確率計画法における最小誘導被覆とシナリオ優越集合について

神奈川大学大学院　理学研究科　数学領域　堀口研究室
鈴木陸斗　源隆哉　王瀚東　堀口正之
Rikuto Suzuki, Ryuya Minamoto, Wang Handong, & Masayuki Horiguchi
Field of Mathematics, Graduate School of Science, Kanagawa University

1　はじめに

本稿では、確率計画法における最小誘導被覆とシナリオ優越集合について考察する。ここで扱う問題は、確率変数で表される制約条件を満たす確率を閾値とする最適化問題である。まず、確率計画問題の定式化について示し、確率計画法と優先順位付きナップサック多面体 (PCKP) の関係を述べる。そしてさらに、誘導被覆とリフティングの概念を用いることで確率的制約条件付き最適化問題を再定式化できること示し、最後に確率的制約条件付き最適化問題に対するアルゴリズムについてまとめる。

2　確率計画問題の定式化

確率計画法 (stochastic programming) とは現実では目的関数および制約条件に不確実要素を伴う場合が多く。その不確実要素を直接モデルに組み入れた最適化手法のことを確率計画法という。確率計画法に関するアプローチは、**即時決定 (here and now)** と**待機決定 (wait and see)** に大別される。**即時決定 (here and now)** とは、確率変数の実現値を知る前に決定を下さなければならないアプローチである。**待機決定 (wait and see)** とは、確率変数の実現値を知ってから確定的な数理計画問題を取り扱うというアプローチである。

確率計画問題 ([6] 椎名孝之 (2015))

$$\begin{array}{lll} \text{最小化} & g_0(x,\tilde{\xi}) & \\ \text{条件} & g_j(x,\tilde{\xi}) \leq 0, & i=1,...,m \\ & x \in X \subset \mathbb{R}^n & \end{array}$$

このような問題を確率計画問題と呼ぶ (以後 SP と呼ぶ)。変数空間 X および関数 $g_j(x,\tilde{\xi}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(i=0,...,m)$ は与えられているものとする。$\tilde{\xi}$ は N 次元確率変数ベクトルであり、そのとりうる値の集合を Ξ とする。確率空間 $(\Xi,\mathcal{F},P)$ が与えられているものとする。決定変数 x が与えられたとき、関数 $g_j(x,\tilde{\xi}) : \Xi \to \mathbb{R}$ はこれ自身確率変数となり、確率 P は x に関して独立であると仮定する。上の問題は確率変数 Ξ の全てのとりうる値に対して、目的関数を最小化し、同時に制約条件を満たす解 x が必ず存在するとは言えない。つまり明確に定義されたものであるとは言えない。したがって、つぎのように 2 種類の**等価確定問題** (deterministic equivalent) に考え直す必要がある。

- **リコースを有する確率計画問題 (stochastic programming with recourse)**

2 段階確率計画問題 (two-stage stochastic programming) とも呼ばれる。制約に確率変数が含まれるとき、制約を逸脱する度合いに応じて罰金を与え、**リコース**を含む目的関数を最小化する。ここでのリコースとは罰金に対する償還請求を表す。制約の満たされない場合の追加費用を重要視する。

- **確率的制約条件問題 (chance constrained program)**

機会制約条件問題とも呼ばれる。制約条件の概念を拡張し、ある確率レベル（充足水準）で制約条件が満たされればよいとする**確率的制約条件**を用いる。制約が満たされる確率を問題にする。

ここでは、等価確定問題として、次の確率的制約条件付き最適化問題 (chance constrained program, CCP) について考えていく。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と可測空間 $x : \Omega \to \mathbb{R}^n$ の空間 $\mathcal{X}$ が与えられているものとする。次に、関数 $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$、可測な制約関数 $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$、確率 (変数) ベクトル $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^s$、集合 $X \subset \mathcal{X}$ が与えられているとする。すると確率的制約条件付き最適化問題は次のようになる。

確率的制約条件付き最適化問題 (CCP)([7] Ruszczynski(2002))

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & f(x) \\
\text{条件} \quad & \mathbb{P}\{g(x(\omega), \xi(\omega)) \geq 0\} \geq 1 - \alpha \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

記号 $\mathbb{P}$ は確率を表し、$\alpha \in (0, 1)$ は規定の水準を表している。$g(x, \xi) = Tx - \xi$ で T は行列、ξ は確率 (変数) ベクトルを表す。

次に、確率 $p_i(i = 1, 2, \ldots, N)$ で発生する確率ベクトル ξ の実現値 $\xi^i(i = 1, 2, \ldots, N)$ が有限個しかない場合に焦点を当てる。これらをシナリオと呼ぶ。この場合の確率的制約条件付き最適化問題の定式化を容易にするために、指示関数 $\mathcal{X} : \mathbb{R}^m \to \{0, 1\}$ を導入する。

$$
\mathcal{X}(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \text{ の場合} \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}
$$

このとき、シナリオが有限個 $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^N$ の確率的制約条件付き最適化問題 (CCP)([7] Ruszczynski(2002)) は次の形で表せる。

有限シナリオ確率的制約条件付き最適化問題 (FCCP)

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & f(x) \\
\text{条件} \quad & \sum_{i=1}^{N} p_i \mathcal{X}(g(x^i, \xi^i)) \geq 1 - \alpha \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

多くの場合、シナリオの集合に半順序 $\preceq$ を定義できる。次に半順序について定義する。

半順序 (partial order) $\preceq$

$$
i \preceq j \iff \xi^i \leq \xi^j
$$

これは全部のシナリオの中で、限られた数のシナリオだけがこの問題に影響を与えることを示している。

定義 1（一致性） 任意の $x \in X$ に対して、

(i) $f(\bar{x}) \leq f(x)$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_i \mathcal{X}(g(\bar{x}^i, \xi^i)) \geq \sum_{i=1}^{N} p_i \mathcal{X}(g(x^i, \xi^i))$

(iii) 全ての $i, j \in 1, ..., N$ に対して、 $(i \prec j) \wedge (g(\bar{x}^j, \xi^j) \geq 0) \implies (g(\bar{x}^i, \xi^i) \geq 0)$

となるような $\bar{x} \in X$ が存在する場合、$\{1, ..., N\}$ 上の半順序 $\preceq$ は確率的制約条件付き最適化問題

(CCP)([7] Ruszczynski(2002)) に一致であると言う。さらに $\bar{x} = x$ を満たすとき、強一致であると言う。

ここでの $i \prec j$ は $(i \preceq j) \wedge (i \neq j)$ である。

次に有限シナリオ確率的制約条件付き最適化問題 (FCCP) を混合整数計画問題として再定式化する。そのために、任意の $x \in X$ に対して、$g(x^i, \xi^i) + d^i \geq 0$ となるような各 $i = 1, ..., N$ ベクトル $d^i \in \mathbb{R}^m$ を探す。$g(\cdot, \xi^i)$ が連続で X はコンパクトであるため、このようなベクトルが存在する。これにより、(FCCP) を混合整数計画問題に再定式化できる。

3　混合整数計画問題と誘導被覆

混合整数計画の場合

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & f(x) && (1) \\ \text{条件} \quad & g(x^i, \xi^i) + d^i z_i \geq 0, i = 1, ..., N && (2) \\ & \sum_{i=1}^{N} p_i z_i \leq \alpha && (3) \\ & x \in X && (4) \\ & z_i \in \{0, 1\}, i = 1, ..., N && (5) \end{aligned}$$

この問題を解こうとすると、シナリオの数 N が非常に大きい場合に困難であると思われる。そのため、その複雑さを軽減するために (FCCP) に関する半順序を利用する。

定義 1 から次の考察が得られる。

補題 1　半順序 $\preceq$ が (1)∼(5) に対して、矛盾がない場合、任意の $i, j \in \{i, ..., N\}$ に対して、$(i \preceq j) \implies (z_i \leq z_j)$ となるような (1)∼(5) の最適解 $(\hat{x}, \hat{z})$ が存在する。

したがって、(1)∼(5) に $i \preceq j$ となるような任意の $i, j \in \{1, ..., N\}$ に対して、

$$z_i \leq z_j \tag{6}$$

という制約条件を加えることは、全ての最適解を取り除くわけではない。不等式 (3) と (6) は整数制約 (5) とともに、優先順位制約付きナップサック多面体 (Precedence Constrained Knapsack Polyhedron, PCKP) と定義される。PCKP に導入されたアイディアを適用する。

- 集合を定義する。

$$A_i = \{j \in \{1, ..., N\} : i \preceq j\}, (i = 1, ..., N)$$

ナップサック制約の代わりに誘導被覆 (induced cover) の概念を用いる。

定義 2（誘導被覆 induced cover）　集合 $C \subseteq \{1, ..., N\}$ は

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i \in C} A_i\right\} > \alpha \tag{7}$$

が成り立つとき誘導被覆と呼ばれる。

任意の誘導被覆 C に対して、有効な不等式

$$\sum_{i\in C} z_i \le |C| - 1 \tag{8}$$

が (6) と A_i の定義から成り立つ。

- 誘導被覆について例を使って説明する。

図 2 に示されている確率変数 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ の実現値 $\xi^1, ..., \xi^{20}$ を考えてみる (簡単のため 8 つだけ番号を与える)。半順序 $\preceq$ は次のように定義されていると仮定する。$i \preceq j \iff \xi^i \le \xi^j$ また、任意の実現値が任意の i に対して、等確率で $p_i = 0.05, \alpha = 0.25$ であるとする。このとき、A_i の定義によって, $A_1 = \{1,4,5,6\}$, $A_2 = \{2,5,6,7\}$, $A_3 = \{3,6,7,8\}$ などの集合が得られる。例えば、集合 $C = \{1,2\}$ は $\mathbb{P}\{A_1 \cup A_2\} = 0.05 \times 6 = 0.3 > 0.25 = \alpha$ なので誘導被覆である。誘導被覆は他にもたくさんあることが分かる。

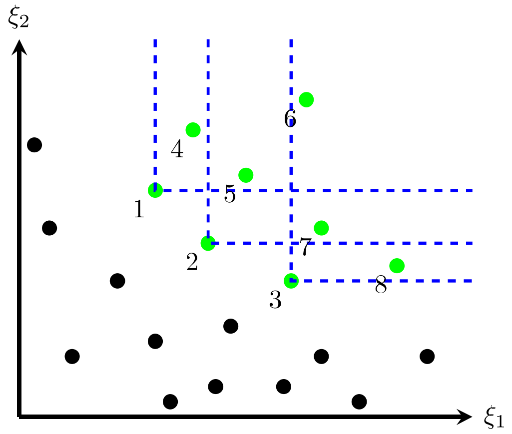

図 2　誘導被覆の例題（cf.［7］Andrzej Ruszczynski)

もう一つの例を紹介する。図 3 に示されている確率変数 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ の実現値 $\xi^1, ..., \xi^{10}$ を考えてみる。半順序 $\preceq$ は次のように定義されていると仮定する。$i \preceq j \iff \xi^i \le \xi^j$ また、任意の実現値が任意の i に対して、等確率で $p_i = 0.1, \alpha = 0.5$ であるとする。$A_1 = \{1,4,5,6\}$, $A_2 = \{2,6,7\}$,$A_3 = \{3,7\}$ などがある。例えば、$C = \{1,2\}$ は $\mathbb{P}\{A_1 \cup A_2\} = 0.1 \times 6 = 0.6 > 0.5 = \alpha$ なので誘導被覆である。逆に、$C = \{2,3\}$ は $\mathbb{P}\{A_2 \cup A_3\} = 0.1 \times 4 = 0.4 < 0.5 = \alpha$ なので誘導被覆ではない。

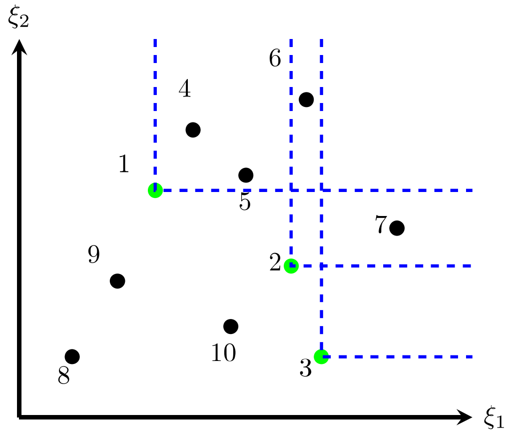

図 3　誘導被覆の例題

しかし、シナリオの数が大きくなると、この方法では難しくなる。全ての適切な誘導被覆を列挙することは事実上不可能である。そこで 2 つの問題に焦点を当てる。与えられた分数の解を切断する被覆の不等式を見つけることと、それらのリフティングを決定することをそれぞれ考察する。

1 つ目の問題について考える。集合 $I \subset 1, ..., N$ と分数の点 $\tilde{Z}_i \in [0,1]^N$ が与えられたときに、(10) が $\tilde{Z}_i$ を切断する誘導被覆 $C \subseteq I$ を見つける。つまり、

$$\sum_{i\in C}\tilde{Z}_i > |C|-1 \tag{9}$$

(9) の両辺の差が最大となる被覆 C を見つけるために、シナリオ i が C に含まれるかどうかを決定するための 2 値変数 (0 または 1)$v_i, i\in I$ を導入し、次のように最適化問題を定式化する。

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad \sum_{i\in I}(1-\tilde{z}_i)v_i && (10)\\ &\text{条件} \quad \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i:v_i=1} A_i\right\} > \alpha && (11)\\ &\qquad\quad v_i\in\{0,1\},\ i\in I && (12)\end{aligned}$$

定義 2 から次のことが得られる。

補題 2 I は誘導被覆だと仮定する。(10)~(12) の最適値が 1 よりも小さい場合、集合 $C=\{i\in I: v_i=1\}$ は (9) を満たす誘導被覆を定義する。逆に、最適値が 1 以上の場合、(9) が成り立つような誘導被覆 $C\subseteq I$ は存在しない。

問題 (10)~(12) は依然として難しい最適解問題である。そこでブール・ボンフェローニの不等式を用いる。

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i\in C} A_i\right\} \geq \sum_{i\in C}\mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{i,j\in C, i<j}\mathbb{P}\{A_i\cap A_j\} \tag{13}$$

最初の近似ではこの不等式を制約条件 (11) に直接適用する。図 2 の例ではブール・ボンフェローニの不等式より、$\mathbb{P}\{A_1\cup A_2\cup A_3\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}=0.05\times 8=0.4$, $\mathbb{P}\{A_1\}+\mathbb{P}\{A_2\}+\mathbb{P}\{A_3\}-(\mathbb{P}\{A_1\cap A_2\}+\mathbb{P}\{A_1\cap A_3\}+\mathbb{P}\{A_2\cap A_3\})=0.6-0.25=0.35$ となり、$\mathbb{P}\{A_1\cup A_2\cup A_3\}\geq 0.35$ が得られるため、$\alpha=0.25$ の場合にこれを適用することで、$\{1,2,3\}$ を被覆とすることができる。しかし $\alpha=0.35$ の場合、$\mathbb{P}\{A_1\cup A_2\cup A_3\}=0.4$ であっても見逃してしまう。

ブール・ボンフェローニの不等式を用いた混合整数計画問題で問題 (10)~(12) を近似するために、シナリオ i と j が両方とも被覆内にあるという決定を表す、追加の決定変数 $y_{ij}, i,j\in I, i<j$ を導入する。すると次が得られる。

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad \sum_{i\in I}(1-\tilde{z}_i)v_i && (14)\\ &\text{条件} \quad \sum_{i\in I}v_i\mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{i,j\in I,i<j} y_{ij}\mathbb{P}\{A_i\cap A_j\}\geq \alpha+\epsilon && (15)\\ &\qquad\quad y_{ij}\geq v_i+v_j-1,\quad y_{ij}\geq 0,\ i,j\in I,\ i<j && (16)\\ &\qquad\quad v_i\in\{0,1\},\ i\in I && (17)\end{aligned}$$

ただし、$0<\epsilon<\min_{1\leq i\leq N} p_i$

ブール・ボンフェローニの不等式は明確でないが、問題 (14)~(17) は集合 A_i をクラスタリングすることで改善できる。

定義 3（適切な分割 proper partition） 以下の 3 つが成り立つとき、集合 $J_k\subseteq I,\quad k\in K$ は I の適切な分割と呼ばれる。

(i) $\bigcup_{k\in K} J_k = I$

(ii) $B_k=\bigcap_{i\in J_k} A_i\neq\emptyset, \qquad k\in K$

(iii) 任意の $k\in K,\quad i\in J_l,\quad l\neq k$ に対して、$B_k\cap A_i=\emptyset$

ブール・ボンフェローニの不等式による境界を明確にするために、適切な分割を用いる。任意の $i \in I$ に対して、$i \in J_{k(i)}$ となるような $k(i)$ が存在するものとする。

- 適切な分割の例題を 1 つあげる。

$I = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, K = \{1,2,3,4,\}$, $J_1 = \{1,5,9\}, J_2 = \{2,6,10\}, J_3 = \{3,7\}, J_4 = \{4,8\}$, $A_1 = \{1,5,9\}, A_2 = \{2,6,10\}, A_3 = \{3,7\}, A_4 = \{4,8\}, A_5 = \{5,9\}, A_6 = \{6,10\}, A_7 = \{7\}, A_8 = \{8\}$, $A_9 = \{9\}, A_{10} = \{10\}$
定義に沿って確認すると

(i) $\displaystyle\bigcup_{k \in K} J_k = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 = \{1,5,9\} \cup \{2,6,10\} \cup \{3,7\} \cup \{4,8\} = I$

(ii) $\displaystyle B_1 = \bigcap_{i \in J_1} A_i = A_1 \cap A_5 \cap A_9 = \{9\} \neq \emptyset$　同様に $B_2 = \{10\}, B_3 = \{7\}, B_4 = \{8\}$

(iii) 例えば $k = 1$ とすると、$B_1 = \{9\}$ となり、$B_1 \cap A_i \neq \emptyset$ となるためには $9 \in A_i$ となる必要があるが $i \in J_l, l \neq 1$ より $9 \notin A_i$ となるので、$B_1 \cap A_i = \emptyset$ が成り立つ。同様に $k = 2,3,4$ でも成り立つので $B_k \cap A_i = \emptyset$

補題 3　J_k,　$k \in K$ は I の適切な分割である場合、

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i \in C} A_i\right\} \geq \sum_{k \in K} \mathbb{P}\{B_k\} + \sum_{i \in I}(\mathbb{P}\{A_i\} - \mathbb{P}\{B_{k(i)}\}) - \sum_{k \in K} \sum_{i,j \in J_k, i<j} (\mathbb{P}\{A_i \cap A_j\} - \mathbb{P}\{B_k\}) - \sum_{\substack{i,j \in I, i<j, \\ k(i) \neq k(j)}} \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\} \tag{18}$$

が成り立つ。

補題 3 を用いて (14)~(17) を整理する。簡単のため、$\mu_i = \mathbb{P}\{A_i\}, \mu_{ij} = \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\}, \rho_k = \mathbb{P}\{B_k\}$ とし、線形計画問題を考える。

$$\text{最小化} \quad \sum_{i \in I} (1 - \tilde{z}_i) v_i \tag{19}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{k \in K} \rho_k \lambda_k + \sum_{i \in I} v_i (\mu_i - \rho_{k(i)}) - \sum_{k \in K} \sum_{i,j \in J_k, i<j} y_{ij} (\mu_{ij} - \rho_k) - \sum_{\substack{i,j \in I, i<j, \\ k(i) \neq k(j)}} y_{ij} \mu_{ij} \geq \alpha + \epsilon \tag{20}$$

$$y_{ij} \geq v_i + v_j - 1, \quad y_{ij} \geq 0, \quad i,j \in I, \quad i < j \tag{21}$$

$$\lambda_k \leq \sum_{i \in J_k} v_i, \ \lambda_k \leq 1, \ k \in K, \ v_i \in \{0,1\}, \ i \in I \tag{22}$$

4　リフティング

次に、被覆のリフティングの問題について考える。誘導 β-被覆、つまり次のような集合 C を仮定する。

$$\sum_{i \in C} z_i \leq \beta \tag{23}$$

シナリオ $s \notin C$ では、以下の不等式を満たすような (γ_s, β_s) を発見したい。

$$\sum_{i \in C} z_i + \gamma_s z_s \leq \beta_s \tag{24}$$

これは PCKP に対して有効である。

図 2 に示す例では、全ての実現値の起こる可能性が等しく、$\alpha = 0.25$ であり、集合{1,2}は誘導被

覆である。これは $\mathbb{P}\{A_1 \cup A_2\} = 0.3$ だから。したがって、有効な不等式 $z_1 + z_2 \le 1$ が得られる。ただし $\{1,3\}$ と $\{2,3\}$ も誘導被覆であるため、この不等式を $z_1 + z_2 + z_3 \le 1$ にリフティングすることができる。このアイディアを用いてリフティングのアルゴリズムを見つけ出したい。

次の場合について考えてみる。

$$s \notin \bigcup_{i \in C} A_i$$

$\beta_s = \beta$ と仮定し、(24) で $\gamma_s = 1$ とできるかどうかを調べながら、β-被覆の形でリフティングを探す。それは次の組合せ問題を解くことで決定できる。

$$\text{最大化} \quad \sum_{i \in C} v_i \tag{25}$$

$$\text{条件} \quad \mathbb{P}\{A_s \cup \bigcup_{i: v_i = 1} A_i\} \le \alpha \tag{26}$$

$$v_i \in \{0,1\}, \qquad i \in C \tag{27}$$

この問題が β より小さい場合は、$\gamma_s = 1$ にできる。それ以外の場合は、$\gamma_s = 0$(リフティング失敗) になる。

問題 (25)~(27) は難しい組合せ最適化問題である。今の設定ではとても多くのシナリオを考慮すると、単純な形で解くことは非常に困難に思われる。そのために、問題 (25)~(27) の緩和法を開発する。まず (26) の左辺を計算しやすい下界に置き換える。1 つの方法は前の節と同様にブール・ボンフェローニの不等式 (15) を利用することである。

ランダムな事象 $A_i, i \in I$ について p_m を $n = |I|$ 個の事象のうち確実に m 個発生する確率と定義する。確率 $p_m, m = 1, ..., n$ は二項モーメント方程式を満たす。

$$\sum_{m=r}^{n} \binom{m}{r} p_m = \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_r} \mathbb{P}\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_r}\}, \quad r = 1, ..., n \tag{28}$$

これらの事象のうち少なくとも 1 個起こる確率は

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i \in I} A_i\right\} = \sum_{m=1}^{n} p_m \tag{29}$$

これらの関係を用いて次の線形計画問題を定式化する。

$$\text{最大化} \quad \sum_{i \in I} v_i \tag{30}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{m=1}^{n} p_m \le \alpha \tag{31}$$

$$\sum_{m=1}^{n} m p_m = \sum_{i \in I} v_i \mathbb{P}\{A_i\} \tag{32}$$

$$\sum_{m=2}^{n} \binom{m}{2} p_m = \sum_{i<j} y_{ij} \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\} \tag{33}$$

$$y_{ij} \ge v_i + v_j - 1, 0 \le y_{ij} \le min(v_i, v_j), i, j \in I, i < j \tag{34}$$

$$v_i \in \{0,1\}, \qquad i \in I \tag{35}$$

$$p_m \ge 0, \quad m = 1, ..., n \tag{36}$$

(23) の被覆 C をリフティングするには、上の結果を $I = C \cup \{s\}$ に適用し、$v_s = 1$ とする。最適値 $\bar{\beta}$ が β を超えない場合は、不等式に z_s を追加できる。つまり、(23) で C を $C \cup \{s\}$ に置き換える。

制約 (31) は (26) の緩和であり、この緩和の質を向上させるために、より高次のモーメント制約を含めることができるが、確率計画法の内容では、考慮すべき事象 A_i の組み合わせの数が多いためとても現実的ではない。その代わりにすぐに得られる情報を駆使して、問題 (30)~(36) を改良してみる。最初に、各 A_i についての確率 $\delta_i = \mathbb{P}\left\{A_i \setminus \cup_{j\in I\setminus\{i\}} A_j\right\}$ を計算するのは簡単である。そうすると $p_1 \geq \sum_{i\in I} \delta_i v_i$ でなければならない。つまり C は I の部分集合なので、この不等式が必要になる。

次にクラスタリングを採用するとで、大幅な改善が図れる。ここで、$J_k,\ \ k \in K$ を適切な分割とする。前と同様に、$\mu_i = \mathbb{P}\{A_i\}, \mu_{ij} = \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\}, \rho_k = \mathbb{P}\{B_k\}$ と表記すると

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & \sum_{i\in I} v_i && (37)\\
\text{条件}\quad & \sum_{m=1}^{n} p_m + \sum_{k\in K} \rho_k \lambda_k \leq \alpha && (38)\\
& \sum_{m=1}^{n} m p_m = \sum_{i\in I} (\mu_i - \rho_{k(i)}) v_i && (39)\\
& \sum_{m=2}^{n} \binom{m}{2} p_m = \sum_{k\in K} \sum_{i,j\in J_k, i<j} y_{ij}(\mu_{ij} - \rho_k) + \sum_{i,j\in I, i<j, k(i)\neq k(j)} y_{ij}\mu_{ij} && (40)\\
& y_{ij} \geq v_i + v_j - 1,\quad 0 \leq y_{ij} \leq min(v_i, v_j),\quad i,j\in I,\quad i<j && (41)\\
& \sum_{j\in J_k} v_i \leq |J_k|\lambda_k,\quad k\in K && (42)\\
& v_i \in \{0,1\},\qquad i\in I && (43)\\
& \lambda_k \in \{0,1\},\qquad k\in K && (44)\\
& p_1 \geq \sum_{i\in I} \delta_i v_i && (45)\\
& p_m \geq 0,\quad m = 2,...,n && (46)
\end{aligned}
$$

次に、シナリオ

$$s \in \bigcup_{i\in C} A_i \qquad (47)$$

に関するリフティングについて考えていく。C が最小の誘導被覆である場合は、十分に研究されており、次の結果より定式化することができる。

補題 4 C を誘導被覆とし、$J_k,\ \ k \in K$ を C の適切な分割とし、$j_k \in \bigcap_{i\in J_k} A_i$ とする。すると不等式

$$\sum_{i\in C} Z_i + \sum_{k\in K} (|J_k| - 1)(1 - Z_{j_k}) \leq |C| - 1 \qquad (48)$$

は PCKP にとって有効な不等式である。

残念ながら (47) を満たすシナリオに関してリフティングされた被覆不等式の実用的な関連性はかなり限られている。そのため (47) を満たすシナリオに関しては、リフティングすることを検討しない。

5 確率的制約条件に対する分枝カット法

ここでは第 4 節と第 5 節で展開した有効な不等式を適用して、混合整数計画問題の定式化した (1) ~ (5) を解く方法に取り掛かる。以下の集合を定義する。

$$S_0 = \{z \in \mathbb{R}^N | \sum_{i=1}^{N} p_i z_i \le \alpha, \quad i \preceq j \text{ となるような任意の } i,j \in \{1,...,N\} \text{ に対して } z_i \le z_j\}$$

$$B_0 = \{z \in \mathbb{R}^N | \ 0 \le z_i \le 1, \quad i = 1,...,N\}$$

$$L_0 \subseteq \{1,...,N\}$$

S_k の定義に有効な不等式を追加し、B_k の一部の変数を $\{0,1\}$ に制限し、L_k に含める関連シナリオの部分集合を選択することで、集合 $S_k, B_k, L_k, k = 1,2,...,$ の数列を構成する。

確率的制約条件に対する分枝カット法のアルゴリズム

0. $k = 0$ とする。
1. 以下の主問題を解く。

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & f(x) && (49) \\ \text{条件} \quad & g(x^i, \xi^i) + d^i z_i \ge 0, i \in L_k && (50) \\ & x \in X && (51) \\ & z \in S_k \cap B_k && (52) \end{aligned}$$

   $(\hat{x}^k, \hat{z}^k)$ はシナリオ解 $(\hat{x}^{ki}, \hat{z}_i^k)$,$i = 1,...,N$ で見つかった最適解を表す。
2. 集合を定義する。

$$H_k = \{i \in 1,...,N | g(\hat{x}^{ki}, \xi^i) \ge 0\}, \quad I_k = \{1,...,N\} \backslash H_k$$

   $\sum_{i \in I_k} p_i \le \alpha$ の場合は操作を辞めて、それ以外の場合は続ける。
3. 誘導被覆 $C_k \subseteq M(I_k)$ を求める。($M(I_k)$ は I_k で最小元の集合である)
4. 各 $s \in M(I_k) \backslash C_k$ は $|C_k|-$ 被覆 $\hat{C}_k \subseteq M(I_k)$ を得るために、被覆 C_k を持ち上げる。
5. $S_{k+1} = S_k \cap \{z \in \mathbb{R}^N | \sum_{i \in \hat{C}_k} z_i \le |C_k| - 1\}$ とする。
6. $M(I_k) \subseteq L_k$ で $\hat{z}^k \in S_{k+1}$ の場合は、$z_{b_k}^k \in (0,1)$ となるような $b_k \in M(I_k)$ を選び、集合 $B_{k+1}\{z \in B_k | z_{b_k} \in \{0,1\}\}$ とする。それ以外の場合は $B_{k+1} = B_k$ とする。
7. $L_{k+1} \supseteq L_k \cup M(I_k)$ を選び k を 1 増やしてステップ 1 に戻る。

定理 1　有限回の反復の後、アルゴリズムは $\hat{x}^k$ が (FCCP) に対して最適解となるような点 $(\hat{x}^k, \hat{z}^k)$ で止まる。

証明

アルゴリズムが反復 k で停止しない場合、ステップ 3∼6 を実行できることを示す。$\sum_{i \in I_k} p_i > \alpha$ なので集合 $M(I_k)$ は誘導被覆であり、ステップ 3 を実行できる。誘導被覆 C_k もステップ 4 の妥当な結果である。ステップ 5 は常に 0 を含むため空集合ではない S_{k+1} を定義する。$M(I_k) \subseteq L_k$ を仮定する。(50) より、任意の $i \in M(I_k)$ に対して $\hat{z}_i^k > 0$ となる。すると、S_0 の定義により、任意の $i \in I_K$ に対して $\hat{z}_i^k > 0$ となる。分数成分 $\hat{z}_{b_k}^k$ が見つからない場合、任意の $i \in I_k$ に対して $\hat{z}_i^k = 1$ でなければならない。しかし、$\hat{z}^k$ は誘導被覆不等式 $\sum_{i \in \hat{C}_k} z_i \le |C_k| - 1$ に違反するため $\hat{z}^k \notin S_{k+1}$。したがって $\hat{z}^k \in S_{k+1}$ の場合、分数座標 $\hat{z}_{b_k}^k$ が存在する。

上記の議論はアルゴリズムが適切に定義されていることを示す。停止しない場合は、$S_{k+1} \subseteq S_k, B_{k+1} \subseteq B_k, L_{k+1} \supseteq L_k$ のこれらの包含の少なくとも一つは厳密である。被覆は有限個存在するため、異なる集合 S_k も有限個存在する可能性がある。集合 B_k, L_k も有限個である。したがってアルゴリズムはある反復 K^* でステップ 2 で停止する必要がある。

問題 (49)∼(52) は (1)∼(5) の緩和である。$\hat{z}_i^{k^*} > 0$ の場合 $z_i = 1$ で、それ以外の場合 $z_i = 0$ と設定することで、目的関数の値を変えることなく (1)∼(5) の全ての制約を満たすことができる。したがって、解 $\hat{x}^{k^*}$ は (FCCP) にとって最適解である。

6　まとめと今後の課題

確率計画問題は誘導被覆とリフティングの概念を用いることで再定式化でき、それに対してのアルゴリズムを考えることができた。4 節での図 2、図 3 の例のような問題は各シナリオが等確率であることを仮定しているが、等確率ではない場合も考えていきたい。その際には望ましいシナリオと望ましくないシナリオの確率的重みをリスクとして評価しなければならないため、分枝カット法の改良にも取り組んでいきたい。

参考文献

[1] 梅谷俊治『しっかり学ぶ数理最適化』(講談社、2020)

[2] 藤澤克樹、後藤順哉、安井雄一郎 『Excel で学ぶ OR』(オーム社、2011)

[3] 穴井宏和、斉藤努『今日から使える！組合せ最適化』(講談社、2015)

[4] 茨木俊秀『C によるアルゴリズムとデータ構造』(オーム社、2014)

[5] David G. Luenberger『Introduction to Linear and Nonlinear Programming』(Addison Wesely Publishing Company、1973)

[6] 椎名孝之『確率計画法』(朝倉書店、2015)

[7] Andrzej Ruszczynski『Probabilistic programming with discrete distributions and precedence constrained knapsack polyhedra』(Math.Program.,Ser.A93:195-215(2002))

[8] 鈴木陸斗『ナップザック問題に対する数理最適化モデルと効率的な解法』
(神奈川大学理学部数理・物理学科 2023 年度卒業研究論文要旨集:45-46、2024.3)