\ldots \quad (9)$$

本稿では，式 (6) で定義される (条件なしの) 確率母関数 $p^*_{k\ell,s}(z,t)$ が時刻 t に関する線形一階微分方程式の解で与えられることを示し，それを用いて累積参入数で条件付けた確率母関数 $\pi^*_{k,\ell,s}(z,t\mid K)$ を特徴づける．さらに，これらの結果を用いて，条件なしの階乗積率 $p^{(i)}_{k,\ell,s}(t,K)$ ならびに累積参入数で条件付けた階乗積率 $\pi^{(i)}_{k,\ell,s}(t\mid K)$ を導出する．

一方，課題点 (ii) の解決策として，求めたい確率 $\Pr[A^{\mathrm{join}}(T)=K \mid A^{\mathrm{join}}(t)=k, L(t)=\ell, S(t)=s]$ では，将来の時刻 T における累積参入数が K に固定されていることに注目する．そこで，時刻 T を起点とし，時刻 $T-u$ $(0\le u\le T)$ におけるシステム状態が与えられた条件下で，時刻 T までの累積参入数が K となる確率 $\Pr[A^{\mathrm{join}}(T)=K \mid A^{\mathrm{join}}(T-u)=k, L(T-u)=\ell, S(T-u)=s]$ を考え，これが u に関する線形一階微分方程式を満たすことを示す．この結果，複数の u に関して上記の確率を効率的に計算できる．

以下では，上記の方法で，累積参入数で条件付けた確率母関数 $\pi^*_{k,\ell,s}(z,t \mid K)$ を解析し，それを利用して階乗積率 $\pi^{(i)}_{k,\ell,s}(t \mid K)$ を導出する．

3 累積参入数で条件付けた確率母関数

本節では，式 (8) で定義される累積参入数で条件付けた確率母関数 $\pi^*_{k,\ell,s}(z,t \mid K)$ を解析する．まず，条件なしの確率母関数 $p^*_{k,\ell,s}(z,t)$ ならびに条件付き確率 $\Pr[A^{\mathrm{join}}(T) = K \mid A^{\mathrm{join}}(T-u) = k, L(T-u) = \ell, S(T-u) = s]$ が満たす方程式を導出し，それらを利用して累積参入数で条件付けた確率母関数 $\pi^*_{k,\ell,s}(z,t \mid K)$ の解析法を示す．

条件なしの確率母関数 $p^*_{k,\ell,s}(z,t)$ を辞書式順序で並べた行ベクトルを $\boldsymbol{p}^*(z,t)$ と定義すると，次の補題が成り立つ．

補題 1. 累積放棄数に関する確率母関数 $\boldsymbol{p}^*(z,t)$ ($|z| \le 1$) は，次の微分方程式を満たす．

$$\boldsymbol{p}^*(z,0) = \boldsymbol{p}(0) \tag{10}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}^*(z,t)}{\partial t} = \boldsymbol{p}^*(z,t)[\boldsymbol{Q}(t) - \lambda(t)(1-z)\boldsymbol{B}] \tag{11}$$

ただし，$\boldsymbol{p}(0)$ は式 (1) で与えられる．また，$\boldsymbol{B}$ は参入放棄による遷移を表す $|\Omega|$ 次正方行列であり，その各要素は次式で与えられる．

$$[\boldsymbol{B}]_{(k,\ell,s),(k',\ell',s')} = \begin{cases} 1-\beta_\ell, & (k',\ell',s') = (k,\ell,s) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

証明. $A^{\mathrm{balk}}(0) = 0$ より，式 (10) は明らかである．また，定義より $\varDelta t \to 0+$ において

$$\boldsymbol{p}^*(z,t+\varDelta t) = \boldsymbol{p}^*(z,t)[\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{Q}(t) - \lambda(t)\boldsymbol{B})\varDelta t] + \boldsymbol{p}^*(z,t) \cdot z\lambda(t)\boldsymbol{B}\varDelta t + o(\varDelta t)$$

が成り立つため，式 (11) が得られる． □

次に, 条件なしの確率母関数 $p^*_{k,\ell,s}(z,t)$ を用いて, 式 (8) で定義される, 累積参入数で条件付けた確率母関数 $\pi^*_{k,\ell,s}(z,t \mid K)$ を特徴づけることを考える．式 (5) より，累積参入数による条件付けには，条件付き確率 $\Pr[A^{\mathrm{join}}(T) = K \mid A^{\mathrm{join}}(t) = k, L(t) = \ell, S(t) = s]$ を計算する必要がある．これを効率的に計算するため，$q_{k,\ell,s}(u,K)$ を次式で定義する．

$$q_{k,\ell,s}(u,K) \coloneqq \Pr[A^{\mathrm{join}}(T) = K \mid A^{\mathrm{join}}(T-u) = k, L(T-u) = \ell, S(T-u) = s], \quad (k,\ell,s) = \Omega,\ 0 \le u \le T$$

定義より，$q_{k,\ell,s}(u,K)$ は，時刻 $T-u$ におけるシステム状態 (k,ℓ,s) が与えられたという条件の下で，時刻 T までの累積参入数が K である条件付き確率を表す．$q_{k,\ell,s}(u,K)$ を辞書式順序で並べた列ベクトルを $\boldsymbol{q}(u,K)$ とすると，次の補題が成り立つ．

補題 2. $\boldsymbol{q}(u,K)$ は次の微分方程式を満たす.

$$q_{k,\ell,s}(0,K)=\begin{cases}1, & k=K,\ \ell=0,1,\dots,K,\ s\in\mathcal{S}\\ 0, & \text{その他}\end{cases} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}(u,K)}{\partial u}=\boldsymbol{Q}(T-u)\boldsymbol{q}(u,K) \tag{13}$$

証明. 定義より，境界条件 (12) は明らかであるため，以下では式 (13) を示す．システム状態 $\{(A^{\text{join}}(t),L(t),S(t))\}_{t\ge 0}$ のマルコフ性から，$\Delta t>0$ に対して次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&q_{k,\ell,s}(u+\Delta t)\\
&\quad=\Pr[A^{\text{join}}(T)=K\\
&\qquad\qquad\mid A^{\text{join}}(T-u-\Delta t)=k,L(T-u-\Delta t)=\ell,S(T-u-\Delta t)=s]\\
&\quad=\sum_{(k',\ell',s')\in\Omega}\Big(\Pr[A^{\text{join}}(T-u)=k',L(T-u)=\ell',S(T-u)=s'\\
&\qquad\qquad\mid A^{\text{join}}(T-u-\Delta t)=k,L(T-u-\Delta t)=\ell,S(T-u-\Delta t)=s]\\
&\qquad\qquad\cdot\Pr[A^{\text{join}}(T)=K\mid A^{\text{join}}(T-u)=k',L(T-u)=\ell',S(T-u)=s']\Big)
\end{aligned}$$

したがって，$\Delta t\to 0+$ において次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
q_{k,\ell,s}(u+\Delta t)&=(1+[\boldsymbol{Q}(T-u-\Delta t)]_{(k,\ell,s),(k,\ell,s)}\Delta t)q_{k,\ell,s}(u,K)\\
&\quad+\sum_{(k',\ell',s')\in\Omega\setminus(k,\ell,s)}[\boldsymbol{Q}(T-u-\Delta t)]_{(k,\ell,s),(k',\ell',s')}\Delta t q_{k',\ell',s'}(u,K)+o(\Delta t)
\end{aligned}$$

ただし，$[\boldsymbol{Q}(t)]_{(k,\ell,s),(k',\ell',s')}$ は遷移速度行列 $\boldsymbol{Q}(t)$ の $((k,\ell,s),(k',\ell',s'))$ 要素である．上式を行列形式で書き換えると次式が得られる.

$$\boldsymbol{q}(u+\Delta t,K)=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}(T-u-\Delta t)\Delta t)\boldsymbol{q}(u,K)+\boldsymbol{o}(\Delta t)$$

両辺から $\boldsymbol{q}(u,K)$ を引いて Δt で割り，$\Delta t\to 0+$ とすると式 (13) が得られる. □

以上より，累積参入数で条件付けた確率母関数 $\pi^*_{k,\ell,s}(z,t\mid K)$ は，条件なしの確率母関数 $p^*_{k,\ell,s}(z,t)$ ならびに条件付き確率 $q_{k,\ell,s}(u,K)$ を用いて次のように求められる.

定理 3. 時刻 T までの累積参入数が K 人であるという事象で条件付けた累積放棄数に関する確率母関数 $\pi^*_{k,\ell,s}(z,t\mid K)$ は，補題 1 から得られる $p^*_{k,\ell,s}(z,t)$ ならびに補題 2 から得られる $q_{k,\ell,s}(u,K)$ を用いて次式で与えられる.

$$\pi^*_{k,\ell,s}(z,t\mid K)=\frac{p^*_{k,\ell,s}(z,t)q_{k,\ell,s}(T-t,K)}{\Pr[A^{\text{join}}(T)=K]},\quad (k,\ell,s)\in\Omega,\ 0\le t\le T$$

証明. 定理 3 は式 (5) より明らかである． □

時刻 T までの累積参入数で条件付けた累積放棄数の確率母関数 $\pi^*_{k,\ell,s}(z,t \mid K)$ は定理 3 を用いて求められる．以下では，上記で求められる確率母関数を用いて，累積放棄数の階乗積率を求める方法を示す．

式 (7) で定義される $p^{(i)}_{k,\ell,s}(t)$ $(i=1,2,\ldots)$ を辞書式順序で並べた列ベクトルを $\boldsymbol{p}^{(i)}(t)$ と定義する．このとき，補題 1 ならびに定理 3 から次の結果が得られる．

補題 4. $\boldsymbol{p}^{(i)}(t)$ $(i=1,2,\ldots)$ は次の微分方程式を満たす．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}^{(i)}(0) &= \boldsymbol{0}\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}^{(i)}(t)}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{p}^{(i)}(t)\boldsymbol{Q}(t) + i\boldsymbol{p}^{(i-1)}(t)\lambda(t)\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

証明. 式 (10) と式 (11) の z に関する i 階微分を求め，$z=1$ を代入すると得られる． □

式 (9) で定義される，累積参入数で条件付けた累積放棄数の階乗積率 $\pi^{(i)}_{k,\ell,s}(t \mid K)$ $(i=1,2,\ldots)$ について，次の結果が得られる．

定理 5. 時刻 T までの累積参入数が K 人であるという事象で条件付けた累積放棄数の i 次階乗積率 $\pi^{(i)}_{k,\ell,s}(t \mid K)$ は，補題 4 から得られる $p^{(i)}_{k,\ell,s}(t)$ ならびに補題 2 から得られる $q_{k,\ell,s}(u,K)$ を用いて次式で与えられる．

$$\pi^{(i)}_{k,\ell,s}(t \mid K) = \frac{p^{(i)}_{k,\ell,s}(t)q_{k,\ell,s}(T-t,K)}{\Pr[A^{\mathrm{join}}(T)=K]}, \quad 0 \le t \le T,\ i=1,2,\ldots$$

証明. 定理 5 は式 (7)，式 (9) で与えられる $p^{(i)}_{k,\ell,s}(t)$ ならびに $\pi^{(i)}_{k,\ell,s}(t \mid K)$ の定義より明らかである． □

4 数値例

本節では，M/M/1 待ち行列に対する数値例を示す．到着率は $\lambda(t)=\lambda$ で一定であるとし，サービス時間は平均が 1 である指数分布に従って独立かつ同一に分布すると仮定する．また，参入確率 β_ℓ は式 (14) で与えられるものを考え，その概形を図 1 に示す．

$$\beta_0 = 1, \qquad \beta_\ell = 1 - \sum_{j=0}^{\ell-1} e^{-30}\cdot\frac{30^j}{j!}, \quad \ell=1,2,\ldots \tag{14}$$

以下，時刻 $T=100$ までの累積参入数 $K=100$ で条件付けたシステム状態を考察する．

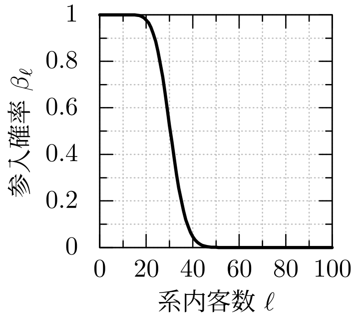

図 1　式 (14) で与えられる参入確率

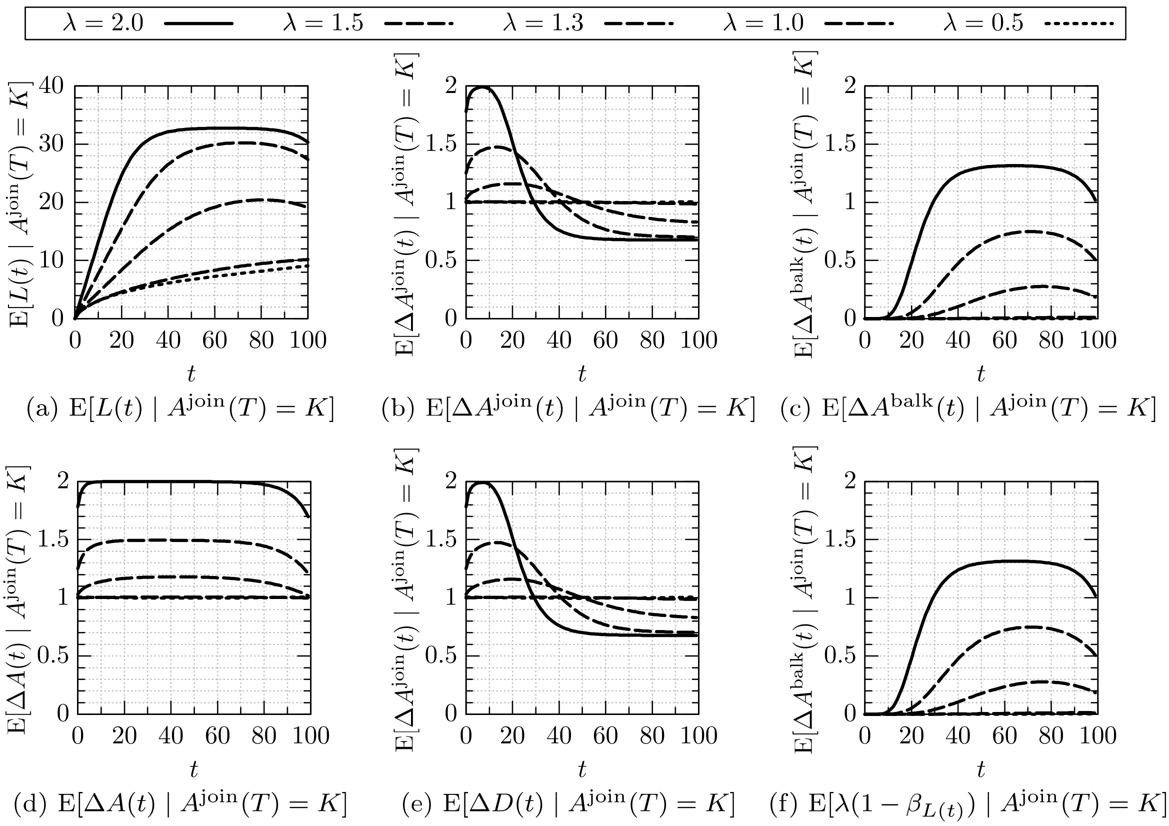

図 2　到着率 λ に対する累積参入数で条件付けた主な性能評価指標の時間変化

図 2 は, 到着率 $\lambda = 0.5, 1.0, 1.3, 1.5, 2.0$ に対して, 累積参入数で条件付けた平均系内客数 $\mathrm{E}[L(t) \mid A^{\mathrm{join}}(T) = K]$, 累積参入数の時間差分の平均 $\mathrm{E}[\Delta A^{\mathrm{join}}(t) \mid A^{\mathrm{join}}(T) = K]$, 累積放棄数の時間差分の平均 $\mathrm{E}[\Delta A^{\mathrm{balk}}(t) \mid A^{\mathrm{join}}(T) = K]$, 累積到着数の時間差分の平均 $\mathrm{E}[\Delta A(t) \mid A^{\mathrm{join}}(T) = K]$, 累積離脱数の時間差分の平均 $\mathrm{E}[\Delta D(t) \mid A^{\mathrm{join}}(T) = K]$, 系内客数から計算される放棄率 $\mathrm{E}[\lambda(1 - \beta_{L(t)}) \mid A^{\mathrm{join}}(T) = K]$ の時間変化を示したものであ

る．ただし，任意の確率過程 $X(t)$ に対して，その時間差分を $\Delta X(t) \coloneqq X(t+1) - X(t)$ と定義する．図 2 (a) より，$\lambda = 1.3, 1.5, 2.0$ の場合，到着率 λ が一定であるにもかかわらず，一度増加した系内客数がある時刻から減少する山なりの形状を取ることが確認できる．また，図 2 (b), (e) より，到着率 λ が大きいほど，客の参入は区間前半に偏り，離脱数は少なくなることが確認できる．本モデルでは，総参入客数が $K = 100$ に固定されているため，$\lambda \gg K/T = 1$ の場合，多くの参入放棄が起こる必要がある．到着率が大きい場合，区間前半に多くの参入があり，離脱数が少なくなることで，系内客数が大きく保たれ，参入放棄が起こりやすくなると考えられる．さらに，図 2 (d), (f) より，参入放棄は到着率と系内客数に応じて起こっており，図 2 (c) より，参入数の偏りは到着数の偏りによって生じることが分かる．以上より，系内客数の直感に反する挙動は，累積参入数で条件付けることによる到着過程の偏りに起因すると考えられる．

5 おわりに

本稿では，客の到着が非斉時ポワソン過程に従い，系内客数に依存した参入放棄があるマルコフ型待ち行列を考察し，有限時間区間 $[0, T]$ に K 人の客が参入するという事象で条件付けたシステムの状態を解析した．特に，累積参入数で条件付けた累積放棄数を数値計算する際に生じる二つの課題を解決した．まず，累積放棄数を含むマルコフ連鎖を直接解析すると，無限個の状態を扱う必要があり，数値計算が困難である．そこで，累積放棄数に関する確率母関数を用いた解析を行い，確率母関数が満たす微分方程式を導出した．次に，条件付けに用いる遷移確率 $\Pr[A^{\mathrm{join}}(T) = K \mid A^{\mathrm{join}}(t) = k, L(t) = \ell, S(t) = s]$ を計算するため，逆向きの時間軸 u を導入し，条件付き確率 $\Pr[A^{\mathrm{join}}(T) = K \mid A^{\mathrm{join}}(T-u) = k, L(T-u) = \ell, S(T-u) = s]$ が満たす u に関する線形一階微分方程式を導いた．また，これらを用いて，累積参入数で条件付けた累積放棄数の確率母関数の表現式を示し，それに基づいて累積放棄数に関する階乗積率を導出した．最後に，M/M/1 待ち行列に対する数値例を示し，累積参入数で条件付けることによって，時間経過とともに定常状態へ向かう通常の待ち行列とは異なる挙動を示すことを明らかにした．

謝辞

本研究は，京都大学に設置された国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の支援を受けて実施された．