順序可能空間達の位相和の順序可能性
-Orderability of the topological sum of orderable spaces-

[(*)] 大分大学・教育マネジメント機構　家本 宣幸
Nobuyuki Kemoto
Institute for Educational Management,
Oita University

概要

この報告書は、本研究者が [2] で発表した研究の要約と未解決問題の提唱である。

一般に、性質 P についての次の命題 $(*)$ を考えよう。

$(*)$ 位相空間 X, Y が性質 P を持てば、その位相和 $X \bigoplus Y$ も性質 P を持つ。

たとえば、 P としてコンパクト、距離化可能、リンデレーフなどの殆どの基本的な位相的性質はこの命題をみたす。一方、連結性はこの命題をみたさないことは明らかである。また、実数 $\mathbb{R}$ の部分空間 $(0,1)_{\mathbb{R}} \cup \{2\}$ は順序位相空間 $(0,1))_{\mathbb{R}}$ と一点順序位相空間 $\{2\}$ の位相和であるが、順序位相空間にならないことは良く知られている。

この報告書では、 X, Y が順序位相空間のとき、どのような場合にその位相和 $X \bigoplus Y$ が順序位相空間になるかを考察する。

1　序

$<$ を集合 X 上の順序 ([1, p.4]) とするとき、対 $\langle X, < \rangle$ は順序集合とよばれる。このとき、 $\{(\leftarrow, x)_< : x \in X\} \cup \{(x, \rightarrow)_< : x \in X\}$ を含む最小の位相 を $\lambda_<$ で表し、順序位相と言う。トリプル $\langle X, <, \lambda_< \rangle$ を順序位相空間とよび、単に X と表すこともある。ここで $(\leftarrow, x)_< = \{y \in X : y < x\}$ である。$(x, \rightarrow)_<, (x, y]_<$ 等も同様に定義できる。混乱がない時は、単に $(\leftarrow, x), (x, \rightarrow), (x, y]$ と表す。

位相空間 $\langle X, \tau\rangle$ は、X 上の順序 $<$ が取れて、$\tau = \lambda_<$ とできるとき、順序化可能という。また、位相空間 $\langle X, \tau\rangle$ がある順序化可能位相空間の部分空間となるとき、部分順序化可能という。混乱がない時は、位相空間 $\langle X, \tau\rangle$ も単に X と表す。

$\mathcal{X}$ を互いに素な位相空間の集まりとする。すなわち、 $X \neq Y \in \mathcal{X}$ のとき $X \cap Y = \emptyset$ である。ここで、位相空間 X 達を $X = \langle X, \tau_X\rangle$ と表し、$\bigoplus_{X\in\mathcal{X}} \tau_X$ を $\bigcup_{X\in\mathcal{X}} \tau_X$ を含む最小の $\bigcup \mathcal{X}$ 上の位相とし、位相空間 $\bigoplus \mathcal{X} = \langle \bigcup \mathcal{X}, \bigoplus_{X\in\mathcal{X}} \tau_X\rangle$ を考える。この位相空間を $\mathcal{X}$ の位相和という。特に $\mathcal{X} = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ と表されているときは、 $\bigoplus \mathcal{X}$ を $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ と表す。今後、位相空間の集まり $\mathcal{X}$ の位相和を考えるときは、 $\mathcal{X}$ は空でなく、互いに素とする。$\mathcal{X}$ として、順序化可能空間の集まりとしての $\mathcal{X}$ と 順序位相空間の集まりとしての $\mathcal{X}$ の両方を区別して考える。

2　順序分解

位相空間 X が順序位相空間の集まり $\mathcal{X}$ の位相和 $X = \bigoplus \mathcal{X}$ と表されているとき、 $\mathcal{X}$ を X の順序分解という。実数 $\mathbb{R}$ の部分空間 $X = (0,\ 1)_{\mathbb{R}} \cup \{2\}$ は順序化可能ではないことが知られている。このとき $\mathcal{X} = \{(0,1)_{\mathbb{R}}, \{2\}\}$ は X の順序分解と考えることができるので、二つの順序化可能空間の位相和が必ずしも順序化可能にならないことがわかる。

$\mathcal{X}$ が最大または最小を持つ順序集合の集まりであれば、その位相和 $\bigoplus \mathcal{X}$ は順序化可能であることが知られている [3]。ここでは位相空間 X がどのような順序分解を持てば順序化可能かを考察する。そのためには次の定義が必要である。

定義 2.1.　順序位相空間 $X = \langle X, <, \lambda_<\rangle$ について

- X が 0 型とは、それが最大も最小も持たないことを言う、
- X が 1 型とは、それが最大か最小のいずれか一方をもつことを言う、
- X が 2 型とは、それが最大も最小も持つことを言う。

特に X が一点集合のときは、X は 2 型と見なす。また、 $\mathcal{X}$ が順序位相空間の集まりのとき、 $i \in 3\ (= |0, 1, 2\})$ に対して、

$$\mathcal{X}^i = \{X \in \mathcal{X} : X \text{ は } i \text{ 型 }\}$$

とおくと $\mathcal{X}$ は $\mathcal{X}^0$, $\mathcal{X}^1$ と $\mathcal{X}^2$ の三つに分解されることがわかる。

更に $<$ を X 上の順序とするとき、 $<^{-1}$ でその逆順序を表す、すなわち $x <^{-1} y \Leftrightarrow y < x$ である。逆順序は元の順序と同じ型で、順序位相を変えないことに注意しよう。

定義 2.2. $\mathcal{X}$ を順序位相空間の集まりとし、基数 $\kappa \geq 1$ を使って $\mathcal{X} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ と

表されているとする。 $X=\bigcup_{\alpha<\kappa}X_\alpha$ とおいて、$<_\alpha$ を X_α 上の順序、 $\lambda_{<_\alpha}$ をその順序位相とする。各 $x\in X$ に対し $\alpha(x)$ を $x\in X_\alpha$ をみたす唯一の $\alpha<\kappa$ とする。

記号 $\Sigma_{\alpha<\kappa}{<_\alpha}$ は次のルールで定義できる X 上の順序 $<$ とする。

$$x<y\Leftrightarrow\begin{cases}x<_{\alpha(x)}y & \alpha(x)=\alpha(y)\text{ のとき、}\\ \alpha(x)<\alpha(y) & \text{それ以外のとき。}\end{cases}$$

$\kappa<\omega$ のとき、 $\Sigma_{\alpha<\kappa}{<_\alpha}$ を ${<_0}+{<_1}+\cdots+{<_{\kappa-1}}$ と表す。特に ${<_0}+{<_1}$ は順序集合 X_0 の後ろに順序集合 X_1 をつけた $X_0\cup X_1$ 上の順序となる。また $\kappa=\omega$ のとき、$\Sigma_{\alpha<\kappa}{<_\alpha}$ を ${<_0}+{<_1}+{<_2}+\cdots$ と書くことにする。更に順序集合 $\langle X,\Sigma_{\alpha<\kappa}{<_\alpha}\rangle$ から決まる順序位相空間を単に $\Sigma_{\alpha<\kappa}X_\alpha$ と表すことにする。

次は $\bigoplus_{\alpha<\kappa}X_\alpha=\Sigma_{\alpha<\kappa}X_\alpha$ となるための必要十分条件を与える。

補題 2.3. $\{X_\alpha:\alpha<\kappa\}$ を $\kappa\geq 1$ なる基数 κ でインデックス付けられた順序位相空間達の集まりとする。$<$ を上で定義された順序 $\Sigma_{\alpha<\kappa}{<_\alpha}$ とする、ここで $<_\alpha$ は X_α 上の順序である。このとき、 $\lambda_<=\bigoplus_{\alpha<\kappa}\lambda_{<_\alpha}$ が成立する (すなわち、位相和 $\bigoplus_{\alpha<\kappa}\lambda_{<_\alpha}$ が順序 $<$ で順序化可能である) ことの必要十分条件は、 各 $\alpha<\kappa$ について $X_\alpha\in\lambda_<$ が成り立つことである。

3 順序化可能性

適当に逆順序を利用しながら、前節最後の補題を使うと、$\kappa=2$ について次が示せる。

補題 3.1. 次が成立する。

(1) X_0 と X_1 がともに型 0 の順序位相空間なら、位相和 $X_0\oplus X_1$ は型 0 の順序で順序化可能である、

(2) X_0 と X_1 がともに型 1 の順序位相空間なら、位相和 $X_0\oplus X_1$ は型 0 の順序で順序化可能である、

(3) X_0 と X_1 がともに型 2 の順序位相空間なら、位相和 $X_0\oplus X_1$ は型 2 の順序で順序化可能である、

(4) X_0 が型 0 で X_1 が型 1 の順序位相空間なら、位相和 $X_0\oplus X_1$ は型 1 の 順序で順序化可能である、

(5) X_0 が型 1 で X_1 が型 2 の順序位相空間なら、位相和 $X_0\oplus X_1$ は型 1 の 順序で

順序化可能である。

$\kappa > 2$ の場合について考察する。まず、型 0 の順序位相空間の集まりのときを考察する。

補題 3.2. $\kappa > 2$ とする。$\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ を型 0 の順序位相空間の集まりとすると、位相和 $\bigoplus_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ は型 0 の順序で順序化可能である、

これは単に $\Sigma_{\alpha<\kappa} <_\alpha$ を考えればよい。次に、型 1 の順序位相空間の集まりのときを考察する。

補題 3.3. $\kappa > 2$ とする。$\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ を型 1 の順序位相空間の集まりとすると次が成立する。

(1) もしある自然数 $n \in \omega$ を使って $\kappa = 2n + 1$ と表せるなら、位相和 $\bigoplus_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ は型 1 の順序で順序化可能である、
(2) それ以外のときは、位相和 $\bigoplus_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ は型 0 の順序で順序化可能である、

最後に、型 2 の順序位相空間の集まりのときを考察する。

補題 3.4. $\kappa > 2$ とする。$\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ を型 2 の順序位相空間の集まりとすると次が成立する。

(1) もし κ が有限なら、位相和 $\bigoplus_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ は型 2 の順序で順序化可能である、
(2) それ以外のときは、位相和 $\bigoplus_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ は型 1 の順序で順序化可能である、

これらを利用して次を示す。

補題 3.5. $\mathcal{X}$ を型 0 または型 1 の順序位相空間の集まりとすると、位相和 $\bigoplus \mathcal{X}$ は型 0 または型 1 に順序化可能である。

これは次のようにして示す。各 $i \in 2 = \{0, 1\}$ について, $\mathcal{X}^i$ を基数 κ_i で並べる。$\kappa_0 = 0$ か $\kappa_1 = 0$ なら, 補題 3.1, 3.2, 3.3 から明らかなので、 $\kappa_0 \geq 1$ かつ $\kappa_1 \geq 1$ のときを考察すればよい。補題 3.2 から位相和 $\bigoplus \mathcal{X}^0$ は型 0 の順序で順序化可能。補題 3.3 から位相和 $\bigoplus \mathcal{X}^1$ は型 0 または型 1 の順序で順序化可能。補題 3.1 (1) または (4) から位相和 $\bigoplus \mathcal{X} = \bigoplus \mathcal{X}^0 \oplus \bigoplus \mathcal{X}^1$ は型 0 または 1 の順序で順序化可能。

これを利用して次が示せる。

定理 3.6. 空間 X が順序可能空間の集まり $\mathcal{Y}$ の位相和 $X = \bigoplus \mathcal{Y}$ で表されているとする。このとき $\mathcal{Y}$ が次の (1) か (2) のどちらかをみたせば、X は順序化可能である。

(1) ある $Y \in \mathcal{Y}$ と Y の順序分解 $\mathcal{Z}_Y$ が存在して $\mathcal{Z}_Y^1 \neq \emptyset$、

(2) 順序分解の列 $\langle \mathcal{Z}_Y : Y \in \mathcal{Y} \rangle$ が存在して $\bigcup_{Y\in\mathcal{Y}} \mathcal{Z}_Y^0 = \emptyset$、または $\bigcup_{Y\in\mathcal{Y}} \mathcal{Z}_Y^2$ は空集合または無限。

これから次がわかる。

系 3.7. X が次のどれかをみたす順序分解 $\mathcal{X}$ を持つとすると、X は順序化可能である。

(1) $\mathcal{X}^0 = \emptyset$ *[3, Lemma 5]*、

(2) $\mathcal{X}^1 \neq \emptyset$、

(3) $\mathcal{X}^2$ は空または有限、

(4) $\mathcal{X}$ は 型 0 でジャンプを持つ順序位相空間を含む、

(5) $\mathcal{X}$ は 型 2 でギャップを持つ順序位相空間を含む、

(6) $\mathcal{X}$ は無限個の一点集合を含むか、無限疎空間を含む、

(7) $\mathcal{X}$ は有理数 $\mathbb{Q}$ か無理数 $\mathbb{P}$ に同相な位相空間を含む。

ここで、順序位相空間 X がジャンプを持つとは、$x < y$ をみたす $x, y \in X$ が存在して $(x, y) = \emptyset$ となることである。順序位相空間 X がギャップを持つとは、X が次の条件をみたす 互いに素な二つの空でない部分集合 A、B の和で表されることである。

- $\forall a \in A \forall b \in B\ (a < b)$、
- A は最大をもたず、B は最小を持たない。

また、すべての点が孤立点であるとき、位相空間は疎であると言われる。

4 局所連結空間

前節の定理を使うと、X が局所連結順序化可能空間の位相和で表されているときは、X の順序化可能性を特徴付けできる。

定理 4.1. 位相空間 X がある局所連結順序可能空間の集まり $\mathcal{Y}$ の位相和 $X = \bigoplus \mathcal{Y}$ と表さているとき、X が順序化可能である必要十分条件は、$\mathcal{Y}$ が定理 *3.6* の (1) か (2) のどちらかをみたすことである。

これから次がわかる。

系 4.2. X は局所連結空間とする。このとき X が順序化可能であることの必要十分条件は、X の連結成分の集まり $\mathcal{Y}$ が次の (A) と (B) の両方をみたすことである。

(A) すべての $Y \in \mathcal{Y}$ について、 Y は順序化可能、

(B) 次の (1) か (2) のどちらかをみたす。

(1) $\mathcal{Y}^1 \neq \emptyset$、

(2) $\mathcal{Y}^0 = \emptyset$ であるか、 $\mathcal{Y}^2$ は空集合であるか無限。

この系から先の実数の部分空間 $(0,1)_{\mathbb{R}} \cup \{2\}$ は順序可能でないことがすぐわかる。

例 4.3. 上の系を適用すれば次がわかる。

- $1 \leq n < \omega$ のとき、 $\mathbb{R}$ の部分空間 $(-2,-1)_{\mathbb{R}} \cup \bigcup_{k<n}[k, k+\frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ は順序化可能でない、
- $\mathbb{R}$ の部分空間 $(-2,-1)_{\mathbb{R}} \cup \bigcup_{k\in\omega}[k, k+\frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ は順序化可能である、
- $1 \leq n < \omega$ のとき、 $\mathbb{R}$ の部分空間 $[-2,-1]_{\mathbb{R}} \cup \bigcup_{k<n}(k, k+\frac{1}{2})_{\mathbb{R}}$ は順序化可能でない、
- $\mathbb{R}$ の部分空間 $[-2,-1]_{\mathbb{R}} \cup \bigcup_{k\in\omega}(k, k+\frac{1}{2})_{\mathbb{R}}$ は順序化可能でない、
- $1 \leq n < \omega$ のとき、$\mathbb{R}$ の部分空間 $(-4,-3]_{\mathbb{R}} \cup (-2,-1)_{\mathbb{R}} \cup \bigcup_{k<n}[k, k+\frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ は順序化可能である。

部分順序化可能性については次がわかる。

系 4.4. 空間 X が部分順序化可能空間の集まり $\mathcal{Y}$ によって、位相和 $X = \bigoplus \mathcal{Y}$ と表されているなら、X は部分順序化可能である。

最後に次を問いたい。

問題 4.5. 空間 X が順序化可能空間の集まり $\mathcal{Y}$ によって、位相和 $X = \bigoplus \mathcal{Y}$ と表されているとき、 X の順序化可能を特徴付けよ。

謝辞

この研究を支援していただいた JSPS 科研費 JP21K03339 および京都大学数理解析研究所に感謝したい。

参考文献

[1] R. Engelking, *General Topology-Revised and completed ed.*. Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[2] N. Kemoto, *Orderability of spaces having ordered decompositions*, Top. Proc., 67 (2026) 39-49. (E-published on June 29, 2025)

[3] U. Marconi, *On a theorem about orderability*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 50 (2001), no. 3, 543-546.

E-mail address : nkemoto@oita-u.ac.jp