集合の無限級数

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概要

本稿では、集合の無限級数を考察し、いくつかの性質を導く。

1　はじめに

Kurano et al. [3] において、割引総利得最大化問題として定式化された利得がコンパクト凸集合値である無限期間マルコフ決定過程が考察されている。そこでは、割引総利得はコンパクト凸集合列の Pompeiu-Hausdorff 収束する極限として定義されている。また、Hosaka et al. [1] において、平均利得最大化問題として定式化された利得がコンパクト凸集合値である無限期間マルコフ決定過程が考察されている。

本稿では、集合の無限級数を集合列の Pompeiu-Hausdorff 収束する極限とは異なる定義をし、いくつかの性質を導く。さらに、ある条件の下では、我々の集合の無限級数の定義と Pompeiu-Hausdorff 収束する極限として定義された集合の無限級数とは同値になることが導かれる。

2　集合の演算と順序

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ および $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ とする。また、$\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ および $\mathbb{R}^n_- = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}\}$ とする。集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathrm{int}(S)$ および $\mathrm{cl}(S)$ をそれぞれ S の内部および閉包とする。さらに、$\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ 上のユークリッドノルムとする。

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合すべての集合とし、$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ の空でないコンパクト部分集合すべての集合とする。各 $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ および $\mu \in \mathbb{R}$ に対して

$$A + B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B\} \tag{2.1}$$

$$\mu A = \{\mu \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in A\} \tag{2.2}$$

と定義する。各 $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$A \leq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A + \mathbb{R}^n_+, A \subset B + \mathbb{R}^n_- \tag{2.3}$$

$$A < B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A + \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+), A \subset B + \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_-) \tag{2.4}$$

と定義する。このとき、$\leq$ は $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 上の擬順序（反射的, 推移的）になり、$<$ は $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ 上の狭義半順序（非反射的, 推移的）になる。$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ 上の狭義半順序 $<$ の非反射性は [2, 定理 6.6] 参照。

3 集合列の極限

$\mathbb{N}$ をすべての自然数の集合とし

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\infty &= \{N \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus N \text{ finite}\}\\ &= \{ \text{ subsequences of } \mathbb{N} \text{ containing all } k \text{ beyond some } k_0 \ \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^\sharp_\infty &= \{N \subset \mathbb{N} : N \text{ infinite}\}\\ &= \{ \text{ all subsequences of } \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

とする。列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列はある $N \in \mathcal{N}^\sharp_\infty$ に対して $\{x_k\}_{k\in N}$ の形で表される。$\mathbb{N}$ における $k \to \infty$ のとき $\lim_k, \lim_{k\to\infty}$ または $\lim_{k\in\mathbb{N}}$ と書くが、添字集合 $N \in \mathcal{N}^\sharp_\infty$ または $N \in \mathcal{N}_\infty$ に対しての場合は $\lim_{k\in N}$ または $\lim_{k \underset{N}{\to} \infty}$ と書く。

定義 3.1（[4, Definition 4.1]）$\mathbb{R}^n$ の部分集合の列 $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対して、その下極限を集合

$$\liminf_{k\to\infty} C_k = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathcal{N}_\infty, \exists \boldsymbol{x}_k \in C_k (k \in N) \text{ with } \boldsymbol{x}_k \underset{N}{\to} \boldsymbol{x} \right\}$$

と定義し、その上極限を集合

$$\limsup_{k\to\infty} C_k = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathcal{N}^\sharp_\infty, \exists \boldsymbol{x}_k \in C_k (k \in N) \text{ with } \boldsymbol{x}_k \underset{N}{\to} \boldsymbol{x} \right\}$$

と定義する。$\liminf_{k\to\infty} C_k = \limsup_{k\to\infty} C_k$ のとき、$\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の極限が存在するといい

$$\lim_{k\to\infty} C_k = \limsup_{k\to\infty} C_k = \liminf_{k\to\infty} C_k$$

と定義する。

定義 3.1 の意味で $\lim_k C_k$ が存在してそれが C のとき、列 $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は C に **Painlevé-Kuratowski 収束する**といい

$$C_k \to C$$

と書く。

点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ の距離は

$$d_C(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{y}\in C} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

によって定義され $d(\boldsymbol{x}, C)$ とも書く。$C = \emptyset$ に対しては $d_C(\boldsymbol{x}) = \infty$ とする。

空でない閉集合 $C, D \subset \mathbb{R}^n$ に対して C と D の間の **Pompeiu-Hausdorff 距離**は次のように定義される。

$$\boldsymbol{d}_\infty(C, D) = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} |d_C(\boldsymbol{x}) - d_D(\boldsymbol{x})|$$

ここで、上限は $C \cup D$ 上で考えても等しくなり、次式と等価になる。

$$\boldsymbol{d}_\infty(C, D) = \inf\{\eta \geq 0 : C \subset D + \eta\mathbb{B}, D \subset C + \eta\mathbb{B}\}$$

ここで、$\mathbb{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$ である。

$\mathbb{R}^n$ の集合列 $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ に **Pompeiu-Hausdorff 収束する**とは $\boldsymbol{d}_\infty(C_k, C) \to 0$ のときをいう。ただし、C_k, C は空でない閉集合とする。

ある有界集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ に対して $C_k, C \subset X$ となるときは、$\{C_k\}$ が C に Pompeiu-Hausdorff 収束することと $\{C_k\}$ が C に Painlevé-Kuratowski 収束することは同値になる。ただし、C_k, C は空でない閉集合とする。しかし、この有界性の制限がないときは Pompeiu-Hausdorff 収束と Painlevé-Kuratowski 収束は同値にならない。実際、$C_k \to C, \boldsymbol{d}_\infty(C_k, C) \equiv \infty$ となる場合がある。C_k, C がコンパクト集合のときでさえ $C_k \to C, \boldsymbol{d}_\infty(C_k, C) \to \infty$ となる場合がある。

4　集合のスカラー化

各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) : \max_{\boldsymbol{x}\in A}\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}\rangle \text{ と } \min_{\boldsymbol{x}\in A}\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}\rangle \text{ が存在 } \right\} \tag{4.1}$$

とする。ここで、$\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}\rangle$ は $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{x}$ の標準内積である。このとき、任意の $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して、$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n)$ である。

各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ および $\lambda \in [0,1]$ に対して、**スカラー化関数** $\psi_{\boldsymbol{k},\lambda} : \mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ を各 $A \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(A) = \lambda \max_{\boldsymbol{x} \in A} \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x} \rangle + (1-\lambda) \min_{\boldsymbol{x} \in A} \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x} \rangle \tag{4.2}$$

と定義する。

命題 4.1 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ とし、$\lambda \in [0,1]$ とする。また、$A, B \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき、次が成り立つ。

$$A \leq B \Rightarrow \psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(A) \leq \psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(B) \tag{4.3}$$

$$A < B \Rightarrow \psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(A) < \psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(B) \tag{4.4}$$

5 集合の無限級数

$\{S_t\}_{t \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ とする。任意の $\boldsymbol{x}_t \in S_t, t \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{t=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_t = \lim_{m \to \infty} \sum_{t=1}^{m} \boldsymbol{x}_t$$

が収束するとき、$\{S_t\}$ は**収束仮定**をみたすといい

$$\sum_{t=1}^{\infty} S_t = \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_t : \boldsymbol{x}_t \in S_t, t \in \mathbb{N} \right\} \tag{5.1}$$

と定義する。また

$$\sum_{t=1}^{\infty} |S_t| < \infty \tag{5.2}$$

であるとき、$\{S_t\}$ は**絶対収束仮定**をみたすという。ここで、$S \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ に対して

$$|S| = \sup_{\boldsymbol{x} \in S} \|\boldsymbol{x}\| \tag{5.3}$$

である。$\{S_t\}$ が絶対収束仮定をみなすならば、$\{S_t\}$ は収束仮定をみたす。しかし、逆は一般に成り立たない。例えば、$\bigcup_{t=1}^{\infty} S_t$ が有界ならば、任意の $\gamma \in [0,1[$ に対して $\{\gamma^{t-1} S_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ は絶対収束仮定をみたす。

命題 5.1 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ とする。$\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n)$ は収束仮定をみたすとする。このとき、次が成り立つ。

$$\sum_{t=1}^{\infty} S_t = \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_t : \boldsymbol{x}_t \in S_t, t \in \mathbb{N} \right\} \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n) \tag{5.4}$$

命題 5.2 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ とする。$\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n)$ は収束仮定をみたすとする。また、$\lambda \in [0,1]$ とする。このとき、次が成り立つ。

$$\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}\left(\sum_{t=1}^{\infty} S_t\right) = \sum_{t=1}^{\infty} \psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(S_t) \tag{5.5}$$

命題 5.3 $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}}, \{T_t\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ は収束仮定をみたすとする。また、$\beta \in \mathbb{R}$ とする。

(i) $\{S_t + T_t\}$ は収束仮定をみたし、次が成り立つ。

$$\sum_{t=1}^{\infty} (S_t + T_t) = \sum_{t=1}^{\infty} S_t + \sum_{t=1}^{\infty} T_t$$

(ii) $\{\beta S_t\}$ は収束仮定をみたし、次が成り立つ。

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta S_t = \beta \sum_{t=1}^{\infty} S_t$$

(iii) 次が成り立つ。

$$S_t \leq T_t, t \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{t=1}^{\infty} S_t \leq \sum_{t=1}^{\infty} T_t$$

(iv) 次が成り立つ。

$$\left.\begin{array}{l} S_t \leq T_t, t \in \mathbb{N} \\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } S_m < T_m \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{t=1}^{\infty} S_t < \sum_{t=1}^{\infty} T_t$$

命題 5.4 $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ は収束仮定をみたすとする。このとき、次が成り立つ。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } S_t \subset \mathbb{B}_\varepsilon, \forall t \geq t_0$$

ここで、$\mathbb{B}_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| < \varepsilon\}$ である。

命題 5.5 $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ は絶対収束仮定をみたすとする。このとき、次が成り立つ。

$$\forall\varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \sum_{t=m}^{\infty} S_t \subset \mathbb{B}_\varepsilon, \forall m \geq m_0$$

ここで、$\mathbb{B}_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| < \varepsilon\}$ である。

命題 5.6 $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ は収束仮定をみたすとする。このとき、$\{\mathrm{cl}(S_t)\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ も収束仮定をみたす。

命題 5.7 $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$ は収束仮定をみたし、$S_t, t \in \mathbb{N}$ は有界であるとする。このとき、$\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} S_t$ は空でない有界集合になる。

命題 5.8 $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ は絶対収束仮定をみたすとする。このとき、$\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} S_t \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ となる。

命題 5.9 $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ は絶対収束仮定をみたすとする。このとき、次が成り立つ。

$$\sum_{t=1}^{\infty} S_t = \lim_{m\to\infty} \sum_{t=1}^{m} S_t$$

ここで、右辺の極限は Painlevé-Kuratowski 収束を意味する。

命題 5.10 $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ は絶対収束仮定をみたすとする。このとき、$\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} S_t$ は $\displaystyle\left\{\sum_{t=1}^{m} S_t\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ の Painlevé-Kuratowski 収束する極限かつ Pompeiu-Hausdorff 収束する極限になる。

6 結論

本稿では、集合の無限級数を考察し、いくつかの性質を導いた。導かれたいくつかの性質は、割引総利得最大化問題として定式化された利得がコンパクト集合値（凸性は仮定しない）である無限期間動的計画（マルコフ決定過程）の議論などで必要かつ重要になることが期待される。

参考文献

[1] M. Hosaka, J. Nakagami and M. Kurano, Controlled Markov set-chains with set-valued rewards—the average case, International Transactions in Operational Research, Vol.9, 2002, 113–123

[2] 金正道, ファジィ集合最適化, 弘前大学出版会, 2019

[3] M. Kurano, J. Nakagami and M. Horiguchi, Controlled Markov Set-chains with Set-valued Rewards, In: W. Takahashi and T. Tanaka (Eds.), The Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, World Scientific, 1999, pp. 205–212

[4] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, Variational analysis, Springer-Verlag, New York, 1998

.