分解可能連続体に関する最近の話題について（Recent topics on some decomposable continua）

島根大学総合理工学部　松橋英市

1　序章

コンパクトかつ連結な距離空間を**連続体**（**continuum**）と呼ぶ。一般には、分解不可能連続体の方が分解可能連続体よりも構造が複雑であり、その複雑さゆえに興味深い現象を数多く示すことが知られているが、本稿では、分解可能連続体に関しても、分解不可能連続体に劣らないほど奇妙で興味深い現象が存在することを中心に紹介する。

注意　数理研での発表が終わった後、最終章に掲載を予定していた共通モデルと分解可能連続体に関する結果がそれほど面白いものではないことがわかり、その代わり共通モデルと分解不可能連続体に関するある定理が得られたので、そちらを最終章に掲載する。

2　特異な分解可能連続体の存在について

定義 2.1. X を連続体とする。X が**分解可能 (decomposable)** であるとは真部分連続体 $A, B \subsetneq X$ が存在して $X = A \cup B$ をみたすときにいう。X が分解可能ではないとき，X を**分解不可能 (indecomposable)** であるという。

さらに一段階複雑な概念として，任意の部分連続体がすべて分解不可能となる**遺伝的分解不可能連続体**（**hereditarily indecomposable continuum**）が存在する。

X を連続体とする。$C(X)$ によって，X に含まれるすべての部分連続体からなる集合を表し，位相はハウスドルフ距離により誘導されるものとする。この空間を X の**超空間**（**hyperspace**）と呼ぶ。$C(X)$ 自身も連続体となることが知られている。

次の定理は一見すると直感に反するように感じられる。しかし，これは連続体理論において極めてよく知られた基本的結果である。

定理 2.2. (Bing [2]) $n \geq 2$ あるいは $n = \infty$ とする。このとき，$C(I^n)$ において，遺伝的分解不可能連続体全体からなる集合は稠密な G_δ 集合である。

遺伝的分解不可能連続体とは対照的な概念として，次の定義を与える。

定義 2.3. 連続体 X のすべての部分連続体が分解可能であるとき，X を**遺伝的分解可能連続体（hereditarily decomposable continuum）**と呼ぶ。

注意. 次の定理から，遺伝的分解可能連続体は必ず位相次元が 1 であることが分かる。

定理 2.4. (Bing [1]) $n \geq 2$ とする。このとき，任意の n 次元連続体は，$(n-1)$ 次元の遺伝的分解不可能連続体を含む。

遺伝的に分解可能で，しかも 1 次元であるという条件を考えると，構成できる連続体はあまり複雑ではないように思われる。しかし Janiszewski は 1912 年に，平面内に，遺伝的分解可能で arc-like であり，しかも弧 (単位閉区間と同相な空間) をまったく含まない連続体が存在することを示した。ここで，連続体 X が **arc-like** であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，全射連続写像 $f\colon X \to [0,1]$ が存在し，f の各逆像の直径が ε 未満となることをいう。Janiszewski の例は，arc-like かつ遺伝的分解可能という一見単純そうな性質を持ちながら，弧を全く含まないという非常に複雑な挙動を同時に示すものである。

本論文で最初に述べる我々の結果は，この Janiszewski 連続体と密接に関係している。その準備として，次の定義を導入する。

定義 2.5. X を連続体とする。

1. X が ***D*-連続体**であるとは，互いに交わらない一点集合ではない二つの部分連続体 $A, B \subset X$ に対し，次を満たす部分連続体 $L \subset X$ が存在することをいう：
   - $A \cap L \neq \emptyset \neq B \cap L$,
   - $A \setminus L \neq \emptyset$ または $B \setminus L \neq \emptyset$.
2. X が ***D***-連続体**であるとは，上と同様の A, B に対し，次を満たす部分連続体 L が存在することをいう：
   - $A \cap L \neq \emptyset \neq B \cap L$,
   - $A \setminus L \neq \emptyset$.
3. X が ***D**-連続体**であるとは，上と同様の A, B に対し，次を満たす部分連続体 L が存在することをいう：
   - $A \cap L \neq \emptyset \neq B \cap L$,
   - $A \setminus L \neq \emptyset$ かつ $B \setminus L \neq \emptyset$.

D-連続体の概念は Lončar [12] により導入された。

定義 2.6. 連続体 X が **Wilder 連続体 (Wilder continuum)** であるとは，任意の相異なる 3 点 $x, y, z \in X$ に対して，x を含み，かつ y と z のうちちょうど一方のみを含む部分連続体 $K \subset X$ が存在することをいう。

Wilder-連続体の概念は Wilder [19] により導入された。

弧状連結な連続体は常に Wilder 連続体かつ D^*-連続体であり，また、それらは D^{**}-連続体である。そして、D-連続体は必ず分解可能となる。

例 1. (Espinoza–Matsuhashi [4]) arc-like かつ遺伝的分解可能であるが，D-連続体を含まない連続体が存在する。

例 2. (Matsuhashi–Oshima [13]) arc-like で遺伝的に D であるが，D^{**}-連続体を含まない連続体が存在する。

ここで「遺伝的 D」とは，すべての部分連続体が D-連続体であることを意味する（遺伝的 D^*，遺伝的 D^{**}, 遺伝的 Wilder, 遺伝的弧状連結も同様に定義される)。以上の二つの例から，arc-like で遺伝的 D^{**} であり，D^*-連続体を含まない連続体は存在するか？と問うのは自然であろう。しかし、この問いに対する答えは，次の結果により否定的である。

定理 2.7. (Matsuhashi–Oshima [13]) X を連続体とする。次は同値である。

1. X は arc-like な D^*-連続体である。
2. X は arc-like な D^{**}-連続体である。
3. X は arc-like な Wilder 連続体である。
4. X は弧である。

すなわち，arc-like 連続体の範囲では，D-連続体の場合には前述のような特異な例が現れる一方，わずかに条件を強めた D^{**}-連続体は結局弧に限られてしまうのである。さらに，この定理から次の系が直ちに従う。

定理 2.8. (Matsuhashi–Oshima [13]) X を連続体とする。次は同値である。

1. X は遺伝的 D^* である。
2. X は遺伝的 D^{**} である。
3. X は遺伝的 Wilder である。
4. X は遺伝的に弧状連結である。

注意. Wilder 連続体でありながら D^*-連続体や semiaposyndetic 連続体を含まない連続

体を構成できる。また、各正のホイットニーレベルが Wilder であるにもかかわらず、それ自身が Wilder 連続体を含まないような連続体も存在する。詳しくは [14] を参照されたい。もちろんそのような連続体は弧を含まない。

3 共通モデルについて

まず，次のよく知られた結果を挙げておく。

定理 3.1 (Hausdorff–Alexandroff)**.** 任意のコンパクト距離空間はカントール集合の連続像として表される。

この定理は，すべてのコンパクト距離空間が，カントール集合の商空間として得られることを意味している。これを踏まえると，「すべての連続体が，ある一つの連続体 X の連続像として実現されるような連続体 X は存在するか？」と問うのは自然であろう。ところが，下記の定理から分かるように，より狭い連続体のクラスに限定した場合でさえ上記の X は存在しない場合がある。

定理 3.2. (Waraszkiewicz [18]) 任意の連続体 Z に対して，半開区間 $[0,1)$ のコンパクト化 W_Z であって, 次の条件を満たすものが存在する：

- 剰余 $W_Z \setminus [0,1)$ は円周 S^1 に同相である。
- Z から W_Z への連続な全射は存在しない。

しかし一方局所連結連続体全体に対しては次の定理が成り立つことも有名である。その定理の紹介の前に一つ定義を導入する。

定義 3.3. $\mathcal{C}$ をある連続体のクラスとする。連続体 X が $\mathcal{C}$ の共通モデル **(common model)** であるとは，任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して C が X の連続像になっているときにいう。

定理 3.4. (Hahn-Mazurkiewicz) 単位閉区間は局所連結連続体全体からなるクラスの共通モデルとなっている。

また，次の定理も有名である。

定理 3.5. (Fearnley[5], Lelek[10], Mioduszewski[16]) Pseudo arc（= arc-like 遺伝的分解不可能連続体）は arc-like 連続体全体からなるクラスの共通モデルとなっている。

そこで，どのような連続体のクラスならば共通モデルをもつか（またはもたないか）を

調べることは自然であろう。

定理 3.6. (Fukaishi-Matsuhashi[6]) 任意の連続体 X に対して，以下を満たす連続体 Z が存在する：

- Z は分解不可能連続体であり，X を部分連続体として含む。
- $r : Z \to X$ なる開なレトラクションが存在し，任意の $x \in X$ に対して，逆像 $r^{-1}(x)$ はカントール集合に同相である。
- X と同相な空間からなる可算族 $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ が存在して，$Z = \mathrm{Cl}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i)$ が成り立つ。

連続体 X に対して定理 3.6にあるような Z 全体からなる集合族を $\mathbb{IC}_X$ とおく。

定理 3.7. (Matsuhashi-Ortega [15]) 任意の連続体 X に対して $\mathbb{IC}_X$ は共通モデルを持たない。

注意. さらに上記定理の Z はすべての正のホイットニーレベルが分解可能であるようにできることが分かった（現在執筆中)。このことから（よく知られていることだが)、とくに分解可能であることが Whitney reversible property ではないことがわかる。以上より、次のような問題を考えることは有意であるように思う。

問題. Whitney 性質ではない、または Whitney 可逆性質ではない連続体の性質 P のうち，その事実を示すために用いられる連続体のクラスが共通モデルをもたない，と主張できるのはどのような性質であろうか。

謝辞

本研究は、京都大学数理解析研究所における研究集会での発表およびその後の討論を通じて得られた示唆に基づいている。発表の場を提供してくださり、有益な議論の機会を与えてくださった京都大学数理解析研究所に深く感謝の意を表する。

参考文献

[1] R. H. Bing, *Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 267–273.

[2] R. H. Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific J. Math. **1**

(1951), 43–51.

[3] B. Espinoza and E. Matsuhashi, *Weakly Whitney preserving maps*, Topology Appl., **262** (2019), 90–108.

[4] B. Espinoza and E. Matsuhashi, *D-continua, D^*-continua and Wilder continua*, Topology Appl., **285** (2020), 25p.

[5] L. Fearnley, *Characterizations of the continuous images of the pseudo-arc*, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 380–399.

[6] S. Fukaishi and E. Matsuhashi, *Open retractions of indecomposable continua*, Colloq. Math. **148** (2017), no. 2, 191–194.

[7] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[8] H. Imamura, E. Matsuhashi and Y. Oshima, *Some theorems on decomposable continua*, Topology Appl., **343** (2024), 13p.

[9] J. Janiszewski, *Über die Begriffe "Linie" und "Fläche"*, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians II, Cambridge (1912), 126-128.

[10] A. Lelek, *On weakly chainable continua*, Fund. Math. **51** (1962/63), 271–282.

[11] H. Kato and E. Matsuhashi, *On surjective Bing maps,* Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **52** (2004), no.3, 329-333.

[12] I. Lončar, *D-continuum X admits a Whitney map for $C(X)$ if and only if it is metrizable*, Glas. Mat. Ser. III, **40**(60)(2005), 333-337.

[13] E. Matsuhashi and Y. Oshima, *Some decomposable continua and Whitney levels of their hyperspaces*, Topology Appl., **326** (2023), 9p.

[14] E. Matsuhashi, *Singular decomposable continua*, Topology Appl., **358** (2024), 16p.

[15] E. Matsuhashi and J.A.Ortega, *Open retractions of indecomposable continua, II*, to appear.

[16] J. Mioduszewski, *A functional conception of snake-like continua*, Fund. Math. **51** (1962/63), 179–189.

[17] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[18] Z. Waraszkiewicz, *Une famille indénombrable de continus plans dont aucun n'est l'image continue d'un autre*, Fund. Math. **18** (1932), 118–137.

[19] B. E. Wilder, *Concerning point sets with a special connectedness property*, Colloq.

Math., **19** (1968), 221-224.