

吸収マルコフ過程における経路選択とリスク最小化 問題について

Risk minimizing problem for route choice behavior in
absorbing Markov processes

長崎総合科学大学・総合情報学部 王 琦
神奈川大学・理学部 堀口正之
京都大学大学院工学研究科建築学専攻 張 景耀

Q.Wang M.Horiguchi J.Y. Zhang
Faculty of Applied Information Technology,
Nagasaki Institute of Applied Science
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kanagawa University
Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Kyoto University

1 はじめに

避難行動、歩行流、交通流などの移動過程は、局所的な混雑によって遅延や安全リスクを生じさせる。したがって、混雑を検出するだけでなく、どの状態が混雑を生じやすいかを定量的に把握し、さらに混雑が発生した瞬間に行動確率（推移確率）を修正可能な枠組みを構築することが重要である。

吸収マルコフ過程は、吸収状態へ到達するまでの確率的挙動を行列によって解析できる確率モデルであり、都市計画分野特に交通流動解析や避難シミュレーションの研究に応用されている。佐佐木 [5] は交通量配分の問題において、交差点間で吸収される車両や新たに発生する車両の流れを一つの吸収マルコフ連鎖としてモデル化し、交差点間の交通量を推定した。大野ら [4] はネットワーク状に形成された避難路上での住民の避難行動を吸収マルコフ連鎖に基づく行動モデルとして構築し、広域避難対策のために住民の潜在的な避難行動を把握するシステムを提案した。これに対し筆者らは、この枠組みをマルチエー

ジェントが同時に移動するセル空間へ拡張し、吸収状態に至るまでに各状態を訪問する回数（滞在時間と解釈）の期待値に基づいて混雑が発生しやすい状態を特定することで、円滑な移動を実現する推移確率の設計を試みてきた [3]。しかしながら、Roosta[9] は確率的ネットワークにおける最短経路選択の期待値モデルについて、一部リンクに故障が生じた場合のモデルの欠点を指摘した。そこで本研究では、Sobel[11] が議論した割引マルコフ決定過程における分散の重要性を踏まえ、王ら [3] の期待値モデルを分散も考慮したモデルへ拡張し、経路選択とリスク最小化を目的とした分析を目指す。

2 吸収マルコフ過程によるリスク状態の特定

セル (r, c) を状態とし、各状態を $S_i \in S, i = 1, 2, \dots, m$ で表す。吸収状態を $S_A = \{S_1, S_2, \dots, S_{m-r}\}$ 、過渡的状态を $S_T = \{S_{m-r+1}, \dots, S_m\}$ とする。1ステップごとに全エージェントが同時更新で移動する。各状態間の推移確率行列は

$$P = \begin{matrix} & S_A & S_T \\ S_A & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\ S_T & \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

で与えられる。これを吸収マルコフ連鎖という [7]。ここで、 \mathbf{I} は吸収状態を示し、 $(m-r) \times (m-r)$ の単位行列である。 \mathbf{O} は $(m-r) \times r$ の零行列、 \mathbf{Q} は $r \times r$ の正方行列で過渡的状态相互の推移確率を表している。 \mathbf{I} を $r \times r$ 単位行列とするとき、基本行列 (Fundamental Matrix) を

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \quad (2)$$

とする。 \mathbf{N} の成分 $n_{ij}, i, j = m-r+1, \dots, m$ は、状態 i から出発したとき吸収までに状態 j を訪問する期待回数（平均滞在時間）を表す。訪問する回数の分散は

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}(2\mathbf{N}_{dg} - \mathbf{I}) - \mathbf{N}_{sq} \quad (3)$$

で与えられる。ただしここに、 \mathbf{N}_{dg} は \mathbf{N} の対角要素を対角要素とする対角行列、 \mathbf{N}_{sq} は \mathbf{N} の各要素の平方を要素とする行列である。

過渡的状态 S_T からそれぞれ $\mathbf{U} = \{U_{m-r+1}, \dots, U_m\}$ になる交通量が発生すれば、

$$\mathbf{U}\mathbf{N} = \mathbf{U}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \quad (4)$$

が各地点を通る交通量を与える [6]。過渡的状态 S_T から吸収されるまでの平均吸収時間を

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}\mathbf{t} \quad (5)$$

で計算できる。ただし、 $\mathbf{1}$ は要素がすべて1である列ベクトルである。ベクトル \mathbf{t} は諸々の過渡的状态から吸収状态に至るまでに要する平均時間とみなす。

3 吸収マルコフ過程における経路選択問題

| | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|----|---|
| 0 | 0 | 1 | 3 | 5 | <div style="display: inline-block; width: 15px; height: 15px; background-color: #ADD8E6; border: 1px solid black; margin-right: 5px;"></div> 出口 (吸収状態) <div style="display: inline-block; width: 15px; height: 15px; background-color: black; border: 1px solid black; margin-right: 5px;"></div> 障害領域 |
| 1 | 2 | | 6 | 8 | |
| 2 | 4 | 7 | 9 | 10 | |

図1 マルコフ流動モデル

本稿では [3] と同じモデル (図 1) を用いてシミュレーションを行う。状態集合 $S = \{0, 1, \dots, 10\} \cup \{(1, 1)\}$ のうち, 出口 10 (もしくは (2,3)) は吸収状態, 黒いセル (1,1) はアクセス不可能の障害領域, それ以外は過渡的状态である。初期設定した各状態にいるエージェントは確率的に過渡的状态間を推移しつつ, 出口を目指して移動する。過渡的状态集合および吸収状態集合はそれぞれ $S_T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $S_A = \{10\}$ と定義する。行動集合は $A = \{\text{上, 下, 左, 右}\}$ とし, エージェントは行動可能な方向に対して等確率で移動すると仮定する。このとき, 推移確率行列は式 6 のように与えられる。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

式 (2) より, 各状態における滞在時間の期待値は表 1 に示される。式 (3) を用いて算出した分散は表 2 に示される。状態 (1,0) から出発した場合, 吸収に至るまでに同じ状態に戻る回数が最も多く, 次いで状態 (0,0) が多いことがわかる。さらに, 過渡的状态 (0,0) から出発

した場合, 吸収に至るまでに状態 (1,0) を訪ねる平均回数は比較的多い一方で, その分散は全状態の中で最大となっている。

表 1 滞在時間の期待値

| | (0, 0) | (0, 1) | (0, 2) | (0, 3) | (1, 0) | (1, 2) | (1, 3) | (2, 0) | (2, 1) | (2, 2) |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| (0, 0) | 4.3455 | 3.1636 | 2.9727 | 1.4545 | 3.5273 | 1.9909 | 1.3909 | 2.7091 | 1.8909 | 1.6091 |
| (0, 1) | 3.1636 | 3.7091 | 3.3818 | 1.6364 | 2.6182 | 2.1273 | 1.5273 | 2.0727 | 1.5273 | 1.4727 |
| (0, 2) | 1.9818 | 2.2545 | 3.7909 | 1.8182 | 1.7091 | 2.2636 | 1.6636 | 1.4364 | 1.1636 | 1.3364 |
| (0, 3) | 1.4545 | 1.6364 | 2.7273 | 2.5455 | 1.2727 | 1.9091 | 1.9091 | 1.0909 | 0.9091 | 1.0909 |
| (1, 0) | 3.5273 | 2.6182 | 2.5636 | 1.2727 | 4.4364 | 1.8545 | 1.2545 | 3.3455 | 2.2545 | 1.7455 |
| (1, 2) | 1.3273 | 1.4182 | 2.2636 | 1.2727 | 1.2364 | 2.7545 | 1.5545 | 1.1455 | 1.0545 | 1.4455 |
| (1, 3) | 0.9273 | 1.0182 | 1.6636 | 1.2727 | 0.8364 | 1.5545 | 2.1545 | 0.7455 | 0.6545 | 0.8455 |
| (2, 0) | 2.7091 | 2.0727 | 2.1545 | 1.0909 | 3.3455 | 1.7182 | 1.1182 | 3.9818 | 2.6182 | 1.8818 |
| (2, 1) | 1.8909 | 1.5273 | 1.7455 | 0.9091 | 2.2545 | 1.5818 | 0.9818 | 2.6182 | 2.9818 | 2.0182 |
| (2, 2) | 1.0727 | 0.9818 | 1.3364 | 0.7273 | 1.1636 | 1.4455 | 0.8455 | 1.2545 | 1.3455 | 2.1545 |

表 2 滞在時間の分散

| | (0, 0) | (0, 1) | (0, 2) | (0, 3) | (1, 0) | (1, 2) | (1, 3) | (2, 0) | (2, 1) | (2, 2) |
|--------|---------|---------|---------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|
| (0, 0) | 14.5375 | 10.2962 | 10.7288 | 3.8347 | 15.3276 | 5.0135 | 2.6680 | 11.5260 | 5.8103 | 2.7355 |
| (0, 1) | 14.3226 | 10.0483 | 10.8218 | 4.0165 | 13.7574 | 5.0668 | 2.7213 | 10.1375 | 5.2483 | 2.7045 |
| (0, 2) | 11.3144 | 9.3871 | 10.5801 | 4.1322 | 10.5342 | 5.0829 | 2.7374 | 7.9392 | 4.4218 | 2.6363 |
| (0, 3) | 9.0711 | 7.8248 | 10.5124 | 3.9339 | 8.3999 | 4.9636 | 2.6727 | 6.4066 | 3.6860 | 2.4198 |
| (1, 0) | 14.6863 | 9.9491 | 10.3012 | 3.5868 | 15.2450 | 4.9230 | 2.5775 | 12.1045 | 6.1078 | 2.7293 |
| (1, 2) | 8.4464 | 7.0909 | 9.7748 | 3.5868 | 8.2050 | 4.8330 | 2.7275 | 6.6645 | 4.1223 | 2.6938 |
| (1, 3) | 6.2717 | 5.4982 | 8.1821 | 3.5868 | 5.8850 | 4.5930 | 2.4875 | 4.6354 | 2.8205 | 2.0829 |
| (2, 0) | 13.4962 | 9.0069 | 9.5388 | 3.2727 | 15.1458 | 4.7953 | 2.4498 | 11.8731 | 6.1408 | 2.6859 |
| (2, 1) | 10.9673 | 7.4698 | 8.4417 | 2.8926 | 12.6665 | 4.6304 | 2.2850 | 11.3772 | 5.9094 | 2.6053 |
| (2, 2) | 7.0995 | 5.3375 | 7.0098 | 2.4463 | 7.8069 | 4.4283 | 2.0829 | 7.1623 | 4.8681 | 2.4875 |

4 シミュレーション

マルチエージェントの流動状況を把握するため, 本節ではシミュレーションを行う。総エージェント数 M を固定し, 過渡的状态への初期配置をベクトル U_0 で与える。本稿では $M = 1000$, ランダムに設定した初期値を, 下記の表 3 で与える。

推移確率行列 (式 (7)) を用いてシミュレーションを 10 回行った。まず, 滞在時間の期待値と分散の結果はそれぞれ表 4 と表 5 で与えられる。

表3 エージェントの初期配置

| Row | Column | AgentCount |
|-----|--------|------------|
| 0 | 0 | 119 |
| 0 | 1 | 84 |
| 0 | 2 | 97 |
| 0 | 3 | 103 |
| 1 | 0 | 81 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 105 |
| 1 | 3 | 106 |
| 2 | 0 | 80 |
| 2 | 1 | 101 |
| 2 | 2 | 124 |
| 2 | 3 | 0 |

表4 シミュレーションの滞在時間の期待値

| 期待値 | (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) | (1,0) | (1,2) | (1,3) | (2,0) | (2,1) | (2,2) |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| (0,0) | 4.4754 | 3.6957 | 3.7780 | 2.5097 | 4.4496 | 2.7561 | 2.1176 | 4.1591 | 3.1723 | 2.2126 |
| (0,1) | 4.4279 | 3.6516 | 3.7705 | 2.4778 | 4.5640 | 2.7456 | 2.1541 | 4.2231 | 3.1450 | 2.0269 |
| (0,2) | 4.5045 | 3.8240 | 3.8346 | 2.6668 | 4.6237 | 2.8229 | 2.2045 | 4.2533 | 3.0414 | 2.1880 |
| (0,3) | 4.4615 | 3.7736 | 3.9083 | 2.6007 | 4.7082 | 2.9577 | 2.2807 | 4.2085 | 3.0298 | 2.2237 |
| (1,0) | 4.4965 | 3.8851 | 3.9309 | 2.6211 | 4.4745 | 2.7938 | 2.2400 | 3.9914 | 2.9411 | 2.1022 |
| (1,2) | 4.6348 | 3.8556 | 3.9243 | 2.5391 | 4.6034 | 2.7658 | 2.2309 | 4.0926 | 2.9539 | 2.1544 |
| (1,3) | 4.1859 | 3.5145 | 3.6857 | 2.5725 | 4.5690 | 2.6917 | 2.1711 | 4.0662 | 3.0383 | 2.1308 |
| (2,0) | 4.1317 | 3.5529 | 3.9946 | 2.7527 | 4.2979 | 2.8519 | 2.2149 | 3.8624 | 2.9305 | 2.1250 |
| (2,1) | 4.5558 | 3.5371 | 3.6150 | 2.3482 | 4.6296 | 2.5926 | 1.9247 | 4.2731 | 3.0104 | 2.0322 |
| (2,2) | 3.9666 | 3.3562 | 3.5032 | 2.4027 | 4.5896 | 2.6968 | 2.1052 | 4.0154 | 3.0144 | 2.1266 |

表5 シミュレーションの滞在時間の分散

| 分散 | (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) | (1,0) | (1,2) | (1,3) | (2,0) | (2,1) | (2,2) |
|-------|---------|---------|---------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|
| (0,0) | 14.5726 | 9.2137 | 9.8152 | 2.9098 | 16.3477 | 4.8466 | 2.0287 | 14.1769 | 6.9227 | 2.5842 |
| (0,1) | 16.1314 | 10.3215 | 10.3015 | 3.7744 | 18.5857 | 4.4953 | 2.4821 | 15.3909 | 6.2022 | 1.8897 |
| (0,2) | 15.1606 | 10.6391 | 10.4068 | 4.2896 | 17.7257 | 4.9828 | 2.7351 | 14.9482 | 6.6319 | 2.5606 |
| (0,3) | 16.4481 | 12.6755 | 11.5733 | 4.0438 | 16.9226 | 5.9522 | 2.9622 | 13.6228 | 5.7104 | 2.7867 |
| (1,0) | 14.8348 | 10.0449 | 10.6293 | 4.5081 | 15.3082 | 5.0565 | 2.6369 | 12.6432 | 6.0602 | 2.4509 |
| (1,2) | 14.0762 | 11.5828 | 10.9935 | 3.8550 | 14.3161 | 5.1082 | 2.9526 | 12.7431 | 5.8124 | 2.4763 |
| (1,3) | 12.3159 | 7.3584 | 9.7073 | 4.2955 | 19.2871 | 4.5498 | 2.4296 | 15.1126 | 6.4501 | 2.5946 |
| (2,0) | 12.5860 | 9.5353 | 11.8044 | 4.8349 | 13.4814 | 5.5067 | 2.6404 | 10.1631 | 5.0466 | 2.3236 |
| (2,1) | 12.8735 | 8.7945 | 7.9526 | 2.8054 | 15.5311 | 3.6656 | 1.7932 | 13.4885 | 6.1079 | 2.1544 |
| (2,2) | 13.131 | 8.5521 | 9.1048 | 3.7867 | 15.2625 | 4.2105 | 2.3102 | 13.2751 | 6.1941 | 2.6631 |

表4は表1と比較すると、各状態における期待値が必ずしも一致していないことが分かる。特に、第5列に対応する状態(1,0)に注目すると、表4では期待値がほぼ同程度であるのに対し、表1ではその差が比較的大きく現れている。

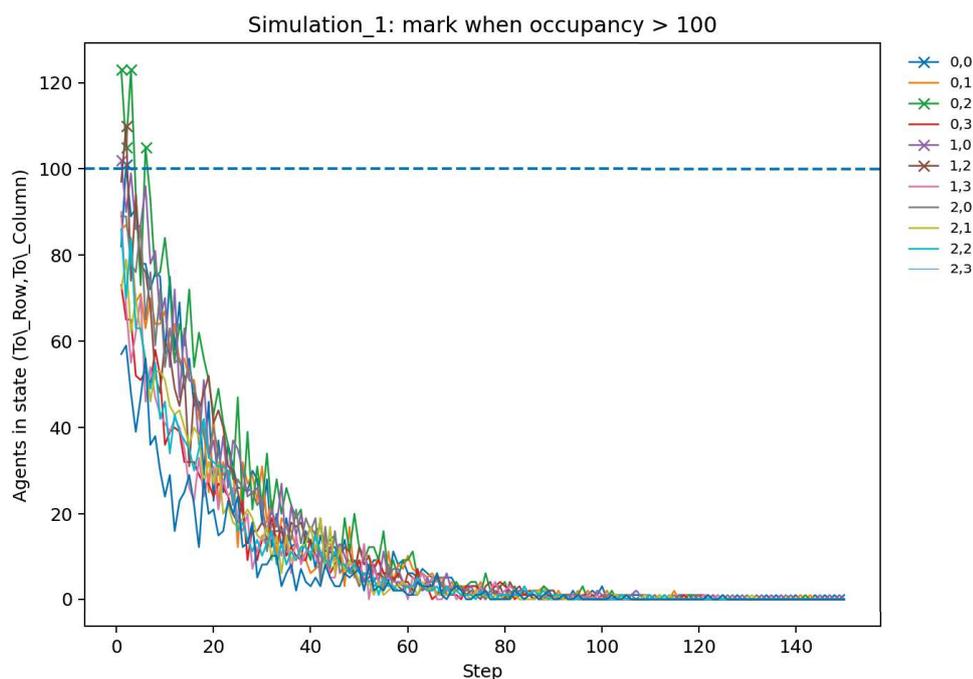


図2 状態別エージェント数の折れ線 (Simulation_1例)。各状態は色分けし、100超過が発生した瞬間に印を付与。

次に、セル容量を $C = 100$ と設定し、初期配置においてのみ容量 C を超える可能性を許し、その後の移動では容量制約を課す。状態別エージェント数の時系列可視化するため、各ステップの状態 (r, c) ごとのエージェント数を折れ線で描画し、エージェント数

が 100 を超過した時点で印を付与する。図 2 は Simulation_1 の結果を示したものである。Simulation_1 では表 6 に示すように、状態 (0,2) において容量超過が集中して発生しており、局所的なボトルネック状態が存在することが確認できる。

表 6 Simulation_1 における 100 超過状態の内訳

| row | col | events | first_step | max_count |
|-----|-----|--------|------------|-----------|
| 0 | 2 | 4 | 1 | 123 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 110 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 102 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 101 |

5 おわりに

本研究では、吸収マルコフ連鎖に基づく状態滞在時間の期待値および分散を用いて混雑が発生リスクの高い状態を定量的に評価した。シミュレーション結果から、局所的なボトルネック状態の検出および提案手法の有効性を確認された。一方で、シミュレーション回数が限られているため、理論モデルの結果と異なる挙動も一部に見られた。今後の課題として、期待値と分散の組合せに基づくリスク指標の高度化、混雑検知閾値の適切な設定手法の確立、ならびにマルコフ過程の報酬（利得）構造への混雑度の導入などが挙げられる。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 23K04281 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Bertsekas, D.P., Tsitsiklis, J.N., An analysis of stochastic shortest path problems. Mathematics of Operations Research, 1991, 16(3), 580-595.
- [2] Kemeny J.G. , Snell J. L. , Finite Markov Chains: With a New Appendix "Generalization of a Fundamental Matrix", Springer New York, 1976.
- [3] 王琦, 堀口正之, 來島愛子, 張景耀, 楊布和額尔敦, マルコフ流動モデルにおける避難者最適ルート問題について, 数理解析研究所講究録, 2025, 2304, 187-194.

- [4] 大野栄治, 加藤晃, 浅井誠治, 住民の避難行動を離散的に捉えた避難シミュレーションシステム, 都市計画論文集, 1987, 22: 571-576.
- [5] 佐佐木綱, 吸収マルコフ過程による交通量配分理論, 土木学会論文集 1965,121, 28-32.
- [6] 佐佐木綱, 松井寛, 会場内の観客流動モデル, 土木学会論文集, 1968, 159, 90-95.
- [7] 北川敏男: マルコフ過程, 情報科学講座, A.5.1, 共立出版, 1966
- [8] 森村英典, 高橋幸雄, マルコフ解析, 日科技連出版社, 1979
- [9] Roosta, M., Routing through a network with maximum reliability, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1982, 88(2), 341-347.
- [10] S. Russell and P. Norvig, Artificial Intelligence: A Modern Approach, 3rd ed, Upper Saddle River, NJ:Prentice Hall, 2010.
- [11] Sobel, M. J., The variance of discounted Markov decision processes, Journal of Applied Probability, 1982, 19(4), 794-802.
- [12] Q. Wang, M. Kageyama, J.Y. Zhang, New evaluation criteria in the Markov decision processes, Journal of Statistics and Management Systems, 2021, 24(3), 625-632.