

ポアソン・ボロノイ分割におけるセル面積分布とセルラアップリンク通信の成功確率評価

千葉大学 大学院融合理工学府 高橋 航希 *1

KOUKI TAKAHASHI

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, CHIBA UNIVERSITY

千葉大学 大学院融合理工学府 宮森 祐輔 *2

YUSUKE MIYAMOR

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, CHIBA UNIVERSITY

千葉大学 大学院情報・データサイエンス学府 陳 冠舟 *3

GUANZHOU CHEN

GRADUATE SCHOOL OF INFORMATICS, CHIBA UNIVERSITY

千葉大学 大学院情報学研究院 塩田 茂雄 *4

SHIGEO SHIODA

GRADUATE SCHOOL OF INFORMATICS, CHIBA UNIVERSITY

Abstract

In cellular networks modeled by stochastic geometry, a typical user is more likely to fall into a larger Voronoi cell than a uniformly selected cell. This “zero-cell bias” becomes crucial when user performance depends on the cell area. In this paper, we study the area distribution of the zero cell (the Voronoi cell containing the origin) generated by a stationary point process on the plane, with an emphasis on the Poisson–Voronoi tessellation.

We first review an integral representation of the mean zero-cell area by conditioning on the nearest-neighbor distance from the origin. Next, focusing on the widely used one-parameter Ferenc-Néda gamma fit for the typical-cell area, we derive the zero-cell area probability density function (PDF) via the Palm (size-biased) transform, thereby preserving Palm consistency between the typical- and zero-cell area PDFs. We then improve the one-parameter model by (i) moment matching to reproduce the reported mean zero-cell area, and (ii) maximum-likelihood estimation that jointly fits simulated samples of typical- and zero-cell areas under the Palm-consistent framework.

Finally, we apply these fitted distributions to evaluate a simple uplink contention model: base stations form a homogeneous Poisson point process of intensity λ , inducing a Voronoi tessellation; users form an independent Poisson point process of intensity λ_d ; and at most one user per cell can be scheduled successfully. The success probability is shown to be an integral of the Laplace transform of the zero-cell area, yielding a closed-form expression under the Ferenc-Néda family. Numerical results show that the best-fitting parameter depends on the user density, and that the relative accuracy of the Palm-consistent refinements and the original Ferenc-Néda parameter varies across density regimes, while preserving analytical tractability. We also compare with a three-parameter generalized-gamma fit, which provides consistently high accuracy at the cost of numerical integration.

*1 〒 263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町 1-33 E-mail: 24wm1311@student.gs.chiba-u.jp

*2 〒 263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町 1-33 E-mail: 25wm0238@student.gs.chiba-u.jp

*3 〒 263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町 1-33 E-mail: guanzhouchen.jp@gmail.com

*4 〒 263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町 1-33 E-mail: shioda@faculty.chiba-u.jp

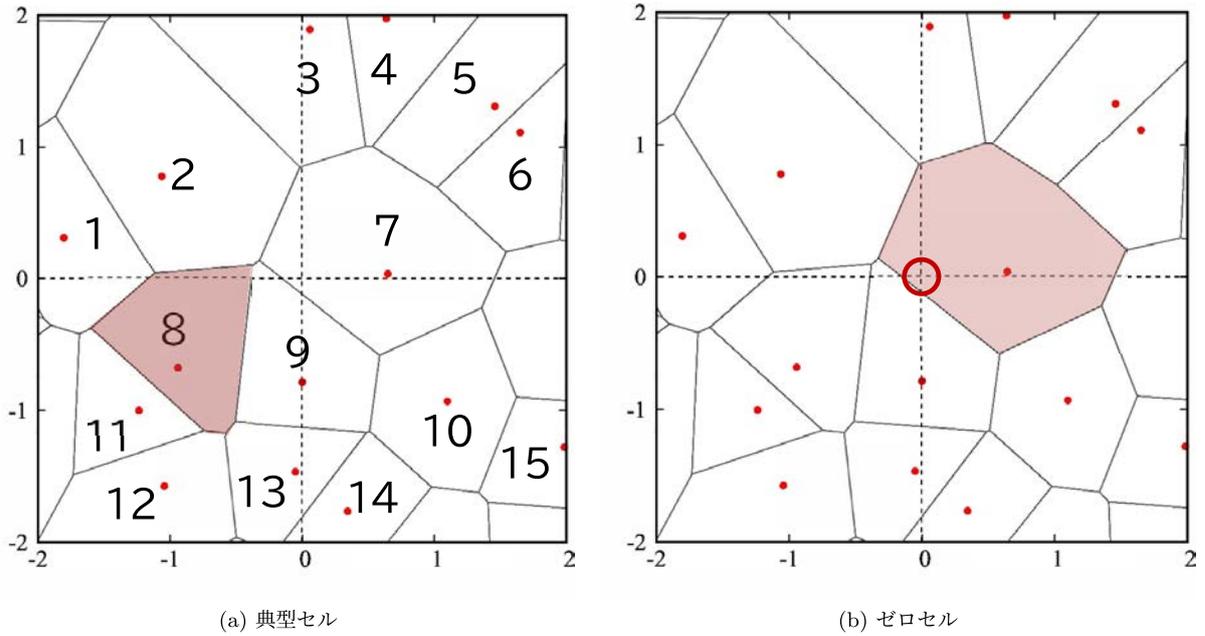


図 1: 典型セルとゼロセル

1 はじめに

2次元平面上の密度 λ の定常点過程 $\Psi = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ により生成されるポロノイセルを考える. 定常点過程の点 $x_i \in \Psi$ を中心とするポロノイセル, 具体的に以下で定義される開領域を C_{x_i} で表す.

$$C_{x_i} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : |y - x_i| < \inf_{x_j \in \Psi, x_j \neq x_i} |y - x_j| \right\}.$$

各点 $x_i \in \Psi$ には互いに異なる 1 以上の整数が付与されているとし, それら整数の中から無作為に 1 つを選んで, 対応するセルを 1 つ抽出する. このとき, 無作為に抽出されたセルのことを, 一般に「典型セル」と呼ぶ [CS05, BB⁺09, CSKM13]. 例えば, 図 1(a) は, 整数 8 がたまたま選ばれ, 点 8 を中心とするポロノイセルが抽出された様子を表している. 本稿では, 典型セルの面積を C により, その期待値を $E[C]$ により表すこととする.

一方, 2次元平面上の点 x を含むポロノイセルを $C(x)$ と表す. このとき, 原点を含むセル $C(0)$ は「ゼロセル」と呼ばれる [CS05, BB⁺09, CSKM13]. 図 1(b) は, ゼロセルの例を表している. 本稿では, ゼロセルの面積を C_0 により, その期待値を $E[C_0]$ により表すこととする.

一般に, 典型セルの面積の期待値とゼロセルの面積の期待値は一致せず, 両者の間には以下の不等式が成立することが知られている [BB⁺09].

$$1/\lambda = E[C] \leq E[C_0]. \quad (1)$$

ここで λ は定常点過程 Ψ の密度を表す. この不等式は, ゼロセルの方が典型セルより平均的に広いことを意味している. この現象は「ゼロセルバイアス」と呼ばれる [Mec99, CSKM13].

定常点過程 Ψ を基地局の集合とし, 点 x をセルラー通信ユーザの位置とする. ユーザが最も近い基地局と通信を行うとき, 点 x にいるユーザにとって, 点 x を含むセル $C(x)$ に位置する他のユーザは, 同じ基地局を共有する競合相手となる. すなわち, 点 x にいるユーザの通信品質は $C(x)$ の広さに依存する ($C(x)$)

が広いほど、競合相手が増えるので、通信品質が劣化する危険が高まる)。ゼロセルバイアスを考えると、ユーザは無作為に選んだセルに比べて、平均的に広いセルに位置している可能性が高い。したがって、セルラ通信の品質を考える上で、ゼロセルバイアスを正しく考慮することが重要である。そのためには、ゼロセルの面積の期待値や分布を知る必要がある。

典型セルの面積の期待値は $1/\lambda$ に等しい。一方、ポアソン点過程の場合であっても、ゼロセルの面積の期待値についてはその積分表示のみが知られており、閉形式は求まっていない (例えば Gilbert (1962) [Gil62], Tanemura (2003) [Tan03], Feng (2021) [Fen21])。また、典型セルやゼロセルの面積分布は、ポアソン点過程の場合であっても、数学的に厳密な結果は知られていない (例えば, Tanemura (2003) [Tan03], Ferenc-Néda (2007) [FN07])。しかし、ポアソン点過程の場合の典型セルの面積分布については、ガンマ関数や一般化ガンマ関数を用いた高精度なフィッティング式が幾つか知られている [FN07, Kia66, WKW86, Tan03]。また、ゼロセルの面積分布は、Palm 変換を用いて典型セルの面積分布から求めることができる [SW08, BB⁺09]。ただし、既存のフィッティング式はいずれも典型セルの面積分布に対するものであり、既存の典型セルの面積分布のフィッティング式から、Palm 変換により求めたゼロセルの面積分布が、実際のゼロセルの面積分布を良くフィッティングするという保証はない。

そこで、本稿では、既存の典型セルの面積分布のフィッティング式の中で、比較的簡易で利用頻度の高い Ferenc-Néda 簡易式 [FN07] に着目し、Ferenc-Néda 簡易式をベースとするゼロセルの面積分布の導出と、その通信品質評価への適用について検討する。具体的には、(i) Ferenc-Néda 簡易式を Palm 変換して求めたゼロセルの面積分布の妥当性を検証し、次いで (ii) 典型セルとゼロセルの面積分布の Palm 整合性を維持しつつ、両者のフィッティング精度を高めるためのパラメータ調整法を検討し、最後に (iii) その有効性をセルラ通信品質評価の観点から確認する。

注意 1

定常点過程の点が確率 1 で座標原点に存在するように条件づけられた Palm 測度を用いると、典型セルの面積の期待値 ($E[C] = 1/\lambda$) に対応するのは $E^0[|C(0)|] (= E^0[|C_0|])$ であり、一方、ゼロセルの面積の期待値は $E[|C(0)|]$ と表すことができる。したがって、ゼロセルバイアスは Palm 測度と通常の測度との違いと解釈することができる [BB⁺09]。

2 ゼロセルの面積の期待値の積分表示

1章で述べたように、ゼロセルの面積の期待値については、複数の積分表示が知られている [Gil62, Bra87, QW84, HQ02, Cal03]。本章では、ゼロセルの面積の期待値の積分表示について説明する。本章で説明する積分表示は、Gilbert (1962) [Gil62] と基本的に同じものである。

2.1 座標原点に最も近い点と座標原点との距離による条件付け

ゼロセルは座標原点を含むセルである。第 1 ステップとして、座標原点に最も近い定常点過程 Ψ の点と座標原点との距離が x に等しいという条件付けを行う。座標原点に最も近い Ψ の点を点 B と呼ぶ。本章では、便宜上、B が座標原点に移り、もともと座標原点にあった点 (点 A) が x 軸上の座標原点から右側に移動した座標系 (図 2) を考える。このような座標系は、元の座標系を並進・回転することで常に得られる。

この座標系において、座標 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ に存在する点 (点 C) がゼロセルに含まれる確率 $p(r, \theta : x)$ を評価する。確率 $p(r, \theta : x)$ は、C にとって B が Ψ における最近接点である確率に外ならない。B が最近接点であることは、C を中心とする半径 r の円の領域内に Ψ の点が (B 以外に) 存在しないことと同値である。一方、(A はゼロセルに含まれるため) A からみても B は Ψ における最近接点であることから、A を中

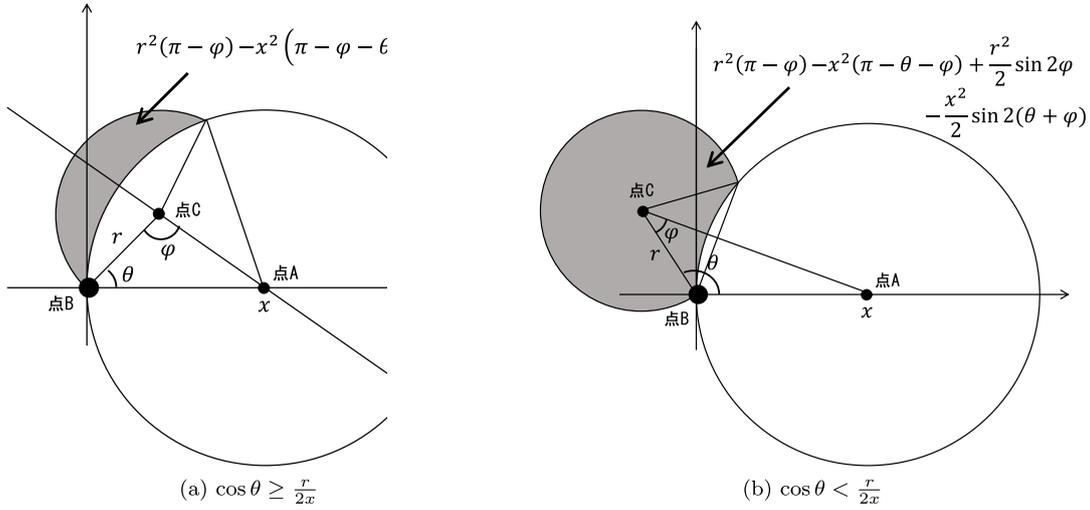


図 2: $A(r, \theta : x)$ の意味 (灰色のエリアの面積)

心とする半径 x の円内には Ψ の点は存在しないことが保証される。したがって、図 2 における灰色のエリアに Ψ の点が存在しなければ、 C にとって B が Ψ における最近接点になる。 Ψ が密度 λ のポアソン点過程であることから、この確率は

$$p(r, \theta : x) = e^{-\lambda A(r, \theta : x)}$$

で与えられる。ここで $A(r, \theta : x)$ は、図 2 において灰色のエリアの面積であり、 $\cos \theta \geq r/(2x)$ のとき

$$A(r, \theta : x) = r^2(\pi - \psi) - x^2\left(\pi - \psi - \theta - \frac{r}{x} \sin \theta\right).$$

また、 $\cos \theta < r/(2x)$ のとき

$$A(r, \theta : x) = r^2(\pi - \psi) - x^2(\pi - \psi - \theta) + \frac{r^2}{2} \sin 2\psi - \frac{x^2}{2} \sin 2(\theta + \psi).$$

なお

$$\psi = \cos^{-1} \frac{r - x \cos \theta}{\sqrt{x^2 - 2xr \cos \theta + r^2}}.$$

2.2 ゼロセルの面積の期待値の積分表示

点 A と、 A にとって Ψ における最近接点である B との距離 R は確率変数である。 $R = x$ の条件のもとでのポロノイセルの面積の条件付期待値 $E[C_0 | R = x]$ は、 $p(r, \theta : x)$ を二次元平面内で積分した結果に等しい。つまり、

$$E[C_0 | R = x] = \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\theta p(r, \theta : x) = \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\lambda A(r, \theta : x)}.$$

距離 R の分布関数は

$$P(R \leq x) = 1 - e^{-\lambda \pi x^2}$$

で与えられることから、

$$E[C_0] = 2\pi\lambda \int_0^\infty dx x e^{-\lambda \pi x^2} \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\lambda A(r, \theta : x)}.$$

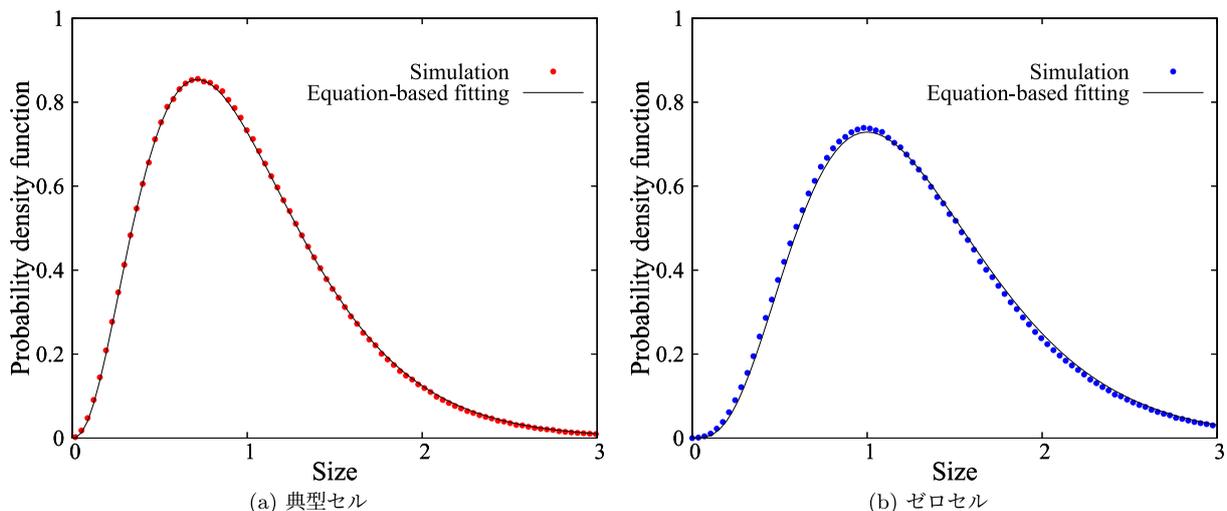


図 3: Ferenc-Néda 簡易式とシミュレーションの比較

3 Ferenc-Néda 簡易式によるポアソンボロノイセルの面積分布

3.1 Ferenc-Néda 簡易式

ポアソン・ボロノイ分割における典型セルの厳密な分布式は知られていないが、ガンマ関数を用いたフィッティング式が複数存在する [FN07, Kia66, WKW86, Tan03]. 本研究では、その簡便さからしばしば用いられる Ferenc-Néda フィッティング式に着目する [FN07]. Ferenc-Néda 簡易式は、 d 次元ポアソン・ボロノイ分割 ($d = 1, 2, 3$) における、典型セルの面積の確率密度関数 $f(x)$ を 1 パラメータのガンマ分布でフィッティングした式であり、以下で与えられる.

$$f(x) = \frac{(\lambda\alpha)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda\alpha x}, \quad \alpha = \frac{3d+1}{2}. \quad (2)$$

式 (2) より

$$E[C] = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty \frac{(\lambda\alpha)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\lambda\alpha x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

すなわち、Ferenc-Néda 簡易式は典型セルの面積の期待値を (パラメタ α の値にかかわらず) 正確に与える. 図 3(a) は、 $\lambda = 1$ の条件で Ferenc-Néda 簡易式による 2 次元ポアソン・ボロノイ分割における典型セルの確率密度関数とシミュレーションで求めた典型セルの確率密度関数を比較したものである、簡易な式であるにも関わらず、高い精度でフィッティングできている様子が確認できる.

3.2 Ferenc-Néda 簡易式によるゼロセルの面積分布

ゼロセルの面積の確率密度関数 $f_0(x)$ は、典型セルの面積分布の確率密度関数 $f(x)$ と次の関係にある [SW08, BB⁺09].

$$f_0(x) = \frac{1}{E[C]} x f(x) = \lambda x f(x).$$

$f(x)$ として Ferenc-Néda 簡易式を用いると、ポアソン・ボロノイ分割におけるゼロセルの面積の確率密度関数として、次の結果が得られる。

$$f_0(x) = \frac{\lambda^{\alpha+1} \alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\lambda x}. \quad (3)$$

たとえば 2 次元の場合は、 $\alpha = 3.5$ としてゼロセルの面積の確率密度関数が次のように求まる [YK13].

$$f_0(x) = \frac{343}{15} \sqrt{\frac{7}{2\pi}} \lambda^{9/2} x^{7/2} e^{-7\lambda x/2}.$$

式 (3) から得られるゼロセルの面積の期待値は

$$E[C_0] = \frac{\alpha + 1}{\lambda \alpha}.$$

特に、2 次元の場合は $E[C_0] = 9/(7\lambda) \approx 1.285714/\lambda$ であるが、文献で報告されている 2 次元ポアソン・ボロノイ分割におけるゼロセルの面積の期待値は $1.280176/\lambda$ であり [Hae21], これより若干小さい。図 3(b) は、 $\lambda = 1$ の条件で Ferenc-Néda 簡易式による 2 次元ポアソン・ボロノイ分割におけるゼロセルの確率密度関数とシミュレーションで求めた確率密度関数を比較したものである。ほんのわずかではあるが、フィッティング式はシミュレーションで求めた確率密度関数より右にずれている。

4 Palm 整合性を維持するセル面積分布のフィッティング式の改良

4.1 モーメントマッチング

Ferenc-Néda 簡易式は高精度なフィッティング式ではあるが、3.2 節で述べたように、ゼロセルの面積を若干過大評価する傾向がある。これを改良する一つの方法は、文献で報告されている 2 次元ポアソン・ボロノイ分割におけるゼロセルの面積の期待値 $1.280176/\lambda$ を再現するようにパラメタ α を調整することである。すなわち

$$E[C_0] = \frac{\alpha + 1}{\lambda \alpha} = \frac{1.280176}{\lambda}$$

を満たすように α を定める。これにより、 $\alpha = 3.569185$ という値が求まる。典型セルの面積の期待値は α に依存しないので、この改良 (α の修正) により、典型セルの面積とゼロセルの面積の確率密度関数の Palm 整合性を保ったまま、典型セルとゼロセルの両方について面積の期待値を正しく与えることができる。ゼロセルの面積の期待値と典型セルの面積の期待値と 2 次モーメントとの間には、次の関係が成り立つ。

$$E[C_0] = \frac{E[C^2]}{E[C]}.$$

したがって、この改良により、典型セルの面積の 2 次モーメントも正しく与えられるようになる。

4.2 最尤推定

シミュレーション等により典型セルの面積の実現値 $C^{(1)}, \dots, C^{(n_T)}$ とゼロセルの面積の実現値 $C_0^{(1)}, \dots, C_0^{(n_0)}$ が得られているとする。これらがそれぞれ、確率密度関数 $f(x)$ (式 (2)) および $f_0(x)$ (式 (3)) に従う独立同分布な標本であると仮定することで、最尤推定により α を決定することができる。以下、説明する。

まず、 α に対する同時尤度関数は

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n_T} f(C^{(i)}; \alpha) \prod_{j=1}^{n_0} f_0(C_0^{(j)}; \alpha)$$

で与えられる点に注意する。対数尤度関数 $\ell(\alpha) = \log L(\alpha)$ は、式 (2) と式 (3) を用いて次のように表せる。

$$\begin{aligned} \ell(\alpha) = & \sum_{i=1}^{n_T} \left\{ \alpha \log(\lambda \alpha) - \log \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \log C^{(i)} - \lambda \alpha C^{(i)} \right\} \\ & + \sum_{j=1}^{n_0} \left\{ (\alpha + 1) \log \lambda + \alpha \log \alpha - \log \Gamma(\alpha) + \alpha \log C_0^{(j)} - \lambda \alpha C_0^{(j)} \right\}. \end{aligned}$$

ここで $\psi(\alpha) = \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ をディガンマ関数とすると、 $\ell(\alpha)$ の微分は

$$\begin{aligned} \ell'(\alpha) = & (n_T + n_0) \{ \log \lambda + \log \alpha + 1 - \psi(\alpha) \} \\ & + \sum_{i=1}^{n_T} \log C^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_0} \log C_0^{(j)} - \lambda \sum_{i=1}^{n_T} C^{(i)} - \lambda \sum_{j=1}^{n_0} C_0^{(j)} \end{aligned}$$

と計算される。したがって、 α の推定値 $\hat{\alpha}$ は

$$\ell'(\hat{\alpha}) = 0$$

を満たす解として与えられる。上式は閉形式では解けないが、数値的に $\hat{\alpha}$ を求めることが可能である。 $\hat{\alpha}$ を式 (2) と式 (3) にそれぞれ代入することで、Palm 整合性を保ちつつ、最尤推定の意味での典型セルとゼロセルの面積分布が得られる。本研究では、シミュレーションにより、典型セルとゼロセルの面積をそれぞれ 5 千万回求め、それにより最尤推定を行い、 $\hat{\alpha} = 3.554494$ という結果を得た。

5 通信成功確率

5.1 Ferenc-Néda 簡易式およびその改良式の適用

ポロノイ分割を生成する密度 λ の点過程を基地局配置とし、それとは独立な密度 λ_d のポアソン点過程によりユーザが配置されているとする。各基地局につき、同時に通信に成功できるユーザは 1 人のみとする。点 x にいる典型ユーザが属するセル（すなわちゼロセル）の面積を C_0 とし、同一セル内の他の競合ユーザ数を N とおく。このとき、 N は期待値 $\lambda_d C_0$ のポアソン分布に従うことから、典型ユーザが選ばれる（通信に成功する）確率は

$$p = E \left[\frac{1}{1 + N} \right] = E \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda_d C_0)^i}{(i + 1)!} e^{-\lambda_d C_0} \right] = E \left[\frac{1 - e^{-\lambda_d C_0}}{\lambda_d C_0} \right] = \frac{1}{\lambda_d} \int_0^{\lambda_d} E[e^{-s C_0}] ds.$$

すなわち、通信成功確率はゼロセル面積のラプラス変換 $E[e^{-s C_0}]$ を積分することにより求まる。ゼロセル面積の分布（確率密度関数）が与えられれば、 $E[e^{-s C_0}]$ は計算できる。例えば、ゼロセル面積の分布として式 (3) を用いると、

$$E[e^{-s C_0}] = \int_0^{\infty} e^{-s x} f_0(x) dx = \left(\frac{\lambda \alpha}{\lambda \alpha + s} \right)^{\alpha + 1}$$

であるから、

$$p = \frac{1}{\lambda_d} \int_0^{\lambda_d} \left(\frac{\lambda \alpha}{\lambda \alpha + s} \right)^{\alpha + 1} ds = \frac{\lambda}{\lambda_d} \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda \alpha}{\lambda \alpha + \lambda_d} \right)^{\alpha} \right\}. \quad (4)$$

したがって、通信成功確率 p は α の簡易な関数として与えられる。もともとの Ferenc-Néda 簡易式の α の値 ($\alpha = 7/2$) に加えて、モーメントマッチングにより得た α の値 ($\alpha = 3.569185$)、最尤推定により得た α の値 ($\alpha = 3.554494$) をそれぞれ代入することで、ゼロセル面積分布の近似式の良否を通信成功確率の評価の観点から比較することができる。

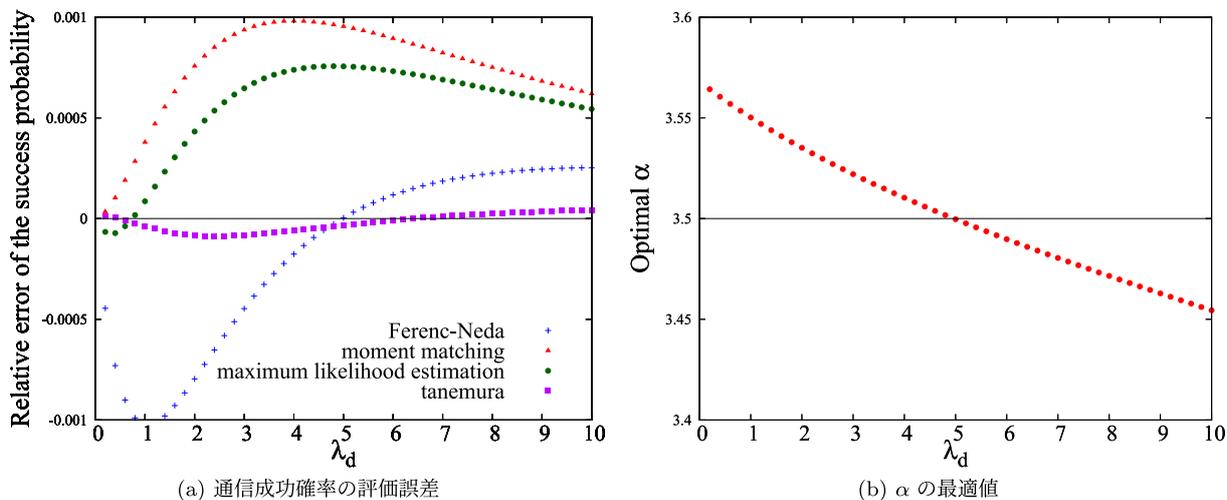


図 4: 通信成功確率の評価誤差と α の最適値

注意 2

文献 [PKB21] では, TDMA によりセル内ユーザにリソースを等配分するモデルを考察しており, ユーザが獲得するリソース量の評価式に $E[1/(N+1)]$ の項が現れる. 文献 [PKB21] では, 式 (4) に $\alpha = 7/2$ を代入することで $E[1/(N+1)]$ を評価している ([PKB21] 5章 Lemma 2).

5.2 一般化ガンマ分布によるフィッティング式の適用

3パラメータの一般化ガンマ分布によるフィッティング式 (Tanemura [Tan03])

$$f(x) = \frac{a(b\lambda^a)^{c/a}}{\Gamma(c/a)} x^{c-1} e^{-(b\lambda^a)x^a}, \quad f_0(x) = \frac{a(b\lambda^a)^{(c+1)/a}}{\Gamma((c+1)/a)} x^c e^{-(b\lambda^a)x^a}$$

による評価についても考察する. ここで, 推奨パラメタ値 (Tanemura [Tan03]) は

$$a = 1.07950, \quad b = 3.03226, \quad c = 3.31122$$

である. 3パラメータの一般化ガンマ分布を用いた場合, 通信成功確率の閉形式は得られず, 次の積分表示を数値的に評価する必要がある.

$$p = E\left[\frac{1 - e^{-\lambda_d C_0}}{\lambda_d C_0}\right] = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda_d x}}{\lambda_d x} f_0(x) dx.$$

5.3 評価結果

ゼロセル面積分布の各近似式を用いて通信成功確率を評価した結果と, シミュレーションにより求めた結果との差を図 4(a) に示す. 縦軸は相対誤差 (シミュレーションによる通信成功確率との差をシミュレーション値で割ったもの), 横軸はユーザ密度 λ_d である.

モーメントマッチングと最尤推定を比べると, λ_d が非常に小さい領域 ($\lambda_d \simeq 0.2$ 付近) を除き, 最尤推定の方が誤差が小さい. 一方, もととの Ferenc-Néda 簡易式は, $\lambda_d \leq 2$ の領域ではモーメントマッチングや最尤推定よりも誤差が大きいが, $\lambda_d \geq 3$ ではこれらより誤差が小さくなる. Ferenc-Néda 簡易式およ

びその改良式はいずれも、 α という 1 つのパラメタで分布をフィッティングする式であるが、この結果は、通信成功確率の評価において最適な α の値がユーザ密度に依存することを示唆している。

図 4(b) は、シミュレーションで得られた通信成功確率を式 (4) が再現するように α を求めた結果 (α の最適値) を、ユーザ密度に対してプロットしたものである。 α の最適値は λ_d に依存しており、 $\lambda_d \simeq 5$ 付近で Ferenc-Néda 簡易式で用いられる α の値 ($\alpha = 7/2$) が最適となる様子が確認できる。

図 4(a) には、一般化ガンマ分布によるフィッティング式で評価した結果も示している。一般化ガンマ分布によるフィッティング式は、全てのユーザ密度領域において最も誤差が小さいことが見て取れる。

ただし、いずれの式を用いても相対誤差は 0.1% 未満にとどまっており、実用的にはどの式を用いても十分な精度が得られると言える。

6 結論

本稿では、ポアソン・ボロノイ分割におけるゼロセル面積分布の近似として、典型セル面積の Ferenc-Néda 簡易式の Palm 変換に焦点を当て、ゼロセル面積の既知の平均値に基づくモーメントマッチングおよび典型セル・ゼロセルの両標本を用いた最尤推定による Ferenc-Néda 簡易式の改良を考察し、通信成功確率評価への適用を通じてその特性を確認した。

一方で、Ferenc-Néda 簡易式に基づく改良は、調整可能な自由度が 1 パラメタに限られるため、典型セルとゼロセルの分布形状を同時に高精度で再現するには限界がある。より高い精度が必要な場合には、一般化ガンマ分布によるフィッティング式を用いることが有効であることを数値結果により示した。

なお、応用先によっては、最近接点までの距離が与えられた条件のもとでのゼロセル面積分布が必要となる場合がある。条件付き分布の高精度な近似法の構築と、通信性能評価への応用については今後検討したい。

謝 辞

本研究は、JSPS 科研費 (22H01480) の助成、ならびに京都大学に設置された国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所 (RIMS) の支援を受けたものである。

参 考 文 献

- [BB⁺09] François Baccelli, Bartłomiej Błaszczyszyn, et al. Stochastic Geometry and Wireless Networks: Volume I – Theory. *Foundations and Trends in Networking*, 3(3–4):1–150, 2009.
- [Bra87] Kenneth A Brakke. Statistics of random plane Voronoi tessellations. *Department of Mathematical Sciences, Susquehanna University (Manuscript 1987a)*, 18, 1987.
- [Cal03] Pierre Calka. An explicit expression for the distribution of the number of sides of the typical Poisson-Voronoi cell. *Advances in Applied Probability*, 35(4):863–870, 2003.
- [CS05] Pierre Calka and Tomasz Schreiber. Limit theorems for the typical Poisson-Voronoi cell and the Crofton cell with a large inradius. *Ann. Probab.*, 33(1):1625–1642, 2005.
- [CSKM13] Sung Nok Chiu, Dietrich Stoyan, Wilfrid S Kendall, and Joseph Mecke. *Stochastic Geometry and its Applications*. John Wiley & Sons, 2013.

- [Fen21] Ke Feng. *Spatial Analysis of Cellular Networks: Meta Distributions, Cooperation, and Joint Geometric Modeling*. PhD thesis, University of Notre Dame, 2021.
- [FN07] Jarai-Szabo Ferenc and Zoltan Neda. On the size distribution of Poisson Voronoi cells. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 385(2):518–526, 2007.
- [Gil62] E.N. Gilbert. Random subdivisions of space into crystals. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(3):958–972, 1962.
- [Hae21] Martin Haenggi. On cell slicing, 2021. Stogblog by M. Haenggi.
- [HQ02] A Hayen and M.P. Quine. Areas of components of a Voronoi polygon in a homogeneous Poisson process in the plane. *Advances in Applied Probability*, 34(2):281–291, 2002.
- [Kia66] T Kiang. Random fragmentation in two and three dimensions. *Zeitschrift fur Astrophysik*, Vol. 64, p. 433, 64:433, 1966.
- [Mec99] Joseph Mecke. On the relationship between the 0-cell and the typical cell of a stationary random tessellation. *Pattern Recognition*, 32(9):1645–1648, 1999.
- [PKB21] Pierre Popineau, Sanket S Kalamkar, and Franois Baccelli. On velocity-based association policies for multi-tier 5G wireless networks. In *2021 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, pages 1–6, 2021.
- [QW84] Malcolm P Quine and David F Watson. Radial generation of n-dimensional Poisson processes. *Journal of Applied Probability*, 21(3):548–557, 1984.
- [SW08] Rolf Schneider and Wolfgang Weil. *Stochastic and Integral Geometry*. Springer, 2008.
- [Tan03] Masaharu Tanemura. Statistical distributions of Poisson Voronoi cells in two and three dimensions. *FORMA-TOKYO-*, 18(4):221–247, 2003.
- [WKW86] D Weaire, JP Kermode, and J Wejchert. On the distribution of cell areas in a Voronoi network. *Philosophical Magazine B*, 53(5):L101–L105, 1986.
- [YK13] Seung Min Yu and Seong-Lyun Kim. Downlink capacity and base station density in cellular networks. In *2013 11th international symposium and workshops on modeling and optimization in mobile, ad hoc and wireless networks (WiOpt)*, pages 119–124, 2013.