

待ち行列長の履歴に依存する 2 レベル M/M/1 モデルの定常分布の拡散近似

小林 正弘* 東海大学 宮沢 政清 東京理科大学
佐久間 大 防衛大学校

Masahiro Kobayashi Tokai University
Masakiyo Miyazawa Tokyo University of Science
Yutaka Sakuma National Defense Academy of Japan

1 はじめに

レベル依存をもつ待ち行列モデルは、これまで数多く研究されてきた。応用面では、サーバにセットアップ時間を伴う待ち行列モデルがレベル依存をもつモデルとして表現され、その性能評価が行われている ([1, 3, 8] などやその参考文献を参照のこと)。一方、理論面では、レベル依存をもつ GI/G/1 待ち行列に対して拡散近似の導出や定常分布の拡散近似が求められている ([2, 4, 7]などを参照のこと)。

これらはいずれもレベル依存モデルであるが、待ち行列長の履歴には依存しない。待ち行列長の履歴に依存するモデルとしては、[6, 9]などが知られており、特にサーバのオン/オフ切替に 2 つの閾値を設けることで履歴の依存性が生じる。これらのモデルはサーバの省電力化に有効であり、応用上重要である。

本研究では、レベル依存性に加えて待ち行列長の履歴にも依存する 2 レベル M/M/1 待ち行列を考察し、その定常分布の陽表現および定常分布の拡散近似を導出する。

なお本稿は [5] を要約したものである。

* 〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1 m.kobayashi@tokai.ac.jp

2 本研究のモデル

以下、本研究の待ち行列モデルを定義する． \mathbb{R} と \mathbb{Z} をそれぞれ実数及び整数の集合とし、

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}, & \mathbb{R}_{>0} &= \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}, & \mathbb{R}_- &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}, \\ \mathbb{R}_{<0} &= \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}, & \mathbb{Z}_+ &= \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 0\}, & \mathbb{N} &= \{x \in \mathbb{Z}; x > 0\},\end{aligned}$$

とする．本研究のモデルの基本は M/M/1 待ち行列モデルであり、客の到着はポアソン過程、客のサービス時間分布は互いに独立な指数分布であることを仮定する． $L(t)$ を時刻 $t \in \mathbb{R}_+$ における待ち行列長とし、 l_d と l_u を $l_d < l_u$ 満たす正の整数とする． $\{0, 1, \dots, l_u\}$ をレベル 1, $\{l_d, l_d + 1, \dots\}$ をレベル 2 とすると、これらのレベルは共通部分 $\{l_d, l_d + 1, \dots, l_u\}$ を持つ．レベルに共通部分を持つことから、本研究は待ち行列長の履歴に依存するようなモデルとなる．背後過程を $\{B(t) \in \{1, 2\}; t \in \mathbb{R}_+\}$ とし、以下のように $\{L(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ に依存するような推移を持つと仮定する．

- $B(t-) = 1, L(t-) = l_u, L(t) = l_u + 1$ であるときに、 $B(t) = 2$ となる．これは、直前の待ち行列長が l_u でかつ背後状態が 1 であるようなときに、客の到着が起こることにより背後状態が 2 に推移することを表す．
- $B(t-) = 2, L(t-) = l_d, L(t) = l_d - 1$ であるときに、 $B(t) = 1$ となる．これは、直前の待ち行列長が l_d でかつ背後状態が 2 であるようなときに、客のサービスが起こることにより背後状態が 1 に推移することを表す．

また、 $i \in \{1, 2\}$ に対して、 $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}_{>0}$ をある正の実数とし、時刻 t における到着率及びサービス率を $\lambda_{B(t)}, \mu_{B(t)}$ とする．これらの性質より、到着率及びサービス率が待ち行列長の履歴に依存するモデルとなる．以下で履歴に依存するということを例を使って説明する．時刻 t_1 でサービスが起こり、 l_u に到達したとする．このとき、 $L(t_1-) = l_u + 1, L(t_1) = l_u$ であり、 $L(t_1-) = l_u + 1$ であることから、背後過程は $B(t_1-) = B(t_1) = 2$ であることが分かり、時刻 t_1 における到着率及びサービス率は (λ_2, μ_2) で与えられる．一方、時刻 t_2 で到着が起こり、 l_u に到達したとする．このとき、 $L(t_2-) = l_u - 1, L(t_2) = l_u$ であり、 $L(t_2) = L(t_1) = l_u$ である．背後過程についてはどちらの値もあり得るが、仮に $B(t_2-) = 1$ であるならば、推移をせず $B(t_2) = 1$ を得る．すなわち、時刻 t_2 における到着率及びサービス率は (λ_1, μ_1) で与えられ、時刻 t_1 の到着率及びサービス率とは異なることが分かる．このように、待ち行列長に履歴によって、到

着率及びサービス率が異なる場合があることが見て取れる．本研究の待ち行列モデルを待ち行列長の履歴に依存する 2 レベルの M/M/1 待ち行列と呼ぶ．図 1 と図 2 は本研究の標本路と推移図を表す．

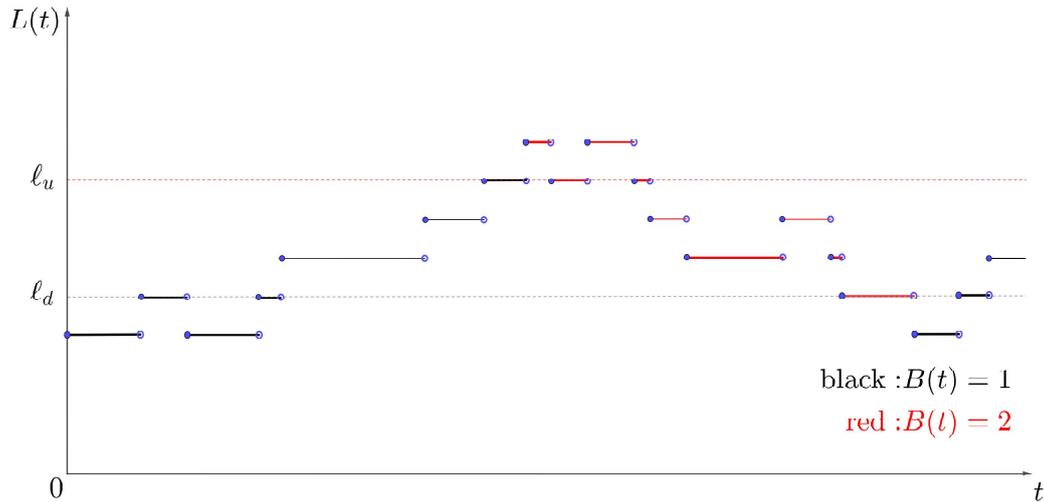


図 1 $L(t)$ の標本路

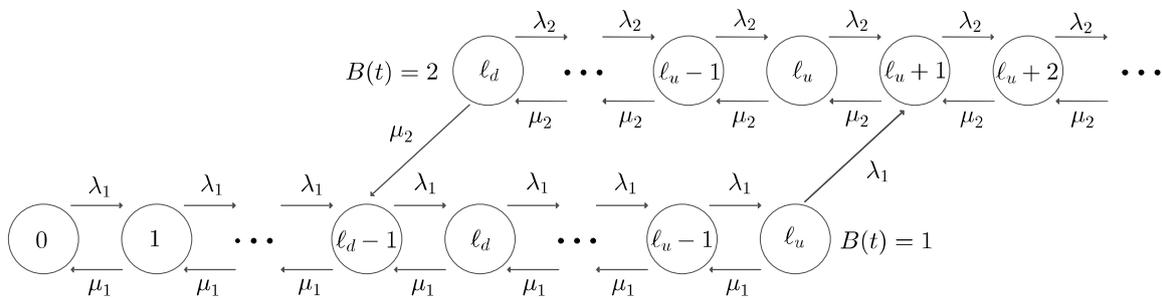


図 2 $(L(t), B(t))$ の推移図

本研究の解析のため， $\{(L(t), B(t)); t \in \mathbb{R}_+\}$ を連続時間マルコフ連鎖で表現する．状態空間は $S = S_1 \cup S_2$ で与えられる．ただし， $S_1 = \{0, 1, \dots, l_u\} \times \{1\}$, $S_2 = \{l_d, l_d + 1, \dots\} \times \{2\}$ とする． $Q = \{q_{(\ell, k), (\ell', k')}; (\ell, k), (\ell', k') \in S\}$ を正方行列とし，各

要素は以下で与えられるとする. $(\ell, k) \neq (\ell', k')$ に対して,

$$q_{(\ell,k),(\ell',k')} = \begin{cases} \lambda_i, & (\ell, k), (\ell', k') \in S_i, \ell' = \ell + 1, i = 1, 2, \\ \mu_i, & (\ell, k), (\ell', k') \in S_i, \ell' = \ell - 1, i = 1, 2, \\ \lambda_1, & (\ell, k) \in S_1, (\ell', k') \in S_2, \ell = \ell_u, \ell' = \ell_u + 1, \\ \mu_2, & (\ell, k) \in S_2, (\ell', k') \in S_1, \ell = \ell_d, \ell' = \ell_d - 1, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

であり, 対角要素は $q_{(\ell,k),(\ell,k)} = -\sum_{(\ell',k') \neq (\ell,k)} q_{(\ell,k),(\ell',k')}$ を満たすとする. このとき, 行列 Q は $\{(L(t), B(t))\}$ の推移率行列となっており, $\{(L(t), B(t))\}$ を連続時間マルコフ連鎖で表現することができた.

3 定常分布

本節では, 本研究の結果の 1 つである定常分布の陽表現について紹介する. まずは, 定常分布の存在条件である安定条件について述べる. $i = 1, 2$ に対して, $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ とし, $\rho_{12} = \frac{\lambda_1}{\mu_2}$ とする. 本研究では以下を仮定する.

$$\rho_2 < 1. \quad (3.1)$$

(3.1) が本研究の待ち行列モデルの安定条件である. ここで, $\rho_1 < 1$ を仮定する必要はないことに注意する. (3.1) の下で, $\{(L(t), B(t))\}$ の定常分布を $\pi = (\pi(\ell, k); (\ell, k) \in S)$ とする.

以下, 定常分布を求めていく. 集合 ∂S を以下のように定義する.

$$\partial S = \{(0, 1), (\ell_d - 1, 1), (\ell_d, 2), (\ell_u, 1), (\ell_u + 1, 2)\}.$$

このとき, 定常方程式は以下のように導出できる.

$$(\lambda_k + \mu_k)\pi(\ell, k) = \lambda_k\pi(\ell - 1, k) + \mu_k\pi(\ell + 1, k), \quad (\ell, k) \in S \setminus \partial S, k = 1, 2, \quad (3.2)$$

$$\lambda_1\pi(0, 1) = \mu_1\pi(1, 1), \quad (3.3)$$

$$(\lambda_1 + \mu_1)\pi(\ell_d - 1, 1) = \lambda_1\pi(\ell_d - 2, 1) + \mu_1\pi(\ell_d, 1) + \mu_2\pi(\ell_d, 2), \quad (3.4)$$

$$(\lambda_2 + \mu_2)\pi(\ell_d, 2) = \mu_2\pi(\ell_d + 1, 2), \quad (3.5)$$

$$(\lambda_1 + \mu_1)\pi(\ell_u, 1) = \lambda_1\pi(\ell_u - 1, 1), \quad (3.6)$$

$$(\lambda_2 + \mu_2)\pi(\ell_u + 1, 2) = \lambda_2\pi(\ell_u, 2) + \mu_2\pi(\ell_u + 2, 2) + \lambda_1\pi(\ell_u, 1). \quad (3.7)$$

状態空間 S を以下のように分割する.

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \{0, 1, \dots, \ell_d - 1\} \times \{1\}, & S_{2,1} &= \{\ell_d, \ell_d + 1, \dots, \ell_u\} \times \{1\}, \\ S_{1,2} &= \{\ell_d, \ell_d + 1, \dots, \ell_u\} \times \{2\}, & S_{2,2} &= \{\ell_u + 1, \ell_u + 2, \dots\} \times \{2\}. \end{aligned}$$

また, 条件 A に対して, $1(A)$ を

$$1(A) = \begin{cases} 1, & A \text{ が真}, \\ 0, & A \text{ が偽}, \end{cases}$$

と定義する. また, $\phi: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ を

$$\phi(i) = \sum_{j=0}^i \rho_1^j = \frac{1 - \rho_1^{i+1}}{1 - \rho_1} 1(\rho_1 \neq 1) + (i+1)1(\rho_1 = 1), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.8)$$

とする. 定常方程式 (3.2)–(3.7) を帰納的に計算することにより, 定常分布を導出できる.

定理 3.1 安定条件 (3.1) の下で, 定常分布 π は以下で与えられる.

$$\pi(\ell, k) = \begin{cases} \rho_1^\ell \pi(0, 1), & (\ell, k) \in S_{1,1}, \\ \frac{\phi(\ell_u) - \phi(\ell - 1)}{\phi(\ell_u - \ell_d + 1)} \pi(0, 1), & (\ell, k) \in S_{2,1}, \\ \frac{\rho_1^{\ell_u}}{\phi(\ell_u - \ell_d + 1)} \frac{1 - \rho_2^{\ell - (\ell_d - 1)}}{1 - \rho_2} \rho_{12} \pi(0, 1), & (\ell, k) \in S_{1,2}, \\ \frac{\rho_1^{\ell_u}}{\phi(\ell_u - \ell_d + 1)} \frac{1 - \rho_2^{\ell_u - \ell_d + 2}}{1 - \rho_2} \rho_{12} \rho_2^{\ell - (\ell_u + 1)} \pi(0, 1), & (\ell, k) \in S_{2,2}. \end{cases} \quad (3.9)$$

ただし, 正規化定数 $\pi(0, 1)$ は

$$\pi(0, 1) = \left(\phi(\ell_d - 1) + \sum_{\ell=\ell_d}^{\ell_u} \frac{\phi(\ell_u) - \phi(\ell - 1)}{\phi(\ell_u - \ell_d + 1)} + \frac{\rho_{12} \rho_1^{\ell_u} (\ell_u - \ell_d + 2)}{\phi(\ell_u - \ell_d + 1) (1 - \rho_2)} \right)^{-1}, \quad (3.10)$$

となる.

(3.8) の定義より, (3.9) は以下のように表現もできる. $(\ell, k) \in S_{2,1}$ に対して,

$$\pi(\ell, k) = \left(\frac{\rho_1^\ell - \rho_1^{\ell_u + 1}}{1 - \rho_1^{\ell_u - \ell_d + 2}} 1(\rho_1 \neq 1) + \frac{(\ell_u + 1) - \ell}{\ell_u - \ell_d + 2} 1(\rho_1 = 1) \right) \pi(0, 1),$$

$(\ell, k) \in S_{1,2}$ に対して,

$$\begin{aligned} \pi(\ell, k) &= \left(\frac{\rho_1^{\ell_u} - \rho_1^{\ell_u+1}}{1 - \rho_1^{\ell_u - \ell_d + 2}} 1(\rho_1 \neq 1) + \frac{1}{\ell_u - \ell_d + 2} 1(\rho_1 = 1) \right) \\ &\quad \times \frac{1 - \rho_2^{\ell - (\ell_d - 1)}}{1 - \rho_2} \rho_{12} \pi(0, 1), \end{aligned}$$

$(\ell, k) \in S_{2,2}$ に対して,

$$\begin{aligned} \pi(\ell, k) &= \left(\frac{\rho_1^{\ell_u} - \rho_1^{\ell_u+1}}{1 - \rho_1^{\ell_u - \ell_d + 2}} 1(\rho_1 \neq 1) + \frac{1}{\ell_u - \ell_d + 2} 1(\rho_1 = 1) \right) \\ &\quad \times \frac{1 - \rho_2^{\ell_u - \ell_d}}{1 - \rho_2} \rho_{12} \rho_2^{\ell - \ell_u + 1} \pi(0, 1). \end{aligned}$$

さらに, 正規化定数 (3.10) は, $\rho_1 \neq 1$ ならば,

$$\pi(0, 1) = \left(\frac{1}{1 - \rho_1} - \frac{\rho_1^{\ell_u+1} (\ell_u - \ell_d + 2)}{(1 - \rho_1^{\ell_u - \ell_d + 2})} + \frac{\rho_{12} (\rho_1^{\ell_u} - \rho_1^{\ell_u+1}) (\ell_u - \ell_d + 2)}{(1 - \rho_1^{\ell_u - \ell_d + 2}) (1 - \rho_2)} \right)^{-1},$$

であり, $\rho_1 = 1$ ならば

$$\pi(0, 1) = \left(\frac{\ell_u + \ell_d + 1}{2} + \frac{\rho_{12}}{1 - \rho_2} \right)^{-1},$$

と表現できる. 定理 3.1 は ρ_1 の場合分けが必要ない表現である.

4 定常分布の拡散近似

定理 3.1 から定常分布の拡散近似を導出することができる. 拡散近似を導出するためには, n 番目のシステムを定義する必要があり, 2 節で定義したモデルに対して, 上添字 (n) をつけて n 番目のシステムを表すとする (例えば, $\ell_u^{(n)}, \ell_d^{(n)}, L^{(n)}(t), B^{(n)}(t)$ など). \mathbb{R} 上の関数 f, g に対して, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ を満たすとき $g(x) = o(f(x))$ ($x \rightarrow \infty$) と表す. 本研究における定常分布の拡散近似のための基本的な条件を以下で仮定する.

- (a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, n 番目のシステムが安定条件 $\rho_2^{(n)} < 1$ を満たす.
- (b) $i = 1, 2$ に対して, $\lambda_i^{(n)} \rightarrow \tilde{\lambda}_i, \mu_i^{(n)} \rightarrow \tilde{\mu}_i$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす $\tilde{\lambda}_i, \tilde{\mu}_i \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在する.

(c) $\tilde{\ell}_d < \tilde{\ell}_u$ かつ

$$\ell_d^{(n)} = \sqrt{n}\tilde{\ell}_d + o(\sqrt{n}), \quad \ell_u^{(n)} = \sqrt{n}\tilde{\ell}_u + o(\sqrt{n}), \quad n \rightarrow \infty,$$

を満たす正の定数 $\tilde{\ell}_d, \tilde{\ell}_u \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在する.

(d) 以下を満たす $b_1 \in \mathbb{R}$ と $b_2 \in \mathbb{R}_{<0}$ が存在する.

$$\rho_i^{(n)} = 1 + \frac{b_i}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad i = 1, 2, \quad n \rightarrow \infty.$$

$\tilde{\rho}_{12} = \frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\mu}_2}$ とすると, 条件 (b) より $\rho_{12}^{(n)} = \tilde{\rho}_{12} + o(1)$ ($n \rightarrow \infty$) を得る. 条件 $\ell_d^{(n)} < \ell_u^{(n)}$ と (c) から $\tilde{\ell}_d \leq \tilde{\ell}_u$ を得るが, 本研究では待ち行列長の履歴依存の効果を見るため, $\tilde{\ell}_d < \tilde{\ell}_u$ を仮定する. 条件 (d) より,

$$\lambda_i^{(n)} - \mu_i^{(n)} = \frac{b_i}{\sqrt{n}}\mu_i^{(n)} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad i = 1, 2, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

を得る. さらに, (4.1) と条件 (b) より, $i = 1, 2$ に対して $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\mu}_i$ を得る. 条件 (c) と (d) の同値な条件は以下である.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ell_i^{(n)} &= \tilde{\ell}_i, & i = d, u, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(1 - \rho_j^{(n)}) &= -b_j, & j = 1, 2. \end{aligned}$$

$\nu^{(n)}$ を

$$\nu^{(n)}(E) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}L^{(n)} \in E\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

とする. ただし, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は \mathbb{R} のボレル集合体とする. 本研究の主結果である, 定常分布の拡散近似は以下のように得られる.

定理 4.1 条件 (a)–(d) の下, $n \rightarrow \infty$ に対して, 確率測度の実数列 $\{\nu^{(n)}\}$ は確率測度 $\nu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ に収束する. ただし, ν の確率密度関数 $f = f_{1,1} + f_{2,1} + f_{1,2} + f_{2,2}$ に

ついて, $f_{1,1}, f_{2,1}, f_{1,2}, f_{2,2}$ は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}
f_{1,1}(x) &= C_0 \left(b_1(e^{b_1(\tilde{\ell}_u - \tilde{\ell}_d)} - 1)1(b_1 \neq 0) + 1(b_1 = 0) \right) e^{b_1 x} 1(x \in [0, \tilde{\ell}_d]), \\
f_{2,1}(x) &= C_0 \left(b_1(e^{b_1 \tilde{\ell}_u} - e^{b_1 x})1(b_1 \neq 0) + \frac{\tilde{\ell}_u - x}{\tilde{\ell}_u - \tilde{\ell}_d} 1(b_1 = 0) \right) 1(x \in [\tilde{\ell}_d, \tilde{\ell}_u]), \\
f_{1,2}(x) &= \frac{C_0 \tilde{\rho}_{12}}{b_2} \left(b_1^2 e^{b_1 \tilde{\ell}_u} 1(b_1 \neq 0) + \frac{1(b_1 = 0)}{\tilde{\ell}_u - \tilde{\ell}_d} \right) (e^{b_2(x - \tilde{\ell}_d)} - 1) 1(x \in [\tilde{\ell}_d, \tilde{\ell}_u]), \\
f_{2,2}(x) &= \frac{C_0 \tilde{\rho}_{12} (e^{b_2(\tilde{\ell}_u - \tilde{\ell}_d)} - 1)}{b_2} \left(b_1^2 e^{b_1 \tilde{\ell}_u} 1(b_1 \neq 0) + \frac{1(b_1 = 0)}{\tilde{\ell}_u - \tilde{\ell}_d} \right) \\
&\quad \times e^{b_2(x - \tilde{\ell}_u)} 1(x \in (\tilde{\ell}_u, \infty)).
\end{aligned}$$

正規化定数 C_0 は

$$C_0 = \begin{cases} \left(1 - e^{b_1(\tilde{\ell}_u - \tilde{\ell}_d)} + b_1(\tilde{\ell}_u - \tilde{\ell}_d)e^{b_1 \tilde{\ell}_u} - \frac{b_1^2}{b_2}(\tilde{\ell}_u - \tilde{\ell}_d)\tilde{\rho}_{12}e^{b_1 \tilde{\ell}_u} \right)^{-1}, & b_1 \neq 0, \\ \left(\frac{\tilde{\ell}_u + \tilde{\ell}_d}{2} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{b_2} \right)^{-1}, & b_1 = 0, \end{cases}$$

で与えられる.

定常分布の拡散近似においては, 指数分布や一様分布が導出されることが一般的である. $f_{1,1}$ と $f_{2,2}$ は指数分布もしくは一様分布の確率密度関数となっている. 一方, $f_{2,1}$ と $f_{1,2}$ はそのどちらでもなく, 待ち行列長の履歴に依存する効果が現れていると捉えることができる.

謝辞

本研究は京都大学の国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の支援と JSPS 科研費 JP19K11845 と JP22K11927 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] ARTALEJO, J. R., ECONOMOU, A. and LOPEZ-HERREO, M. J. (2005). Analysis of a multiserver queue with setup times. *Queueing Systems*, **51** 53–76. URL <https://doi.org/10.1007/s11134-005-1740-6>.

- [2] ATAR, R. and MIYAZAWA, M. (2025). Heavy traffic limit with discontinuous coefficients via a non-standard semimartingale decomposition. URL <https://arxiv.org/pdf/2502.16467>.
- [3] GANDHI, A., HARCHOL-BALTER, M. and ADAN, I. (2010). Server farms with setup costs. *Performance Evaluation*, **67** 1123–1138. URL <https://doi.org/10.1016/j.peva.2010.07.004>.
- [4] KOBAYASHI, M., MIYAZAWA, M. and SAKUMA, Y. (2025). Heavy traffic limit of stationary distribution of multi-level single server queue under time change. *Submitted for publication*. URL <http://arxiv.org/abs/2505.03504>.
- [5] KOBAYASHI, M., MIYAZAWA, M. and SAKUMA, Y. (2026). Diffusion limit for the stationary distribution of a history-dependent two-level M/M/1 queue. *Submitted for publication*.
- [6] MITRANI, I. (2013). Managing performance and power consumption in a server farm. *Annals of Operations Research*, **202** 121–134. URL <https://doi.org/10.1007/s10479-011-0932-1>.
- [7] MIYAZAWA, M. (2024). Multi-level reflecting Brownian motion on the half line and its stationary distribution. *Journal of the Indian Society for Probability and Statistics*, **25** 543–574. URL <https://arxiv.org/abs/2405.16764>.
- [8] PHUNG-DUC, T. and KAWANISHI, K. (2020). Delay performance of data-center queue with setup policy and abandonment. *Annals of Operations Research*, **293** 263–293.
- [9] SCHWARTZ, C., PRIES, R. and TRAN-GIA, P. (2012). A queuing analysis of an energy-saving mechanism in data centers. *The International Conference on Information Network 2012* 70–75.