ある順序付け問題から派生した協力ゲーム

兵庫県立大学名誉教授 菊田健作 *

Kensaku Kikuta

Professor Emeritus, University of Hyogo

1 はじめに

文献 [1] に動的計画法を用いる例として次のような順序づけ問題[1]が紹介されている．

1. プレイヤー A に対し関門 $1, 2, \ldots, m$ がある．$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ とおく．
2. 各関門 $i \in M$ に対し, p_i はプレイヤー A がこの関門 i のチャレンジに成功する確率である．$p = (p_1, \ldots, p_m)$ とおく．
3. プレイヤー A が関門 $i \in M$ のチャレンジに成功したとき彼は利得 α_i を得る．$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ とおく．
4. プレイヤー A は M 上の順序 σ を決めてから，その順序に従って関門に 1 個ずつチャレンジしていく．
5. プレイヤー A は関門のチャレンジに失敗した時点で行動を終了する．
6. プレイヤー A は，受け取る利得の期待値が最大になるように M 上の順序 σ を決めなければならない．

この順序付け問題を関門クリア問題と呼び $\mathcal{P}(M, p, \alpha)$ と表す．問題 $\mathcal{P}(M, p, \alpha)$ において最適な順序の下でプレイヤー A が得る期待利得を $g(M, p, \alpha)$ とすると，動的計画法の最適性の原理により

$$g(M, p, \alpha) = \max_{1 \leq i \leq m} \{p_i[\alpha_i + g(M \setminus \{i\}, p^{-i}, \alpha^{-i})]\}$$
$$\text{ここに}, p^{-i} \equiv (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_m), \alpha^{-i} \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m),$$
$$g(\{i\}, p_i, \alpha_i)) = p_i \alpha_i, \text{ for all } 1 \leq i \leq m. \tag{1}$$

*E-mail address: kenkikuta@gmail.com

[1] 文献 [1] では障害コースの問題と呼ばれている．

次の事実はよく知られている．

定理 1. ([1]) 問題 $\mathcal{P}(M,p,\alpha)$ において，仮定

$$\frac{p_1\alpha_1}{1-p_1} \geq \frac{p_2\alpha_2}{1-p_2} \geq \cdots \geq \frac{p_n\alpha_n}{1-p_m} \tag{2}$$

の下で最適順序は $[1,\ldots,m]$ である．最適値は

$$g(M,p,\alpha) = \sum_{i=1}^{m}(\Pi_{j=1}^{i}p_j)\alpha_i. \tag{3}$$

本稿では複数のプレイヤーが協力して 1 個あるいは複数個の関門クリア問題に対処する状況の協力ゲームモデル化を試みる．

2 関門クリア問題と協力ゲーム

プレイヤー全体の集合を $N=\{1,\ldots,n\}$ とする．$n \geq 2$ である．N の部分集合全体 2^N の元を提携という．用語および必要な事柄を述べる．

1. アクションとは，関門のチャレンジに失敗しない限りチャレンジしていく一連の行動である．
2. 各プレイヤー $i \in N$ は，すべての関門についてチャレンジに成功する確率を計算済みである．それを $p^i \equiv (p^i_1,\ldots,p^i_m), i \in N$ とする．
3. プレイヤー $i \in N$ は関門 $j \in M$ へのチャレンジに成功したとき利得 α^i_j を受け取る．本稿では，簡単のために，利得は関門のみに依存する，つまり $\alpha^i_j = \alpha_j, \forall i \in N$ を仮定する．$\alpha \equiv (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ とおく．

本節では，各関門ごとに提携に属するプレイヤーの中で最大の成功確率をもつプレイヤーがチャレンジする，という協力の仕方に基づいた協力ゲームを定義する．

まず，各提携 $S \subseteq N, S \neq \emptyset$ に対して，

$$p^S_j \equiv \max_{i \in S} p^i_j, \quad \forall j \in M \tag{4}$$

とする．これは，関門 j にチャレンジするときの，提携 S に属するプレイヤーの成功確率の最大値である．$p^S \equiv (p^S_1,\ldots,p^S_m)$ とおく．$i \in N$ に対し $p^{\{i\}} = p^i$ である．提携 S は関門クリア問題 $\mathcal{P}(M,p^S,\alpha)$ を考えている．次に，2^N 上の非負関数 $w : 2^N \to \mathbb{R}_+$ を

$$w(S) = g(M,p^S,\alpha), \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset, \text{また}\, w(\emptyset) = 0 \tag{5}$$

と定義する．$w(S)$ は提携 S が 1 回アクションしたときの期待利得である．

補題 1. 任意の $S \subseteq T \subseteq N, S \neq \emptyset$ に対し，$p_j^S \leq p_j^T, \forall j \in M$ であり，$w(S) \leq w(T)$ である．

さて，特性関数型の協力ゲームは対 (N, v) で与えられる．$v : 2^N \to \mathbb{R}_+$ を特性関数という[2]．$v(\emptyset) = 0$ を仮定する．提携 $S \in 2^N$ に対し $v(S)$ は提携 S の成員が協力することによって得る値を表す．これを提携 S の値という．$S \cap T = \emptyset$ であるようなすべての $S, T \in 2^N$ に対し, $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ であるとき，協力ゲーム (N, v) は優加法的であるという．$S \subseteq T$ であるようなすべての $S, T \in 2^N$ に対し, $v(S) \leq v(T)$ であるとき，協力ゲーム (N, v) は単調であるという．協力ゲーム (N, v) と各プレイヤー $i \in N$ に対し

$$\varphi_i(N, v) \equiv \sum_{S:i \in S} \frac{(n - |S|)!(|S| - 1)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] \tag{6}$$

とおき，$\varphi(N, v) = (\varphi_1(N, v), \ldots, \varphi_n(N, v))$ を (N, v) のシャープレイ値という（[6]）．定義から容易に補題 2 を得る．

補題 2. ([6]) 任意の協力ゲーム (N, v) に対し，$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v) = v(N)$ である．さらに，協力ゲーム (N, v) が優加法的であるならばすべての $i \in N$ に対し $\varphi_i(N, v) \geq v(i)$ である．

以下，本稿で扱う協力ゲームはすべて優加法的であることがわかるので，プレイヤー $i \in N$ は自分単独で行動して $v(i)$ を得るより全体提携 N によってシャープレイ値 $\varphi_i(N, v)$ を得る方が有利である．

次に，協力ゲーム (N, v) のコアとは次の条件を満たすベクトル $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の集合 $\mathcal{C}(N, v)$（凸多面体）である：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N), \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subseteq N. \tag{7}$$

コア $\mathcal{C}(N, v)$ が空でないための条件が知られている．

定理 2. ([7]) 協力ゲーム (N, v) のコアが空でないための条件は次のとおりである．任意の，有限個の空でない提携の族 $\{S_1, \ldots, S_k\}$ と正数 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ が $\sum_{j:i \in S_j} \lambda_j = 1, \forall i \in N, \quad \bigcup_{j=1}^{k} S_j = N$ を満たすならば,

$$v(N) \geq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v(S_j) \tag{8}$$

[2] 本稿では特性関数値を非負としてよい．

協力ゲーム (N,v) に対して，プレイヤーの集合を $S \subseteq N$ に制限した協力ゲーム (S,v) を部分ゲームという．ここに，$v = v|_S$ である．協力ゲーム (N,v) において任意の $S \subseteq N$ に対し部分ゲーム (S,v) のコアが空でないとき協力ゲーム (N,v) を全平衡ゲームという．

補題 3. 協力ゲーム (N,v) が

$$v(S) = u(S)w(S), \forall S \subseteq N \tag{9}$$

とする．ここに，$u : 2^N \to \mathbb{R}_+$ は特性関数として見たとき優加法的であると仮定すると，v は優加法的かつ単調である．さらに，u が加法的（つまり，$u(S) = \sum_{i \in S} u(i), \forall S \subseteq N$）であるならば，協力ゲーム (N,v) は全平衡ゲームである．

Proof. （略証） $S \cap T = \emptyset$ を満たす任意の $S,T \in 2^N$ に対して，補題 1 に注意して

$$\begin{aligned} v(S \cup T) = u(S \cup T)w(S \cup T) &\geq u(S)w(S \cup T) + u(T)w(S \cup T) \\ &\geq u(S)w(S) + u(T)w(T) = v(S) + v(T). \end{aligned} \tag{10}$$

よって (N,v) は優加法的である．次に，集合 $S \subseteq N, S \neq \emptyset$ に対し，$T_1, \ldots, T_\ell$ を S 上の平衡集合，$\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ を平衡係数の一つとする．平衡集合の定義により，$\sum_{j:i \in T_j} \lambda_j = 1$ であるから，u が加法的であるならば

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j v(T_j) = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j u(T_j) w(T_j) &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j u(T_j) w(S) \\ &= w(S) \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \sum_{k \in T_j} u(k) = w(S) \sum_{i \in S} u(i) \sum_{j:i \in T_j} \lambda_j \\ &= w(S)u(S) = v(S). \end{aligned} \tag{11}$$

よって，(S,v) は平衡ゲームであり，(S,v) のコアは空でない． □

2.1 協力ゲーム（その１）

元々，提携 S の各プレイヤー i は個別に 1 回アクションして期待利得 $w(i) \equiv w(\{i\})$ を得ることができる．各自の個別のアクションすべてにおいて，提携 S のメンバーが協力してアクションするならば提携 S は合計 $|S|$ 回アクションすることになる．それぞれのアクションにおいて期待利得 $w(S)$ を得る．提携 S に対する特性関数値を

$$v^*(S) \equiv |S| w(S) \tag{12}$$

と定義して，特性関数型の協力ゲーム (N,v^*) を得る．

注意 1. １個の関門クリア問題があり，N に属するプレイヤーが協力して対処すると仮定する．$S \subseteq N$ に対する特性関数値を $v(S) = w(S)$ とすることも考えられるが，$w(12) < w(1) + w(2)$ であるような例を容易に考えることができる．関数 w は優加法性を満たさないので，協力することにより両者が得をするとはいえない..

さて，式 (9) において，$u(S) = |S|, \forall S \subseteq N$ とおくと v^* を得る．補題 3 より

命題 1. 協力ゲーム (N, v^*) は優加法的である．また，(N, v^*) は全平衡ゲームである．

一般に，協力ゲーム (N, v) が凸ゲーム（つまり，$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \forall S, T \subseteq N$）であれば全平衡ゲームである，ことが知られている（[8]）．次の例は逆が成り立たないことを示している．

例 1. プレイヤーの集合は $N = \{1, 2, 3\}$ であり，関門の集合は $M = \{1, 2\}$ であるとする．$p_1^1 < p_1^2 = p_1^3$ および $p_2^1 < p_2^2 = p_2^3$ を仮定するならば $v^*(123) = 3v^*(2), v^*(13) = v^*(23) = v^*(12) = 2v^*(2), v^*(1) < v^*(2)$ であることがわかる．$v^*(123) + v^*(1) = 3v^*(2) + v^*(1) < 4v^*(2) = v^*(12) + v^*(13)$ であるから，(N, v^*) は凸ゲームではない．

2.2　協力ゲーム（その２）

１個の関門クリア問題があり，ある意思決定者がアクションしようとする場合，関門によっては自分より得意である他人にチャレンジを頼むことも考えられる．この意思決定者をプレイヤー i とし，チャレンジを頼める人の集合を $N \setminus \{i\}$ とすると，次のような協力ゲーム (N, v^i) を考えるとしてよい．

$$v^i(S) = \begin{cases} w(S) = g(M, p^S, \alpha), & i \in S \subseteq N; \\ 0, & i \notin S; \end{cases} \tag{13}$$

さて，式 (9) において，$u(S) = \chi_S(i), \forall S \subseteq N$ とおくと関数 u は加法的かつ単調である．そしてすべての $S \subseteq N$ に対して $v^i(S) = u(S)w(S)$ であるから，補題 3 によって次の命題 2 を得る．

命題 2. 任意の $i \in N$ に対し，協力ゲーム (N, v^i) は優加法的である．さらに，(N, v^i) は全平衡ゲームである．

命題 3. 協力ゲーム $(N, v^i), i \in N$ のシャープレイ値は $\varphi_j(N, v^i) < \varphi_i(N, v^i), j \neq i$ を満たす．

Proof. （略証）定義により

$$\varphi_i(N, v^i) = \sum_{i \in S} \gamma(S) g(M, p^S, \alpha),$$
$$\varphi_j(N, v^i) = \sum_{i,j \in S} \gamma(S)[g(M, p^S, \alpha) - g(M, p^{S \setminus \{j\}}, \alpha)], \tag{14}$$

であることからわかる． □

2.3 協力ゲーム（その３）

１個の関門クリア問題があり，N に属するプレイヤーが協力してアクションすると仮定する．ここでは，(13) によって定義される協力ゲーム (N, v^i) をくじによって選びそれを行う，とすると，協力ゲーム $(N, v^i), i \in N$ に確率 $q_i, i \in N$ で直面すると考えることになる．ここに，$q_1 + \cdots + q_n = 1, q_i > 0, \forall i \in N,$ である．特性関数を

$$v^q(S) \equiv \sum_{j \in N} q_j v^j(S), \quad \forall S \subseteq N, \tag{15}$$

と定義する．任意の $S \subseteq N$ に対し $q(S) \equiv \sum_{i \in S} q_i$ とおくと，定義からすぐに

補題 4.

$$v^q(S) = q(S) w(S), \quad \forall S \subseteq N. \tag{16}$$

Proof.

$$v^q(S) = \sum_{j \in S} q_j v^j(S) = w(S) \sum_{j \in S} q_j = q(S) w(S). \tag{17}$$

□

関数 $q : 2^N \to \mathbb{R}_+$ は加法的であるから，補題 3 と補題 4 から命題 4 を得る．

命題 4. 協力ゲーム (N, v^q) は優加法的である．また，(N, v^q) は全平衡ゲームである．

協力ゲーム (N, v^q) の解としてシャープレイ値を考えると，各プレイヤー $i \in N$ の期待利得は，シャープレイ値の線形性と命題 3 によって

$$\varphi_i(N, v^q) = \sum_{j \in N} q_j \varphi_i(N, v^j) < \varphi_i(N, v^i) \tag{18}$$

である．

3　例：プレイヤーが二つの型に分かれる場合

プレイヤーが二つの型に分かれる場合には特性関数も簡単になり解を検討するのが容易になる．本節では，協力ゲーム (N, v^*) に対してコアとシャープレイ値がどのようになるかを検討する．プレイヤーの集合を $N = \{1, \ldots, n\} = N_1 \cup N_2$，ここに $N_1 = \{1, \ldots, a\}$ および $N_2 = \{a+1, \ldots, a+b\}$ とする．$|N_1| = a, |N_2| = b, a+b = n, a \geq 2, b \geq 2,$ である．関門の集合は $M = \{1, \ldots, m\}$ である．

$$p_j^1 = \cdots = p_j^a > p_j^{a+1} = \cdots p_j^{a+b}, \forall j \in M \tag{19}$$

を仮定する．$w(1) = \cdots = w(a) > w(a+1) = \cdots = w(a+b)$ であるから,

$$v^*(1) = \cdots = v^*(a) > v^*(a+1) = \cdots = v^*(a+b) \tag{20}$$

さらに

$$v^*(S) = \begin{cases} |S|v^*(1), & \text{if } S \cap N_1 \neq \emptyset; \\ |S|v^*(a+1), & \text{if } S \subseteq N_2; \end{cases} \tag{21}$$

であることがわかる．このゲームにおいてコアに属する配分では”弱い”プレイヤーのみが利益を得ることを次の命題 5 は述べている．

命題 5.

$$\mathcal{C}(N, v^*) = \{(v^*(1), \ldots, v^*(1))\}. \tag{22}$$

Proof. $x \in \mathcal{C}(N, v^*)$ とすると，各 $i \in N_1$ に対して

$$x_i \geq v^*(i) = v^*(1) \text{ and } x(\{i\} \cup N_2) \geq v^*(\{i\} \cup N_2) = (b+1)v^*(1) \tag{23}$$

である．これと，$\{i\} \cup N_2 = N \setminus (N_1 \setminus \{i\})$ とから,

$$v^*(N) - x(N_1 \setminus \{i\}) \geq v^*(\{i\} \cup N_2) = (b+1)v^*(1) \tag{24}$$

である．よって，$x(N_1 \setminus \{i\}) \leq (a-1)v^*(1)$．$x \in \mathcal{C}(N, v^*)$ であるから, $x(N_1 \setminus \{i\}) \geq (a-1)v^*(1)$. ゆえに，$x(N_1 \setminus \{i\}) = (a-1)v^*(1)$. これと (23) とから，全ての $i \in N_1$ に対し $x_i = v^*(1)$ であることがわかる．

次に，$i \in N_2$ に対し $x(N_1 \cup \{i\}) \geq (a+1)v^*(1)$ であるから，$v(N) - x(N_2 \setminus \{i\}) \geq (a+1)v^*(1)$ であることがわかる．これより $x(N_2 \setminus \{i\}) \leq (b-1)v^*(1)$. $x(N_2) = v^*(N) - x(N_1) = bv^*(1)$ であるから, $x(N_2 \setminus \{i\}) = x(N_2) - x_i = bv^*(1) - x_i$. ゆえに $bv^*(1) - x_i \leq (b-1)v^*(1)$. これより，すべての $i \in N_2$ に対して $x_i \geq v^*(1)$. ゆえにすべての $i \in N_2$ に対して $x_i = v^*(1)$ である．□

さて，シャープレイ値と同様に単一の分配を与える協力ゲームの解として仁（[5]）がある．定義は省略するが，仁はコアに属することが知られている．命題5から，

系 1. 協力ゲーム (N, v^*) の仁は $\{(v^*(1), \ldots, v^*(1))\}$ である．

命題 6. 協力ゲーム (N, v^*) のシャープレイ値 $\varphi(N, v^*)$ は

$$\varphi_i(N, v^*) = \begin{cases} v^*(1) + \frac{b}{a(a+1)}[v^*(1) - v^*(a+1)], & i \in N_1; \\ v^*(1) - \frac{1}{a+1}[v^*(1) - v^*(a+1)], & i \in N_2. \end{cases} \tag{25}$$

Proof. $i \in N_1$ に対し，

$$v^*(S) - v^*(S \setminus \{i\}) = \begin{cases} v^*(1), & \text{if } (S \setminus \{i\}) \cap N_1 \neq \emptyset; \\ v^*(1) + (|S| - 1)(v^*(1) - v^*(a+1)), & \text{if } S \setminus \{i\} \subseteq N_2, \end{cases} \tag{26}$$

であるから，すべての $i \in N_1$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi_i(N, v^*) &= v^*(1) + (v^*(1) - v^*(a+1)) \sum_{i \in S, S \setminus \{i\} \subseteq N_2} (|S| - 1) \frac{(n - |S|)!(|S| - 1)!}{n!} \\ &= v^*(1) + (v^*(1) - v^*(a+1)) \sum_{T \subseteq N_2} |T| \frac{(n - |T| - 1)!|T|!}{n!} \\ &= v^*(1) + (v^*(1) - v^*(a+1)) \sum_{t=1}^{b} \binom{b}{t} \frac{(n - t - 1)!t!t}{n!} \\ &= v^*(1) + (v^*(1) - v^*(a+1)) \frac{b}{a(a+1)} \end{aligned} \tag{27}$$

$i \in N_2$ に対して，

$$v^*(S) - v^*(S \setminus \{i\}) = \begin{cases} v^*(1) = v^*(a+1) + v^*(1) - v^*(a+1), & \text{if } S \cap N_1 \neq \emptyset; \\ v^*(a+1), & \text{if } S \subseteq N_2. \end{cases} \tag{28}$$

これより，すべての $i \in N_2$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi_i(N, v^*) &= v^*(a+1) + (v^*(1) - v^*(a+1)) \sum_{i \in S, S \cap N_1 \neq \emptyset} \frac{(n - |S|)!(|S| - 1)!}{n!} \\ &= v^*(a+1) + (v^*(1) - v^*(a+1)) \{1 - \sum_{i \in S \subseteq N_2} \frac{(n - |S|)!(|S| - 1)!}{n!}\} \\ &= v^*(a+1) + (v^*(1) - v^*(a+1))(1 - \frac{1}{a+1}) \\ &= v^*(1) - (v^*(1) - v^*(a+1)) \frac{1}{a+1} \end{aligned} \tag{29}$$

□

4 おわりに

1. プレイヤーが各関門にチャレンジするとき段取り費用が生じ，それがチャレンジする順序に依存するならば，ネットワーク上の順序付け問題と協力ゲームとしてモデル化される．
2. プレイヤーが関門にチャレンジするときの成功確率が不確実である場合，モデル化にどのように接近するかは今後の検討課題でる．
3. 本稿で定義した協力ゲームのコアは空集合でない．シャープレイ値がコアに属するかどうかは今後の検討課題である．
4. 下記，参考文献において [5],[6],[7] と [8] は協力ゲームの解を定義，あるいは分析したものである．[2], [3] および [4] は最適化問題と協力ゲームを扱っている．この方面の最近の文献がゲーム理論やオペレーションズ・リサーチ関連の雑誌に多数見受けられるのでそちらを参照されたい．

参考文献

[1] 坂口実：動的計画法，至文堂（1970）

[2] I. Curiel, G. Pederzoli and S. Tijs：Sequencing games,（1989）*European Journal of Operational Research* 40, 344-351.

[3] I. Curiel：*Cooperative game theory and applications*,（1997）Kluwer Academic Publishers.

[4] P.Borm, H.Hamers and R.Hendrickx：Operations research games: a survey,（2001）*TOP* 9, 139-199.

[5] D.Schmeidler : The nucleolus of characteristic function game, (1969) *SIAM Journal of Applied Mathemarics*, 17, 1163-1170.

[6] L.S.Shapley : A value for n-person games, (1953) *Annals of Mathematics Studies*,28, 307-318.

[7] L.S.Shapley : On balanced sets and cores, (1967) *Naval Research Logistics Quarterly*, 14, 453-460.

[8] L.S.Shapley : Cores of convex games, (1971) *International Journal of Game Theory*, 1, 11-26.