分岐型推移をもつ決定過程
– 最大加法型評価 –

九州工業大学・大学院工学研究院　藤田 敏治
Toshiharu Fujita
Graduate School of Engineering,
Kyushu Institute of Technology

1　はじめに

ノンシリアル推移 ([2, 3, 4, 6]) の一つである分岐型推移をもつ決定過程において，最大加法型評価最小化問題を扱う．ここで扱う分岐型推移とは，状態推移の際，推移先の状態が一般に複数となる有限ステージの確定的推移である．従来，非決定推移 ([5]) として扱ってきたものと推移構造そのものは，ある意味で同等と言えるが，評価がステージごとに固定されない点など，より多様な決定過程構造を表現可能な推移である．この種の推移上で，初期状態から各終端状態（一般に複数）までの推移経路上の評価について和を取り，すべての終端状態までの推移経路に関して最大値をとるものが最大加法型評価である．本稿は，この種の問題に対し，動的計画法 ([1]) による再帰的解法を与えることが目的である．

2　分岐型推移をもつ決定過程

確定的環境下で，有限ステージの分岐型推移を扱う．これは，1 つの初期状態から始まり，有限回の状態推移を経る過程で一般に複数の状態への分岐を繰り返し，終端状態に達して終了するものである．

ここで，X を有限状態空間とし，状態変数を $x_1, x_2, \ldots, x_N \in X$ $(N > 1)$ であらわす．x_1 を初期状態とし，$T = \{L, L+1, \ldots, N\}$ $(L > 1)$ に対し，x_n $(n \in T)$ を終端

状態とする．また，U を有限決定空間とし，$U_n(x_n) \subset U$ $(n = 1, 2, \ldots, L-1)$ は状態 $x_n \in X$ に対し選択可能な決定全体をあらわすものとし，各 x_n に対して選択される決定を $u_n \in U_n(x_n)$ であらわす．

以後，状態 x_n から状態 x_m へ推移するとき，$I(m) = n$ とおき，状態 $x_{I(m)}$ に対し決定 $u_{I(m)}$ をとった際の x_m への推移を

$$x_m = f_m(x_{I(m)}, u_{I(m)}) \quad (m = 2, 3, \ldots, N)$$

によりあらわす．そして，状態 x_n からの推移先状態全体の添え字集合を

$$F(n) = \{m \,|\, I(m) = n\} \quad (n = 1, 2, \ldots, L-1)$$

とおく．

$r_n : \mathrm{Gr}(U_n) \to \mathbf{R}$ $(n = 1, 2, \ldots, L-1)$ および $r_n : X \to \mathbf{R}$ $(n = L, L+1, \ldots, N)$ はそれぞれコスト関数，終端コスト関数とする．$\mathrm{Gr}(U_n)$ は U_n のグラフである：

$$\mathrm{Gr}(U_n) = \{(x, u) \in X \times U \,|\, u \in U_n(x)\}.$$

さらに，各 $t \in T$ に対し，

$$i_M = t, \quad i_{j-1} = I(i_j) \ (j = M, M-1, \ldots, 3, 2), \quad i_1 = 1$$

をみたす列を

$$w(t) = (i_1, i_2, \ldots, i_M)$$

とおき（分岐型推移において $w(t)$ は一意に定まる），

$$W = \{w(t) \,|\, t \in T\}$$

とおくとき，最大化法型評価は次の式であらわされる：

$$\bigvee_{(i_1, i_2, \ldots, i_M) \in W} \left\{ r_{i_1}(x_{i_1}, u_{i_1}) + r_{i_2}(x_{i_2}, u_{i_2}) + \cdots + r_{i_M}(x_{i_M}) \right\}.$$

ただし

$$\bigvee_{\xi} a(\xi) \;=\; \max_{\xi} a(\xi)$$

とする．

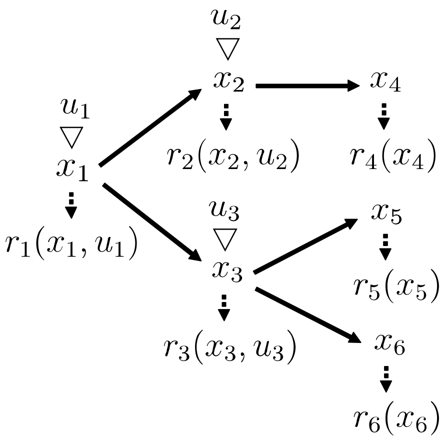

図 1　分岐型推移をもつ決定過程

マルコフ政策は $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{L-1}\}$ であらわす．$\pi_n : X \to U$ は状態 x_n に対する決定を与える決定関数である．また，Π_1 はマルコフ政策全体をあらわすものとする．このとき，初期状態 x_1 に対する次の最大加法型評価最小化問題を考える：

$$
\begin{aligned}
&\text{(P)}\quad \text{Minimize} \quad \bigvee_{(i_1, i_2, \ldots, i_M) \in W} \{r_{i_1}(x_{i_1}, u_{i_1}) + r_{i_2}(x_{i_2}, u_{i_2}) + \cdots + r_{i_M}(x_{i_M})\} \\
&\qquad\quad \text{subject to} \quad x_n = f_n(x_{I(n)}, u_{I(n)}) \quad (n = 2, 3, \ldots, N) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\ \pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{L-1}\} \in \Pi_1.
\end{aligned}
$$

ただし，$u_n = \pi_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots, L-1)$ である．

例 2.1　$N = 6,\ T = \{4, 5, 6\}$ とし $I(6) = I(5) = 3,\ I(4) = 2,\ I(3) = I(2) = 1$ とする．すなわち，初期状態 x_1 から開始し，状態推移：

$$x_2 = f_2(x_1, u_1),\ x_3 = f_3(x_1, u_1),\ x_4 = f_4(x_2, u_2),\ x_5 = f_5(x_3, u_3),\ x_6 = f_6(x_3, u_3)$$

により定まる分岐型推移を考える．図 1 は，この分岐型推移をもつ決定過程を図示したものである．このとき，最大加法型評価最小化問題は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \{r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + r_4(x_4)\} \\
& \quad \vee\{r_1(x_1, u_1) + r_3(x_3, u_3) + r_5(x_5)\} \\
& \quad \vee\{r_1(x_1, u_1) + r_3(x_3, u_3) + r_6(x_6)\} \\
\text{subject to} \quad & x_n = f_n(x_{I(n)}, u_{I(n)}) \quad (n = 2, 3, 4, 5, 6) \\
& \pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\} \in \Pi_1
\end{aligned}
$$

□

3　部分問題群と再帰式

問題 (P) に対し，x_n から開始する部分問題群を次のように構成し，最適値関数を v^n であらわす：

$$
\begin{aligned}
&v^n(x_n) = r_n(x_n), \qquad n = L,\, L+1, \ldots,\, N \\
&v^n(x_n) = \min_{\pi \in \Pi_n} \bigvee_{(i_1, i_2, \ldots, i_M) \in W_n} \bigl\{ r_{i_1}(x_{i_1},\, u_{i_1}) + r_{i_2}(x_{i_2},\, u_{i_2}) + \cdots + r_{i_M}(x_{i_M}) \bigr\}, \\
&\hspace{20em} n = 1,\ 2, \ldots,\ L-1.
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
&W_1 = W, \\
&W_n = \bigl\{ (i_1,\, i_2, \ldots,\, i_M) \,|\, i_1 = n,\ {}^{\exists}p \in \{1,\, 2, \ldots,\, L-1\} \text{ s.t.} \\
&\hspace{10em} (j_1,\, \ldots,\, j_p, i_1,\, i_2, \ldots,\, i_M) \in W \bigr\} \quad (n = 2, \ldots,\, L{-}1) \\
&\Pi_n = \bigl\{ \{\pi_i\}_{i \in J_n} \,|\, \{\pi_1,\, \pi_2, \ldots,\, \pi_{L-1}\} \in \Pi_1 \bigr\}, \\
&\hspace{8em} J_n = \bigcup_{(i_1, i_2, \ldots, i_M) \in W_n} \{i_1,\, i_2, \ldots,\, i_{M-1}\}, \quad (n = 1,\, 2, \ldots,\, L-1)
\end{aligned}
$$

である．

値関数 v^n に対し，次の再帰式が成り立つ：

定理 3.1

$$
\begin{aligned}
&v^n(x_n) = r_n(x_n), \qquad x_n \in X, \quad n = L, L+1, \ldots, N \\
&v^n(x_n) = \min_{u_n} \left[r_n(x_n,\, u_n) + \bigvee_{m \in F(n)} v^m\bigl(f_m(x_n,\, u_n)\bigr) \right], \qquad x_n \in X, \\
&\hspace{20em} n = 1,\, 2, \ldots,\, L-1.
\end{aligned}
$$

証明　$n = 1,\, 2, \ldots,\, L-1$ に対し，

$$
J_{F(n)} = \bigcup_{m \in F(n)} J_m
$$

とし，

$$
\Pi_{F(n)} = \bigl\{ \pi \,|\, \pi = \{\pi_i\}_{i \in J_{F(n)}} \bigr\}
$$

とおく．このとき，

$$
\begin{aligned}
&v^n(x_n)\\
&= \min_{\pi\in\Pi_n} \bigvee_{(n,i_2,\ldots,i_M)\in W_n} \{r_n(x_n,\,u_n)+r_{i_2}(x_{i_2},\,u_{i_2})+\cdots+r_{i_M}(x_{i_M})\}\\
&= \min_{\pi\in\Pi_n}\left[r_n(x_n,\,u_n)+\bigvee_{(n,i_2,\ldots,i_M)\in W_n}\{r_{i_2}(x_{i_2},\,u_{i_2})+\cdots+r_{i_M}(x_{i_M})\}\right]\\
&= \min_{\pi\in\Pi_n}\Bigg[r_n(x_n,\,u_n)+\bigvee_{m\in F(n)}\Bigg\{\bigvee_{(m,i_2^m,\ldots,i_{M_m}^m)\in W_m}\{r_m(x_m,\,u_m)+r_{i_2^m}(x_{i_2^m},\,u_{i_2^m})+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots+r_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m}^m})\}\Bigg\}\Bigg]\\
&= \min_{\pi_n}\Bigg[r_n(x_n,\,u_n)+\min_{\pi\in\Pi_{F(n)}}\bigvee_{m\in F(n)}\Bigg\{\bigvee_{(m,i_2^m,\ldots,i_{M_m}^m)\in W_m}\{r_m(x_m,\,u_m)+r_{i_2^m}(x_{i_2^m},\,u_{i_2^m})+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots+r_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m}^m})\}\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

ここで，各 $(x_n,\,u_n)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&\min_{\pi\in\Pi_{F(n)}}\bigvee_{m\in F(n)}\Bigg\{\bigvee_{(m,i_2^m,\ldots,i_{M_m}^m)\in W_m}\{r_m(x_m,\,u_m)+r_{i_2^m}(x_{i_2^m},\,u_{i_2^m})+\cdots+r_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m}^m})\}\Bigg\}\\
&=\bigvee_{m\in F(n)}\Bigg\{\min_{\pi\in\Pi_m}\bigvee_{(m,i_2^m,\ldots,i_{M_m}^m)\in W_m}\{r_m(x_m,\,u_m)+r_{i_2^m}(x_{i_2^m},\,u_{i_2^m})+\cdots+r_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m}^m})\}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

を示す．

まず，左辺の最小値を与える最適政策（の一つ）を $\hat\pi=\{\hat\pi_i\}_{i\in J_{F(n)}}\in\Pi_{F(n)}$ とおくとき，$(m,\,i_2^m,\ldots,\,i_{M_m}^m)\in W_m$ $(m\in F(n))$ に対し，$\{m,\,i_2^m,\ldots,\,i_{M_m}^m\}\subset J_m\subset J_{F(n)}$ なので

$$\{\hat\pi_m,\ \hat\pi_{i_2^m},\ldots,\ \hat\pi_{i_{M_m-1}^m}\}\subset\hat\pi$$

である．これより，状態と決定の交互列：

$$
\begin{array}{ll}
x_m=f_m(x_n,\,u_n), & \hat u_m=\hat\pi_m(x_m),\\
x_{i_2^m}=f_{i_2^m}(x_m,\,\hat u_m), & \hat u_{i_2^m}=\hat\pi_{i_2^m}(x_{i_2^m}),\\
x_{i_3^m}=f_{i_3^m}(x_{i_2^m},\,\hat u_{i_2^m}), & \hat u_{i_3^m}=\hat\pi_{i_3^m}(x_{i_3^m}),\\
\vdots & \vdots\\
x_{i_{M_m-1}^m}=f_{i_{M_m-1}^m}(x_{i_{M_m-2}^m},\,\hat u_{i_{M_m-2}^m}), & \hat u_{i_{M_m-1}^m}=\hat\pi_{i_{M_m-1}^m}(x_{i_{M_m-1}^m}),\\
x_{i_{M_m}^m}=f_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m-1}^m},\,\hat u_{i_{M_m-1}^m}) &
\end{array}
$$

が定まる．このとき，

$$(\text{左辺}) \ = \bigvee_{m\in F(n)} \Big\{ \bigvee_{(m, i_2^m, \ldots, i_{M_m}^m)\in W_m} \{ r_m(x_m,\, \hat{u}_m) + r_{i_2^m}(x_{i_2^m},\, \hat{u}_{i_2^m}) + \cdots + r_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m}^m}) \} \Big\}$$

とあらわされる．さらに，すべての $m \in F(n)$ に対し，$(m,\, i_2^m, \ldots,\, i_{M_m}^m) \in W_m$ であれば，$\{m,\, i_2^m, \ldots,\, i_{M_m}^m\} \subset J_m$ なので

$$\{\hat{\pi}_m,\ \hat{\pi}_{i_2^m}, \ldots,\ \hat{\pi}_{i_{M_m-1}^m}\} \subset \pi$$

なる $\pi \in \Pi_m$ がある．よって，

$$\begin{aligned}
&(\text{左辺}) \\
&\geq \bigvee_{m\in F(n)} \Big\{ \min_{\pi\in\Pi_m} \bigvee_{(m, i_2^m, \ldots, i_{M_m}^m)\in W_m} \{ r_m(x_m,\, u_m) + r_{i_2^m}(x_{i_2^m},\, u_{i_2^m}) + \cdots + r_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m}^m}) \} \Big\} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

が成り立つ．

次に右辺において，各 $m \in F(n)$ ごとに，最小値 $\displaystyle\min_{\pi\in\Pi_m} \bigvee_{(m, i_2^m, \ldots, i_{M_m}^m)\in W_m} \{\cdots\}$ を与える政策を $\bar{\pi} = \{\bar{\pi}_i\}_{i\in J_m} \in \Pi_m$ とおく．このとき，すべての $(m,\, i_2^m, \ldots,\, i_{M_m}^m) \in W_m$ に対し，$\{m,\, i_2^m, \ldots,\, i_{M_m}^m\} \subset J_m$ なので

$$\{\bar{\pi}_m,\ \bar{\pi}_{i_2^m}, \ldots,\ \bar{\pi}_{i_{M_m-1}^m}\} \subset \bar{\pi}$$

であり，状態と決定の交互列：

$$\begin{array}{ll}
x_m = f_m(x_n,\, u_n), & \bar{u}_m = \bar{\pi}_m(x_m), \\
x_{i_2^m} = f_{i_2^m}(x_m,\, \bar{u}_m), & \bar{u}_{i_2^m} = \bar{\pi}_{i_2^m}(x_{i_2^m}), \\
x_{i_3^m} = f_{i_3^m}(x_{i_2^m},\, \bar{u}_{i_2^m}), & \bar{u}_{i_3^m} = \bar{\pi}_{i_3^m}(x_{i_3^m}), \\
\vdots & \vdots \\
x_{i_{M_m-1}^m} = f_{i_{M_m-1}^m}(x_{i_{M_m-2}^m},\, \bar{u}_{i_{M_m-2}^m}), & \bar{u}_{i_{M_m-1}^m} = \bar{\pi}_{i_{M_m-1}^m}(x_{i_{M_m-1}^m}), \\
x_{i_{M_m}^m} = f_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m-1}^m},\, \bar{u}_{i_{M_m-1}^m}) &
\end{array}$$

が定まる．このとき，

$$(\text{右辺}) \ = \bigvee_{m\in F(n)} \Big\{ \bigvee_{(m, i_2^m, \ldots, i_{M_m}^m)\in W_m} \{ r_m(x_m,\, \bar{u}_m) + r_{i_2^m}(x_{i_2^m},\, \bar{u}_{i_2^m}) + \cdots + r_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m}^m}) \} \Big\}$$

とあらわされる．さらに，すべての $m \in F(n)$ に対し，$(m,\, i_2^m, \ldots,\, i_{M_m}^m) \in W_m$ であれば $\{m,\, i_2^m, \ldots,\, i_{M_m}^m\} \subset J_m \subset J_{F(n)}$ なので

$$\{\bar{\pi}_m,\ \bar{\pi}_{i_2^m}, \ldots,\ \bar{\pi}_{i_{M_m-1}^m}\} \subset \pi$$

なる $\pi \in \Pi_{F(n)}$ がある．よって，

$$
\begin{aligned}
&(\text{右辺}) \\
&\geq \min_{\pi \in \Pi_{F(n)}} \bigvee_{m \in F(n)} \Bigl\{ \bigvee_{(m, i_2^m, \ldots, i_{M_m}^m) \in W_m} \{ r_m(x_m,\, u_m) + r_{i_2^m}(x_{i_2^m},\, u_{i_2^m}) + \cdots + r_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m}^m}) \} \Bigr\} \\
&= (\text{左辺})
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

以上より，

$$
\begin{aligned}
&v^n(x_n) \\
&= \min_{\pi_n} \Biggl[r_n(x_n,\, u_n) + \bigvee_{m \in F(n)} \Bigl\{ \min_{\pi \in \Pi_m} \bigvee_{(m, i_2^m, \ldots, i_{M_m}^m) \in W_m} \{ r_m(x_m,\, u_m) + r_{i_2^m}(x_{i_2^m},\, u_{i_2^m}) + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots + r_{i_{M_m}^m}(x_{i_{M_m}^m}) \} \Bigr\} \Biggr] \\
&= \min_{u_n} \Biggl[r_n(x_n,\, u_n) + \bigvee_{m \in F(n)} v^m\bigl(f_m(x_n,\, u_n)\bigr) \Biggr]
\end{aligned}
$$

が成り立つ．□

例 3.1　例 2.1 の問題に対応する部分問題を構成した結果は以下で与えられる：

$$
\begin{aligned}
v^6(x_6) &= r_6(x_6) \\
v^5(x_5) &= r_5(x_5) \\
v^4(x_4) &= r_4(x_4) \\
v^3(x_3) &= \min_{\pi_3} \bigl[\{ r_3(x_3,\, u_3) + r_5(x_5) \} \vee \{ r_3(x_3,\, u_3) + r_6(x_6) \} \bigr] \\
v^2(x_2) &= \min_{\pi_2} \bigl[r_2(x_2,\, u_2) + r_4(x_4) \bigr] \\
v^1(x_1) &= \min_{\pi_1, \pi_2, \pi_3} \bigl[\{ r_1(x_1,\, u_1) + r_2(x_2,\, u_2) + r_4(x_4) \} \\
&\qquad\qquad \vee \{ r_1(x_1,\, u_1) + r_3(x_3,\, u_3) + r_5(x_5) \} \\
&\qquad\qquad \vee \{ r_1(x_1,\, u_1) + r_3(x_3,\, u_3) + r_6(x_6) \}].
\end{aligned}
$$

これらの値関数 v^n について次の再帰式が成り立つ：

$$
v^6(x_6) = r_6(x_6)
$$

$$
\begin{aligned}
v^5(x_5) &= r_5(x_5) \\
v^4(x_4) &= r_4(x_4) \\
v^3(x_3) &= \max_{u_3} \left[r_3(x_3,\, u_3) + \{ v^5(f_5(x_3,\, u_3)) \vee v^6(f_6(x_3,\, u_3)) \} \right] \\
v^2(x_2) &= \max_{u_2} \left[r_2(x_2,\, u_2) + v^4\big(f_4(x_2,\, u_2)\big) \right] \\
v^1(x_1) &= \max_{u_1} \left[r_1(x_1,\, u_1) + \{ v^2(f_2(x_1,\, u_1)) \vee v^3(f_3(x_1,\, u_1)) \} \right].
\end{aligned}
$$

□

謝辞

本研究は科研費 25K07118 の助成を受けたものである.

参考文献

[1] R.E. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] U. Bertelé and F. Brioschi, Nonserial Dynamic Programming, Academic Press, New York, 1972.

[3] A.O. Esogbue and N.A. Warsi, A High-level Computing Algorithm for Diverging and Converging Branch Nonserial Dynamic Programming Systems, Computers and Mathematics with Applications, 12 (1986), 719–732.

[4] A.O. Esogbue, A High Level Dynamic Programming Algorithm for Processing Nonserial Looped System, Computers and Mathematics with Applications, 16 (1988), 801–813.

[5] T. Fujita, T. Ueno, and S. Iwamoto, A Nondeterministic Dynamic Programming Model, Lecture Notes in Artificial Intelligence 3214 (2004), 1208–1214.

[6] G.L. Nemhauser, Introduction to Dynamic Programming, Wiley, New York, 1966.

Graduate School of Engineering,
Kyushu Institute of Technology
Kitakyushu 804-8550
JAPAN
E-mail address: fujita@mns.kyutech.ac.jp

九州工業大学・大学院工学研究院　藤田 敏治