irreducible 空間への埋め込みについて

神奈川大学・工学部　平田　康史[*1]
Yasushi Hirata
Faculty of Engineering, Kanagawa University

神奈川大学　矢島　幸信
Yukinobu Yajima
Kanagawa University

1 Introduction

空間はすべてハウスドルフ位相空間とする. 基数 κ に対して, 集合 $\kappa = \{\alpha : \alpha < \kappa\}$ を離散空間とみなしたものを $\mathbb{D}(\kappa)$ で表す. $\mathbb{N} = \mathbb{D}(\omega) = \{0, 1, 2, \cdots\}$ は可算無限離散空間を表す.

空間の irreducible 性は, 1950 年に Arens と Dugundji により導入されたクラシカルな概念である.

定義 1 ([2])**.** 空間 X の開被覆 $\mathcal{V}$ は, どれか 1 つでも $V \in \mathcal{V}$ を取り除くと $\mathcal{V} \setminus \{V\}$ が X を被覆しないとき, **極小**であるという. 空間の任意の開被覆が極小な開被覆で細分できるとき, その空間は **irreducible** であるという.

注意 1.1. irreducible な空間の閉部分空間はかならずしも irreducible ではない. [3]

irreducible 性を導く十分条件としては, 次の implication が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
\text{距離空間} \arrow[r] \arrow[dr] & D\text{-空間} \arrow[r] & \text{irreducible} \\
\text{パラコンパクトな一般順序空間} \arrow[r] \arrow[ur] & \text{パラコンパクト} \arrow[r] & \text{submetalindelöf} \arrow[u] \\
\text{コンパクト} \arrow[r] & \text{正則かつ Lindelöf} \arrow[r] \arrow[u] & \text{Lindelöf} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

[*1] 本研究は科研費 (課題番号:23K03206) の助成を受けたものである.

$\mathbb{N}^{\omega_1}$ は submetalindelöf, 正規, 可算メタコンパクト, D-空間のいずれの性質ももたない. ところが, $\mathbb{N}^{\omega_1}$ は irreducible である. このことは, われわれが 2024 年に証明した次の定理の系として得られる.

定理 1.2 ([6])**.** 任意の空間 Y と無限基数 κ について, Y^κ が irreducible であることと, $e^+(Y^\kappa) = L^+(Y^\kappa)$ が成り立つことは同値である.

ここで出てくる $e^+(X)$ と $L^+(X)$ は, 空間 X の **extent** $e(X)$ と **Lindelöf degree** $L(X)$ の定義内の「κ 以下」を「κ 未満」に変えることで得られる基数関数である.

$$
\begin{aligned}
e(X) &\overset{\text{def}}{=} \min\{\kappa : X \text{ の任意の閉離散部分集合の濃度は } \kappa \text{ 以下 }\},\\
L(X) &\overset{\text{def}}{=} \min\{\kappa : X \text{ の任意の開被覆は濃度 } \kappa \text{ 以下の部分被覆をもつ }\},\\
e^+(X) &\overset{\text{def}}{=} \min\{\kappa : X \text{ の任意の閉離散部分集合の濃度は } \kappa \text{ 未満 }\},\\
L^+(X) &\overset{\text{def}}{=} \min\{\kappa : X \text{ の任意の開被覆は濃度 } \kappa \text{ 未満の部分被覆をもつ }\},
\end{aligned}
$$

ただし, κ は無限基数とする.

$e^+(X)$ や $L^+(X)$ は, 空間 X の性質を $e(X)$ や $L(X)$ より詳細に表している. 例えば, 空間 X がコンパクトであることは $L^+(X) = \omega$, Lindelöf であることは $L^+(X) \leq \omega_1$ と同値になるが, どちらの場合も $L(X) = \omega$ である.

事実 1.3. (well-known) 一般に $e^+(X) \leq L^+(X)$ が成り立つ. irreducible 空間 X では, $e^+(X) = L^+(X)$ である.

逆は一般には成り立たないが, 定理 1.2 のように, ある程度の制限をすることで, 逆が導かれる場合があることが最近のわれわれの研究でわかった.

定理 1.4 ([8])**.** 一般順序空間 X が irreducible であるためには, X の任意の閉凸部分集合 I について $e^+(I) = L^+(I)$ が成り立つことが必要十分である.

定理 1.5 ([8])**.** 単調正規空間 X が irreducible であるためには, X の任意の閉部分空間 E, F について, $E \subset \mathrm{Int}_X F$ ならば $L^+(E) \leq e^+(F)$ であることが必要十分である.

このようなことから, $e^+(X)$ と $L^+(X)$ は空間の irreducible 性を調べる上で重要な要素であるといえるだろう.

2 空間の冪乗の irreducible 性

空間 Y の冪乗 Y^κ の irreducible 性についての素朴な疑問を考えてみたい.

疑問 2.1. 次の (1)〜(4) の条件をみたすような空間 Y はそれぞれ存在するか?
(1) すべての基数 κ に対して Y^κ は irreducible.
(2) Y は irreducible でないが, ある基数 $\kappa \geq 2$ に対して Y^κ が irreducible.
(3) 1 以上のいかなる基数 κ に対しても Y^κ は irreducible でない.
(4) Y は irreducible であるが, ある基数 $\kappa \geq 2$ に対して Y^κ が irreducible でない.

(1) は簡単である．あらゆるコンパクト空間 Y は (1) の条件を満たしている．次に (2) を考えてみる．irreducible な空間の閉部分空間は irreducible とはかぎらないので, (2) が直ちに否定されるものではないことにまず注意されたい．一般に, $e^+(Y) \leq L^+(Y)$ が成り立ち, Y が irreducible な場合は $e^+(Y) = L^+(Y)$ であった．irreducible でない空間 Y を手っ取り早く見つけるには, $e^+(Y) < L^+(Y)$ である空間 Y をもってくればよい.

例えば, 可分距離空間 X_λ たちからなる proper な Σ-積空間 $\Sigma = \Sigma(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \vec{a})$ は $e^+(\Sigma) \leq \omega_1 < L^+(\Sigma)$ である [5]．正則非可算基数 κ の定常 (stationary) な部分空間 S は $e^+(S) \leq \kappa < L^+(S)$ である．特に, ω_1 や $\omega_1 \setminus \{\omega\}$ はいずれも irreducible でない.

空間 X が空間 Z のある閉部分空間と同相なとき, X は Z に**閉部分空間として埋め込める**という．そのようになっているとき, $e^+(X) \leq e^+(Z)$, かつ, $L^+(X) \leq L^+(Z)$ であることは簡単にわかる.

Y を空間とする．Y が irreducible であるかどうかにかかわらず, Y^κ が irreducible になることはじつはめずらしくない．Y は Y^κ に閉部分空間として埋め込めるので,

- 1 以上の任意の基数 κ に対して, $e^+(Y) \leq e^+(Y^\kappa)$.
- 無限基数 κ については, Y^κ が irreducible $\Leftrightarrow$ $e^+(Y^\kappa) = L^+(Y^\kappa)$. (定理 1.2)

空間 Z の **weight** を $w(Z)$ で表す．ただし, Z が有限個しか点をもたない場合は $w(Z) = \omega$ とする.

- $w(Y) \leq \kappa$ ならば, ($L(Y^\kappa) \leq w(Y^\kappa) \leq \kappa$ なので)
  $e^+(Y^\kappa) \leq L^+(Y^\kappa) \leq (L(Y^\kappa))^+ \leq \kappa^+$.
- $w(Y) \leq \kappa < e^+(Y^\kappa)$ ならば, ($e^+(Y^\kappa) = L^+(Y^\kappa) = \kappa^+$ なので) Y^κ は irreducible.

以上より, 次の補題が得られた.

補題 2.2. 空間 Y と基数 κ について, $w(Y) \leq \kappa < e^+(Y^\kappa)$ ならば, Y^κ は irreducible.

系 2.3. 空間 Y と基数 κ について, 次の implication が成り立つ.
$w(X) \leq \kappa$ となる空間 X があって, $Y = X \oplus \mathbb{D}(\kappa)$
$\Rightarrow$ $w(Y) = \kappa < e^+(Y)$
$\Rightarrow$ Y^κ は irreducible

irreducible 空間の閉部分空間は irreducible とはかぎらないが, clopen な部分空間は irreducible である. $X = (\omega_1 + \omega_1) \setminus \omega_1$, $Y = X \oplus \mathbb{D}(\omega_1)$ とすれば, X は ω_1 と同相なので, Y は irreducible ではない. しかし, $w(X) = \omega_1$ なので, Y^{ω_1} は irreducible である. よって, この空間 Y は疑問 2.1 (2) の例になっている.

例 2.4. $Y := ((\omega_1 + \omega_1) \setminus \omega_1) \oplus \mathbb{D}(\omega_1)$ は irreducible ではないが, Y^{ω_1} は irreducible である.

1964 年に Mycielski は次の定理を示している.

定理 2.5 ([10])**.** 無限基数 κ 以下に弱到達不可能基数が存在しないならば, $e^+(\mathbb{N}^\kappa) > \kappa$.

この定理と補題 2.2 をあわせると, 次の命題が得られる.

命題 2.6. 可算コンパクトではない空間 Y と, $w(Y) \leq \kappa$ である基数 κ について, κ 以下に弱到達不可能基数が存在しないならば, Y^κ は irreducible である.

Proof. $\mathbb{N}$ は Y に閉部分空間として埋め込めるので, $\mathbb{N}^\kappa$ は Y^κ に閉部分空間として埋め込める. よって, $w(Y) \leq \kappa < e^+(\mathbb{N}^\kappa) \leq e^+(Y^\kappa)$. □

$Y = \mathbb{N}$, $\kappa = \omega_1$ としてこの命題を適用すれば,

例 2.7. $\mathbb{N}^{\omega_1}$ は irreducible である.

ω_1 の定常な部分空間 $Y = \omega_1 \setminus \{\omega\}$ は irreducible でない. $\mathbb{N} = \omega$ はこの空間 Y の閉部分空間なので, Y は可算コンパクトではない. 命題 2.6 より, この Y もまた疑問 2.1 (2) の例になっている.

例 2.8. $Y := \omega_1 \setminus \{\omega\}$ は irreducible ではないが, Y^{ω_1} は irreducible である.

次に, 疑問 2.1 の (3) 「1 以上のいかなる基数 κ に対しても Y^κ は irreducible でない」ような空間 Y が存在するかどうかを考える. そのような空間 Y はコンパクトではないが, Y の weight がそれほど大きくないならば, Y は可算コンパクトである必要があることが命題 2.6 からわかる.

空間の任意の可算部分集合がコンパクトな閉包をもつとき, その空間は **ω-bounded** であるという. そのような空間は明らかに可算コンパクトである.

命題 2.9 ([7])**.** ω-bounded であるがコンパクトではない空間 Y については, 1 以上のいかなる基数 κ に対しても Y^κ は irreducible でない.

この命題が成り立つことは, 次の 3 つの implication からわかる.
(1) Y は ω-bounded $\Rightarrow Y^\kappa$ は ω-bounded $\Rightarrow Y^\kappa$ は可算コンパクト $\Leftrightarrow e^+(Y^\kappa) = \omega$.
(2) Y^κ は irreducible $\Rightarrow e^+(Y^\kappa) = L^+(Y^\kappa)$.
(3) $L^+(Y^\kappa) = \omega \Leftrightarrow Y^\kappa$ はコンパクト $\Leftrightarrow Y$ はコンパクト. □

系 **2.10.** $\mathrm{cf}\,\mu > \omega$ である順序数 μ については, 1 以上のいかなる基数 κ に対しても μ^κ は irreducible でない.

特に, $Y = \omega_1$ は疑問 2.1 (3) の空間の例である.

疑問 2.1 の (4)「Y は irreducible であるが, ある基数 $\kappa \geq 2$ に対して Y^κ が irreducible でない」ような空間 Y が存在するかどうか, についてはこれも答えは肯定的である. 2008 年の論文 [1] で Alas, Junqueira, Wilson は, D-空間 X_0, X_1 の積空間 $Z = X_0 \times X_1$ で, D-空間ではないものの存在を証明している. その証明では, Z に irreducible ではない閉部分空間 Δ が存在することを示すことで, Z が D-空間ではないことを示しているが, Z そのものが irreducible かどうかは明示されていない. じつは, 彼らが作ったものと同様の例 $Z = X_0 \times X_1$ は, irreducible にすることも, irreducible でなくすることもできることが, 最近のわれわれの研究でわかった (プレプリント作成中, 後者は [9]). $Z = X_0 \times X_1$ が irreducible でないようにとれば, $Y = X_0 \oplus X_1$ とすることで, $\kappa = 2$ での疑問 2.1 (4) の例 Y が得られる. 実際, Y は irreducible な空間 X_0, X_1 の直和なので irreducible であり, Y^2 は irreducible でない clopen な部分空間 $Z = X_0 \times X_1$ をもつので irreducible ではない.

以上で, 疑問 2.1 の (1)-(4) のいずれの Y も存在することがわかった. なお, 本節で示した (2) の例で, Y^κ が irreducible であることが示されている κ はいずれも無限基数であるので, 次の問題はまだ考察の余地があるかもしれない.

問題 **2.11.** 次の条件をみたすような空間 Y はそれぞれ存在するか?
(2') Y は irreducible でないが, Y^2 は irreducible.
(4') Y と Y^3 は irreducible であるが, Y^2 は irreducible でない.

3 irreducible 空間への閉部分空間としての埋め込み

irreducible 空間の閉部分空間はかならずしも irreducible であるとはかぎらないが, さらに次のようなことも知られている.

定理 3.1 (Davis-Grabner-Grabner [4])**.** 任意の (Tychonoff) 空間 X は, ある irreducible な (Tychonoff) 空間 Z に閉部分空間として埋め込める.

空間 Z に対して一般に $e^+(Z) \le L^+(Z)$ であり, Z が irreducible ならば $e^+(Z) = L^+(Z)$ であった. よって, 空間 X が irreducible な空間 Z に閉部分空間として埋め込めるならば, 不等式

(*) $e^+(X) \le L^+(X) \le L^+(Z) = e^+(Z)$

が成り立つ.

$e^+(X) < L^+(X)$ である空間 X は irreducible でないものの典型例である. X に十分な大きさの閉離散部分集合が存在しないため, X は irreducible ではありえない. このような空間 X も, irreducible な空間 Z に閉部分空間として埋め込める. X にはなかった十分な大きさの閉離散部分集合が Z には追加されているため, Z は irreducible になることができていると考えられる. $L^+(Z) = e^+(Z)$ は不等式 (*) が成り立つ大きさにする必要があるが, これを必要最小限の大きさで抑えることができるか, という疑問が生じる.

疑問 3.2. (1) 任意の (Tychonoff) 空間 X は, $L(Z) = L(X)$ である irreducible な (Tychonoff) 空間 Z に閉部分空間として埋め込めるか?
(2) 任意の (Tychonoff) 空間 X は, $L^+(Z) = L^+(X)$ である irreducible な (Tychonoff) 空間 Z に閉部分空間として埋め込めるか?

$L^+(Z) = L^+(X)$ ならば $L(Z) = L(X)$ なので, (2) の答えが肯定的ならば, (1) も肯定的である.

Davis, Grabner, Grabner が定理 3.1 の証明で作った例 Z は以下のようなものである.

- 集合として $Z = X \times (\omega + 1)$,
- $X \times \omega$ の各点は Z における孤立点,
- $X \times \{\omega\}$ の各点での Z における近傍フィルターは, 通常の Tychonoff 積 $X \times (\omega+1)$ での近傍フィルターと同じ.

この例では, X が無限個の点をもつとき,

- $e(Z) = L(Z) = |Z| = |X|$,
- $e^+(Z) = L^+(Z) = |X|^+$,
- $w(Z) = \max\{w(X), |X|\}$,

である．$L(X) < |X|$ となるような空間 (例えば $L(\aleph_{\omega_1}) = \omega_1 < \aleph_{\omega_1} = |\aleph_{\omega_1}| = w(\aleph_{\omega_1})$) では, $L(X) < L(Z)$ であるため, これは疑問 3.2 の答えにはなっていない.

系 2.3 を使って定理 3.1 の例 Z を作ることもできる．空間 X の weight $\kappa = w(X)$ をとって $Y = X \oplus \mathbb{D}(\kappa)$ とすれば, $Z = Y^\kappa$ は irreducible であり, X は Z に閉部分空間として埋め込める．この例では,

- $e(Z) = L(Z) = w(Z) = w(X)$,
- $e^+(Z) = L^+(Z) = (w(X))^+$,
- $|Z| = \max\{|X|, w(X)\}^{w(X)}$,

である．$L(X) < w(X)$ となるような空間 (例えば $L(\omega_2+\omega_1) = \omega_1 < \omega_2 = w(\omega_2+\omega_1)$) では, $L(X) < L(Z)$ であるため, これもまた疑問 3.2 の答えにはなっていない.

次の補題は, 定理 1.2 の証明の一般化である.

補題 3.3 ([7])**.** 空間 Z が以下の条件を満たせば, Z は irreducible である.

(i) Z の base $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$,
(ii) $L^+(Z) \le e^+(Y)$ となる空間 Y,
(iii) 連続写像 $f_m : Z \to Y$ の列 $\langle f_m : m \in \omega\rangle$
が存在して, 次の性質をもつ；
(iv) 任意の $z \in Z$, $y \in Y$, $m \in \omega$ に対して, $d \in Z$ が存在して,
(iv-1) $\{B \in \bigcup_{n\le m} \mathcal{B}_n : d \in B\} = \{B \in \bigcup_{n\le m} \mathcal{B}_n : z \in B\}$,
(iv-2) $f_m(d) = y$.

この補題を使って, 次の命題が得られた.

命題 3.4 ([7])**.** 無限基数 κ について,

$$\mathbb{D}^\omega_{\mathrm{fin}}(\kappa) := \{\tilde{y} \in (\mathbb{D}(\kappa))^\omega : m \in \omega \text{ があって, } \tilde{y} \restriction (\omega \setminus m) \text{ は定数関数 }\}$$

とせよ．この $\mathbb{D}^\omega_{\mathrm{fin}}(\kappa)$ は Tychonoff 空間で,

- $w(\mathbb{D}^\omega_{\mathrm{fin}}(\kappa)) = |\mathbb{D}^\omega_{\mathrm{fin}}(\kappa)| = \kappa$, $e^+(\mathbb{D}^\omega_{\mathrm{fin}}(\kappa)) = \kappa^+$,
- $L(X) \le \kappa$ である任意の空間 X に対して, $Z = X \times \mathbb{D}^\omega_{\mathrm{fin}}(\kappa)$ は irreducible.

定理 3.5 ([7])**.** 任意の (Tychonoff) 空間 X は,

$$|Z| = |X|,\ w(Z) = w(X),\ L(Z) = L(X)$$

である irreducible な (Tychonoff) 空間 Z に閉部分空間として埋め込める.

Proof. $|X| \geq \omega$ ならば, $\omega \leq L(X) \leq w(X), |X|$. 命題 3.4 を $\kappa = L(X)$ で適用すればよい. $|X| < \omega$ の場合は $Z = X$ でよい. □

これで疑問 3.2 の (1) は肯定的に解決された. (2) はどうだろうか?

系 3.6 ([7])**.** $L^+(X)$ が ω か後者型基数であるような任意の (Tychonoff) 空間 X は,

$$|Z| = |X|,\ w(Z) = w(X),\ L^+(Z) = L^+(X)$$

である irreducible な (Tychonoff) 空間 Z に閉部分空間として埋め込める.

Proof. $L^+(X) = \omega$ の場合は X はコンパクトなので, $Z = X$ でよい. $L^+(X) = \kappa^+$ の場合は, $L(X) = \kappa$ である. 定理 3.5 を適用せよ. $\kappa^+ = L^+(X) \leq L^+(Z) \leq (L(Z))^+ = (L(X))^+ = \kappa^+$ なので, $L^+(Z) = L^+(X)$ である. □

$L^+(X) = \kappa$ が極限基数の場合は $L(X) = \kappa$ であるが, 定理 3.5 の Z を上記の証明と同様に $Z = X \times \mathbb{D}^\omega_{\mathrm{fin}}(\kappa)$ でとると, $L^+(Z) = \kappa^+$ となってしまい, 疑問 3.2 (2) の答えにはならない.

補題 3.7 ([7])**.** 無限基数 κ について, $\kappa + 1$ の部分空間として

$$\mathbb{A}(\kappa) = \{\kappa\} \cup (\kappa \setminus \mathrm{Lim}(\kappa))$$

をとると,

(1) $|\mathbb{A}(\kappa)| = w(\mathbb{A}(\kappa)) = L^+(\mathbb{A}(\kappa)) = e^+(\mathbb{A}(\kappa)) = \kappa$.
(2) $L^+(X) \leq \mathrm{cf}\ \kappa$ である任意の空間 X について, $L^+(X \times \mathbb{A}(\kappa)) \leq \kappa$ である.

特に, $\kappa = L^+(X)$ が正則非可算基数ならば,
(1') $e^+(\mathbb{A}(\kappa)) = \kappa$, (2') $L^+(X \times \mathbb{A}(\kappa)) = \kappa$.
この性質を n 回使えば,
(2") 任意の $n \in \omega$ について $L^+(X \times (\mathbb{A}(\kappa))^n) = \kappa$.

命題 3.8 ([7])**.** 正則非可算基数 κ について, $\mathbb{A}(\kappa)$ を補題 3.7 のようにとり,

$$\mathbb{A}^\omega_\sigma(\kappa) = \bigcup_{m \in \omega} \mathbb{A}^\omega_m(\kappa), \quad \mathbb{A}^\omega_m(\kappa) := \{\tilde{y} \in (\mathbb{A}(\kappa))^\omega : \tilde{y} \restriction (\omega \setminus m) \text{ は値 } \kappa \text{ の定数関数 }\}$$

とせよ．この $\mathbb{A}^{\omega}_{\sigma}(\kappa)$ は Tychonoff 空間で,

- $w(\mathbb{A}^{\omega}_{\sigma}(\kappa)) = |\mathbb{A}^{\omega}_{\sigma}(\kappa)| = \kappa$,
- $L^+(X) \le \kappa$ である任意の空でない空間 X に対して, $Z = X \times \mathbb{A}^{\omega}_{\sigma}(\kappa)$ は irreducible で $L^+(Z) = \kappa$.

定理 3.9 ([7])**.** $L^+(X)$ が正則基数であるような任意の (Tychonoff) 空間 X は,

$$|Z| = |X|,\ w(Z) = w(X),\ L^+(Z) = L^+(X)$$

である irreducible な (Tychonoff) 空間 Z に閉部分空間として埋め込める.

Proof. $\kappa = L^+(X)$ が弱到達不可能基数の場合を考えればよい．$\omega < \kappa = L(X) \le w(X), |X|$ である．命題 3.8 を適用せよ． □

$L^+(X)$ が正則基数の場合は, これで疑問 3.2 の (2) も肯定的に解決された．特異基数の場合はまだ解決に至っていない.

問題 3.10 ([7])**.** $L^+(X)$ が特異基数であるような任意の (Tychonoff) 空間 X は, $L^+(Z) = L^+(X)$ である irreducible な (Tychonoff) 空間 Z に閉部分空間として埋め込めるか?

命題 3.11 ([7])**.** 空間 X, Y について, $L^+(X) = \kappa$ が極限基数で $e^+(Y) > \mathrm{cf}\ \kappa$ ならば, $L^+(X \times Y) > \kappa$ である.

定理 3.9 で $L^+(Z) = L^+(X)$ を示すために, $\kappa = L^+(X)$ が正則非可算基数ならば,
(1') $e^+(\mathbb{A}(\kappa)) = \kappa$, (2') $L^+(X \times \mathbb{A}(\kappa)) = \kappa$.
であることを使っているが, $\kappa = L^+(X)$ が特異基数の場合は同じような方法を使うことができない．実際, 命題 3.11 より,
(1') $e^+(Y) = \kappa$, (2') $L^+(X \times Y) = \kappa$. となる空間 Y は存在しない.

謝辞. 講演会場の提供および講究録作成のご支援をいただいた京都大学数理解析研究所に感謝いたします.

参考文献

[1] O. T. Alas, L. R. Junqueira and R. G. Wilson, *Dually discrete spaces*, Topology and Appl. **155** (2008), 1420–1425.

[2] R. Arens and J. Dugundji, *Remark on the concept of compactness*, Portugal. Math. **9** (1950), 141–143.

[3] U. J. Christian, *Concering certain minimal cover refineable spaces*, Fund. math. **76** (1972), 213–222.

[4] S. W. Davis, E. M. Grabner, G. C. Grabner, *s-Point finite refinable spaces*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **22** (1999), 367–375.

[5] Y. Hirata, T. Usuba and Y. Yajima, *Equalities for the extent of infinite products and Σ-products*, Topology and Appl. **307** (2022), 107946, 12 pp.

[6] Y. Hirata and Y. Yajima, *Dual discreteness of Σ-products and irreducibility of infinite products*, Topology and Appl. **356** (2024), 109032, 12 pp.

[7] Y. Hirata and Y. Yajima, *Embedding as a closed subspace in irreducible spaces*, Topology and Appl. **375** (2025), 109568, 12 pp.

[8] Y. Hirata and Y. Yajima, *Irreducibility on monotonically normal spaces and GO-spaces*, Topology Proc. **67** (2026), 125–141.

[9] Y. Hirata and Y. Yajima, *Irreducibility of the products with a metric factor*, preprint.

[10] J. Mycielski, *α-incompactness of N^α*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **12** (1964), 437–438.