On two-person uncertain multi-objective game
（ロバスト多目的 2 人ゲームについて）

秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University
弘前大学　大学院　理工学研究科
Graduate school of Science and Technology, Hirosaki University

荒谷　洋輔 (ARAYA, Yousuke) *　金　正道（KON, Masamichi）†
木村　寛（KIMURA, Yutaka）‡

1　はじめに

ゲーム理論は Neumann-Morgenstern [17] および Nash [15, 16] によって創始されて以来、経済学, 経営学やオペレーションズ・リサーチなどの意思決定の分野で重要な役割を果たしてきた。ゲーム理論を現実の問題に適用しようとするとき、利得の値を正確に知ることが困難である状況によく直面する。しかし、利得の正確な値を知ることは困難かもしれないが、利得の値を近似的にまたはある程度の不確実性を伴って知ることはできる。そのような状況のいくつかのモデル化が提案されている [7]。

2014 年に Ide et al.[8] の研究から、多目的ロバスト最適化問題は集合最適化問題の応用として変換できることが判明した。実社会では、旅行のスケジューリングなどの最短経路を探すことと経費削減を両方達成したいなどの複数目的を最適化する例は多い。さらに、最短経路問題では、交通渋滞・悪天候などの「不確実性」が存在する。それらを共に考慮するために多目的ロバスト最適化問題を考える必要があり、その理論解析に集合最適化問題は不可欠である。

ゲーム理論における Minimax 定理やそれから派生する定理に関する研究は様々なものがあるが、本稿では「(a) ロバスト性の導入」と「(b) 多目的への拡張」という課題に着目する。実用上の最適化問題は多目的であることが多い。上記の課題 (a)(b) の先行研究は多数存在するが、以下の問題点がある。

* (E-mail:　**y-araya@akita-pu.ac.jp**)
† (E-mail:　**masakon@hirosaki-u.ac.jp**)
‡ (E-mail:　**yutaka@akita-pu.ac.jp**)

(問題点-a) 先行研究はいずれも単目的のロバスト最適化についてである。

(問題点-b) 多目的の Minimax 定理について、未だに決定版が存在しない。

問題点の詳細については、講究録 [1] を参照のこと。

多目的の Minimax 定理と区間値の Minimax 定理を含む拡張定理は既存の枠組みでは解決不可能であり、新たな枠組(集合最適化問題)が必要となのでは？という問から本稿の着想が始まっている。本稿では、多目的の Minimax 定理を集合最適化問題を導入して議論する妥当性について、区間値の具体例と集合値写像に関する性質から検証する。

2 集合順序関係

本節では、集合順序関係に関するいくつかの定義や記号を準備する。$\mathbb{R}^\ell$ を ℓ 次元ユークリッド空間とし、$\mathbb{R}^\ell_+$ を $\mathbb{R}^\ell$ の非負象限とする。行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times l}$ に対して、記号 A^T は A の転置を表す。集合 $A \subset \mathbb{R}^\ell$ に対して、$\mathrm{cl}(A)$ は A の閉包、$\mathrm{int}(A)$ は A の内部、$\mathrm{conv}(A)$ は A の凸包を表す。$\mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ を $\mathbb{R}^\ell$ の空でない部分集合全ての集合とする。$A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ および $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$A + B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B\}, \qquad \lambda A = \{\lambda \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in A\}$$

と定義する。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^\ell$ に対して、ベクトル順序と呼ばれるものを以下で定義する。

$$\boldsymbol{a} \leq_{\mathbb{R}^\ell_+} \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^\ell_+ \qquad\qquad \boldsymbol{a} \leq_{\mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)} \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)$$

順序錐 $\mathbb{R}^\ell_+$ は $\mathbb{R}^\ell_+ \cap (-\mathbb{R}^\ell_+) = \{0\}$ が成り立つため、$\leq_{\mathbb{R}^\ell_+}$ は反射性、推移性、反対称性を満たす。

定義 2.1 (極大元). 点 $\bar{z} \in A \subseteq \mathbb{R}^\ell$ が $\leq_{\mathbb{R}^\ell_+}$ に関して**極大**であるとは、以下を満たすときである。

$$z \in A, \quad \bar{z} \leq_{\mathbb{R}^\ell_+} z \quad \Longrightarrow \quad z = \bar{z}$$

A の極大元の集合を $\mathrm{Max}A$ とかく。$\mathrm{Min}A$ も同様に定義される。

定義 2.2. $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ に対して、以下の集合順序関係を定義する。

$$A \preceq_L B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A + \mathbb{R}^\ell_+$$

$$A \preceq_U B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset B - \mathbb{R}^\ell_+$$

$$A \preceq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \preceq_L B \text{ and } A \preceq_U B \qquad \text{(KNY set order relation)}$$

$$A \prec_L B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{cl}(B) \subset \mathrm{cl}(A) + \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)$$

$$A \prec_U B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(B) - \mathrm{int}(\mathbb{R}^\ell_+)$$

$$A \prec B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \prec_L B \text{ and } A \prec_U B$$

$$A \precneqq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (A \prec_L B \text{ and } A \preceq_U B) \text{ or } (A \preceq_L B \text{ and } A \prec_U B)$$

定義 2.2 において、以下に注意する。

$$A \precneqq B \not\Leftrightarrow A \preceq B, A \neq B$$

二項関係 $\preceq_L$, $\preceq_U$ および $\preceq$ は反射的かつ推移的になるが、反対称的ではない。実際、一般には、$A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$A \preceq_L B \text{ and } B \preceq_L A \Leftrightarrow A + \mathbb{R}^n_+ = B + \mathbb{R}^n_+$$
$$A \preceq_U B \text{ and } B \preceq_U A \Leftrightarrow A - \mathbb{R}^n_+ = B - \mathbb{R}^n_+$$

となる。よって、$\preceq_L$, $\preceq_U$ および $\preceq$ は $\mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ 上の擬順序になる。一方、二項関係 $\prec_L$, $\prec_U$, $\prec$ は推移的になる。$\precneqq$ は、すべての閉集合の集合上の二項関係とすると推移的になるが、$\mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ 上の二項関係とすると推移的にならない。

集合順序関係 $\preceq$ および $\prec$ は Young [20]、Nishnianidze[18] によって導入され、黒岩-田中-Ha[13] において、$\preceq_L, \preceq_U, \prec_L$ および $\prec_U$ が集合最適化問題に対して用いられた。したがって、集合順序関係 $\preceq$ はしばしば KNY 集合順序関係と呼ばれる [10]。さらには、Maeda [14] によって集合利得をもつ双行列ゲームに対して用いられた。$A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ に対して、同値関係を導入し、

$$A \simeq_L B \iff A \preceq_L B \quad \text{and} \quad B \preceq_L A$$
$$A \simeq_U B \iff A \preceq_U B \quad \text{and} \quad B \preceq_U A$$
$$A \simeq B \iff A \preceq B \quad \text{and} \quad B \preceq A$$

それぞれ、$[\cdot]^{\preceq_L}$、$[\cdot]^{\preceq_U}$、$[\cdot]^{\preceq}$ で表される同値類の集合を生成できる。

$$A \in [B]^{\preceq_L} \iff A + \mathbb{R}^\ell_+ = B + \mathbb{R}^\ell_+$$
$$A \in [B]^{\preceq_U} \iff A - \mathbb{R}^\ell_+ = B - \mathbb{R}^\ell_+$$
$$A \in [B]^{\preceq} \iff A + \mathbb{R}^\ell_+ = B + \mathbb{R}^\ell_+ \quad \text{and} \quad A - \mathbb{R}^\ell_+ = B - \mathbb{R}^\ell_+$$

次に集合順序関係におけるいくつかの極大元を導入する。これらは、多目的最適化における極大元（定義 2.1）の自然な拡張である。

定義 2.3 ([14]). $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ とし、$A \in \mathcal{A}$ とする。

(i) A が集合順序関係 $\preceq$ に関する $\mathcal{A}$ の**極大元 (maximal element)** であるとは

$$A' \in \mathcal{A}, A \preceq A' \Rightarrow A' \preceq A$$

となるときをいう。

(ii) A が集合順序関係 $\precneqq$ に関する $\mathcal{A}$ の**極大元 (maximal element)** であるとは

$$\nexists \overline{A} \in \mathcal{A} \text{ s.t. } A \precneqq \overline{A}$$

であるときをいう。

(iii) A が集合順序関係 $\prec$ に関する $\mathcal{A}$ の**極大元 (maximal element)** であるとは

$$\nexists \overline{A} \in \mathcal{A} \text{ s.t. } A \prec \overline{A}$$

であるときをいう。

記号 $\mathrm{Max}(\mathcal{A}; \preceq)$、$\mathrm{Max}(\mathcal{A}; \precneqq)$、$\mathrm{Max}(\mathcal{A}; \prec)$ は、それぞれ集合順序関係 $\preceq$、$\precneqq$、$\prec$ に関して、$\mathcal{A}$ のすべての極大元の集合を表す。

同様にして極小限も定義することが出来る。記号 $\mathrm{Min}(\mathcal{A}; \preceq)$、$\mathrm{Min}(\mathcal{A}; \precneqq)$、$\mathrm{Min}(\mathcal{A}; \prec)$ は、それぞれ集合順序関係 $\preceq$、$\precneqq$、$\prec$ に関して、$\mathcal{A}$ のすべての極小元の集合を表す。

3 ロバスト多目的 2 人ゲームの定式化に向けて

- I, J: 2 人のプレーヤー
- $M := \{1, 2, \cdots, m\}$ and $N := \{1, 2, \cdots, n\}$ ：プレイヤー I および J の純粋戦略の集合。
- S_I, S_J ：プレイヤー I と J が利用できるすべての混合戦略の集合。

$$S_I := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m_+ \mid x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, m,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

$$S_J := \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid y_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}$$

$S_I \times S_J$ は凸集合である。

定理 3.1 ([17]). 行列ゲーム A に対して、次が成り立つ。

$$\mathop{\mathrm{Max}}_{x \in M} \mathop{\mathrm{Min}}_{y \in N} \boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}^T \leq \mathop{\mathrm{Min}}_{y \in N} \mathop{\mathrm{Max}}_{x \in M} \boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}^T$$

定理 3.2 ([17]). 行列ゲーム A に対して、次が成り立つ。

$$\mathop{\mathrm{Max}}_{x \in S_I} \mathop{\mathrm{Min}}_{y \in S_J} \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{y}^{*T} = \mathop{\mathrm{Min}}_{y \in S_J} \mathop{\mathrm{Max}}_{x \in S_I} \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{y}^{*T}$$

$$\iff \boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}^{*T} \leq \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{y}^{*T} \leq \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{y}^T$$

定理 3.3 (**Neuman's minimax theorem**[17]). 行列ゲーム A に対して、次が成り立つ。

$$\mathop{\mathrm{Max}}_{x \in S_I} \mathop{\mathrm{Min}}_{y \in S_J} \boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}^T = \mathop{\mathrm{Min}}_{y \in S_J} \mathop{\mathrm{Max}}_{x \in S_I} \boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}^T$$

上記の定理は良く知られている実数値の結果である。本稿では、まず 3.1 節でロバスト多目的最適化問題を導入する。3.2 節では区間値の例を考察する。3.3 節では集合値写像への拡張を試みる。そして、その性質を調査する。

3.1 ロバスト多目的最適化問題

多目的最適化問題への頑健性 (robustness) の導入を検討する。不確実な多目的最適化問題を定義するため、私たちは [4, 5] の考え方を採用する。問題定式化における不確実性は、既知の不確実性集合 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ からのシナリオとして与えられると仮定する。また、 $f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$、すなわち $\mathcal{U}$ 内のシナリオが f の値に影響を与えることを仮定する。さらに、実現可能集合 $\mathcal{X}$ は不確実性によるものではなく、異なるシナリオにおいても不変であると仮定する。

定義 3.4 (ロバスト多目的最適化問題 [6, 8, 9]). $\mathcal{X}$ を決定空間、$\mathcal{U}$ を状況集合（不確実集合とも呼ばれる)、$f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ をパラメータ付きベクトル値の目的関数とする。不確実性を考慮したロバスト多目的最適化を以下のように定式化する。

$$\mathrm{P}(\mathcal{U}) \begin{cases} \text{minimize} \quad f(x, \xi) \\ \text{subject to} \quad x \in \mathcal{X}, \xi \in \mathcal{U} \end{cases}$$

ここで、minimize とは定義 2.1 の意味である。$f_{\mathcal{U}}(x) := \{f(x, \xi) | \xi \in \mathcal{U}\}$ を全てのシナリオの元での全ての実現可能な目的値の集合とする。

定義 3.5 ([9]). 不確実な多目的最適化問題 $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ に対し、実現可能な解 $\bar{x} \in \mathcal{X}$ は、$x' \in \mathcal{X} \setminus \{\bar{x}\}$ で以下を満たすものが存在しない場合、alternative set less ordered efficient と呼ばれる。

$$f_{\mathcal{U}}(x') \subseteq f_{\mathcal{U}}(\bar{x}) - \mathbb{R}^k_+ \qquad \text{or} \qquad f_{\mathcal{U}}(\bar{x}) \subseteq f_{\mathcal{U}}(x') + \mathbb{R}^k_+$$

上記は集合順序関係の極小元と解釈できる。また、ロバスト多目的最適化の文脈では与えられた解の最良ケースと最悪ケースを最適化すると [9] で説明されている。

3.2 区間値の例

定義 3.6 (区間値行列ゲーム). 行列ゲームにおける行列の各成分が区間であるものを**区間値行列ゲーム**と定義する。

区間値行列ゲームに対して、プレイヤー I は集合順序関係 $\preceq$（あるいは $\preceq_L$、$\preceq_U$）に関して最大化したいとして、プレイヤー J は $\preceq$（あるいは $\preceq_L$、$\preceq_U$）に関して最小化したいと仮定する。

定義 3.7 (区間値行列ゲームの均衡点). $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in S_I \times S_J$ が**区間値行列ゲームの均衡点**であるとは、以下の式を満たすものである。

$$\operatorname*{Max}_{x \in S_I} \operatorname*{Min}_{y \in S_J} \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{y}^{*T} = \operatorname*{Min}_{y \in S_J} \operatorname*{Max}_{x \in S_I} \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{y}^{*T}$$

ここで、「=」とは集合順序関係の意味で等しい（$\preceq_L$ は区間の下端が共に等しい、$\preceq_U$ は区間の上端が共に等しい、$\preceq$ は区間の上端・下端それぞれが共に等しい）ということである。$\{(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*), \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{y}^{*T}\}$ は**区間値行列ゲームの解**と呼ばれる。

Player I \ Player J	y_1	y_2
x_1	$\{7\}$	$[4,6]$
x_2	$[8,9]$	$[5,8]$

表 1　Game 1

例 1. 区間値行列ゲームに対して、次のことが分かる。

$$u_I(1,2) \preceq u_I(1,1), \quad u_I(1,2) \preceq u_I(2,2), \quad u_I(1,1) \preceq u_I(2,1), \quad u_I(2,2) \preceq u_I(2,1)$$

したがって、$\{(x_2,y_2),(5,8)\}$ がゲーム 1 の $\preceq$ 型解となるような純粋戦略 (x_2,y_2) のペアが 1 つ存在する。

Player I \ Player J	y_1	y_2
x_1	$[1,7]$	$[4,6]$
x_2	$[2,4]$	$[5,8]$

表 2　Game 2

例 2. 区間値行列ゲームに対して、次のことが分かる。

$$u_I(1,1) \preceq_L u_I(1,2), \quad u_I(1,1) \preceq_L u_I(2,1), \quad u_I(2,1) \preceq_L u_I(2,2), \quad u_I(1,2) \preceq_L u_I(2,2)$$

$\therefore \{(x_2,y_1),(2,4)\}$ はゲーム 2 の L 型解である。

$(x,1-x) \in S_I$ と $(y,1-y) \in S_J$ を任意の戦略とする。すると、F は次のように計算できる。

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \big(-x-3y+5, x(5y-2)-4y+8\big)$$

したがって、混合戦略は 1 つあり、$\big((\frac{4}{5},\frac{1}{5}),(\frac{2}{5},\frac{3}{5})\big)$ であり、$\Big\{\big((\frac{4}{5},\frac{1}{5}),(\frac{2}{5},\frac{3}{5})\big),\big(3,\frac{32}{5}\big)\Big\}$ はゲーム 2 の U 型解である。

注意 1. 以上の 2 つの例はどちらも、2018 年に秋田県立大学を卒業した加藤志織さんの卒業論文が基となっている。上記の計算で U 型解が得られた訳だが、$\big(3,\frac{32}{5}\big)$ における「3」が何を意味するのかは、今後の研究課題である。

3.3　集合値写像の極大元・極小元に関する性質

次に、集合値写像の極大元・極小元に関する性質について考察する。集合順序関係 $\preceq$ は反射律・推移律を満たすので、定理 3.1 のアナロジーとして以下が得られる。尚、下記の定理は集合値写像に条件などが仮定されていないことに注意したい。

定理 3.8. $F : S_I \times S_J \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ を集合値写像とする。このとき、以下の性質が成り立つ。

$$\operatorname*{Max}_{x \in S_I}\big(\operatorname*{Min}_{y \in S_J}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq)\big) \preceq \operatorname*{Min}_{y \in S_J}\big(\operatorname*{Max}_{x \in S_I}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq)\big)$$

Proof. 極大元の定義により、すべての $\boldsymbol{y} \in S_J$ に対して、

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \preceq \operatorname*{Max}_{x \in S_I}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq)$$

が成り立つ。また、極小元の定義により、次が成り立つ。

$$\operatorname*{Min}_{y \in S_J}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq) \preceq \operatorname*{Min}_{y \in S_J}(\operatorname*{Max}_{x \in S_I}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq))$$

$M := \operatorname*{Min}_{y \in S_J}(\operatorname*{Max}_{x \in S_I}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq))$ と設定する。極大元の定義により、

$$\operatorname*{Max}_{x \in S_I}(\operatorname*{Min}_{y \in S_J}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq) \preceq \operatorname*{Max}_{x \in S_I} M = M$$

となり、結論が得られる。 □

次に、定理 3.2 の拡張を考える。以下の定義は [19] の自然な拡張である。L 型・U 型に限定した定義については、[3] も参照のこと。

定義 3.9. $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \in S_I \times S_J$、$F : S_I \times S_J \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ を集合値写像とする。$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ が F の極大鞍点であるとは、任意の $\boldsymbol{x} \in S_I$、$\boldsymbol{y} \in S_J$ に対して以下が成り立つときである。

$$F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \in \operatorname*{Max}_{x \in S_I}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*);\preceq) \cap \operatorname*{Min}_{y \in S_J}(F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y});\preceq)$$

定理 3.10. $F : S_I \times S_J \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ を集合値写像とする。このとき、次の命題が成り立つ。

$$F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \in \operatorname*{Max}_{x \in S_I}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*);\preceq) \cap \operatorname*{Min}_{y \in S_J}(F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y});\preceq)$$

$$\iff \operatorname*{Max}_{x^* \in S_I}\big(\operatorname*{Min}_{y^* \in S_J}(F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*);\preceq)\big) \in \Big[\operatorname*{Min}_{y^* \in S_J}\big(\operatorname*{Max}_{x^* \in S_I}(F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*);\preceq)\big)\Big]^{\preceq}$$

注意 2. 集合順序関係の同値類の定義から、単調性を満たすスカラー化関数 (つまり、$A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^\ell)$ とスカラー化関数 $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ が、$A \preceq B \Longrightarrow f(A) \leq f(B)$ を満たす）について、次が成り立つ。

$$A \in [B]^{\preceq} \quad \Longrightarrow \quad f(A) = f(B)$$

よって、定理 3.10 の最後の式は、集合値のマキシミン値とミニマックス値が単調性を満たすスカラー化関数でスカラー化すると等しいことを意味している。これは、実数値の均衡点の概念の自然な拡張となっている。

Proof. $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ を F の極大鞍点とすると、次が成り立つ。

(a) $\operatorname*{Min}_{y \in S_J}(\operatorname*{Max}_{x \in S_I}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq)) \preceq \operatorname*{Max}_{x \in S_I}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*);\preceq) \preceq F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$
(b) $F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \preceq \operatorname*{Min}_{y \in S_J}(F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y});\preceq) \preceq \operatorname*{Max}_{x \in S_I}(\operatorname*{Min}_{y \in S_J}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq))$

(a) と (b) を組み合わせると、次の式が成り立つ。

$$(\diamond)\quad \operatorname*{Min}_{y\in S_J}(\operatorname*{Max}_{x\in S_I}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq)) \preceq \operatorname*{Max}_{x\in S_I}(\operatorname*{Min}_{y\in S_J}(F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\preceq))$$

定理 3.8 と $(\diamond)$ を組み合わせると、結論が得られる。逆を示すために、$[\cdot]^{\preceq}$ の定義と定理 3.8 より、$(\diamond)$ が成立することが分かる。次に (a) と (b) が得られ、これは $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ が F の極大鞍点であることを示している。 □

4 まとめ

筆者は 3 節の考察から、Minimax 定理を多目的の場合に拡張する際に集合利得のゲームの導入が不可欠だと考えている。その理由の一つが、定理 3.8・3.10 である。実数値のゲーム理論で定理 3.1 や定理 3.2 があるが、ベクトル値の場合ではそれらのアナロジーとなる結果が消滅していた。筆者はその理由が川崎の指摘 [11, 12] にあると考えている。つまり、ベクトル値関数の極大元・極小元が集合になることが鍵となっている、と推察している。そこで、集合値写像で調べたところ、定理 3.8・3.10 において、実数値での関係性 (定理 3.1・3.2) が復活することが分かった。集合利得のゲームを導入するその他の理由として、講究録 [1] も参照して欲しい。

筆者は [2] を手掛かりに本稿 3 節の内容を全て含めた 2 人集合値ゲームを定式化して、現在その論文は査読中である。

参考文献

[1] 荒谷洋輔, 金正道, 木村寛, 集合利得の 2 人ゲームについて, 京都大学数理解析研究所講究録に掲載予定.

[2] Y. Araya, Y. Kimura, M. Kon, On non-cooperative n-person games with set payoffs, Journal of the Operations Research Society of Japan 67 (2024), 65–83.

[3] Y. Araya, *Existence theorems of cone saddle-points in set optimization applying nonlinear scalarizations*, Linear Nonlinear Anal. **6** (2020), 13–33.

[4] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *Robust convex optimization*, Math. Oper. Res. 23 (1998), no. 4, 769–805.

[5] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *Robust optimization –methodology and applications*, Math. Program. 92 (2002), no. 3, Ser. B, 453–480.

[6] M. Ehrgott, J. Ide, A. Schöbel, *Minmax robustness for multi-objective optimization problems*, European J. Oper. Res. 239 (2014), 17–31.

[7] J. Harsanyi, Games with incomplete information played by Bayesian players. Parts I, II, III, Management Science 14 (1967-68) 159–182, 320–334, 486–502.

[8] J. Ide, E. Köbis, D. Kuroiwa, A. Schöbel, C. Tammer, *The relationship between multi-objective robustness concepts and set-valued optimization*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:83, 20.

[9] J. Ide, A. Schöbel, *Robustness for uncertain multi-objective optimization: a survey and analysis of different concepts*, OR Spectrum **38** (2016), 235–271.

[10] J. Jahn, *Vector optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[11] H. Kawasaki, *A duality theorem in multiobjective nonlinear programming*, Math. Oper. Res. 7, (1982), no. 1, 95–110.

[12] H. Kawasaki, *Conjugate relations and weak subdifferentials of relations*, Math. Oper. Res. 6, (1981), no. 4, 593–607.

[13] D. Kuroiwa, T. Tanaka and T. X. D. Ha, On cone convexity of set-valued maps, Nonlinear Analysis 30 (1997), 1487–1496.

[14] T. Maeda, On Characterization of Nash Equilibrium Strategy in Bi-Matrix Games with Set Payoffs, in *Set Optimization and Applications – The State of the Art* (A. H. Hamel et al. Eds.) (Springer-Verlag Berline Heidelberg, 2015), pp.313–331.

[15] J. Nash, Equilibrium points in n-person games, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36 (1950) 48–49.

[16] J. Nash, Non-cooperative games, Annals of Mathematics. Second Series 54 (1951), 286–295.

[17] J. von Neumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1944.

[18] Z. G. Nishnianidze, *Fixed points of monotone multivalued operators (Russian)*, Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR **114** (1984), 489–491.

[19] T. Tanaka, *Generalized quasiconvexities, cone saddle points, and minimax theorem for vector-valued functions*, J. Optim. Theory Appl. 81 (1994), no. 2, 355–377.

[20] R. C. Young, The algebra of many-valued quantities, Mathematische Annalen 104 (1931), 260–290.