ボルノロジーと粗幾何学による proper 作用の特徴づけ

広島大学大学院先進理工系科学研究科
長屋 拓暁

Hiroaki Nagaya
Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University

1 背景と主結果

1.1 背景

不連続群論では, 正則ハウスドルフ空間 X に離散群 Γ が連続に作用する設定で, 次の性質 $(\star)$ が重要である.

性質 $(\star)$: "商写像 $X \to \Gamma\backslash X$ が正則被覆となり, 商空間 $\Gamma\backslash X$ も正則ハウスドルフ空間である. "

性質 $(\star)$ を満たす群作用を通し, 作用する群や作用される空間, 商空間の性質を理解することが不連続群論の目的である. Palais は以下の定理を示した.

定理 1.1 (Palais [8])**.** X を正則ハウスドルフ空間, Γ を離散群, ρ を X 上の連続 Γ-作用とする. このとき, 以下の 2 条件は同値である:

1. ρ は性質 $(\star)$ を満たす.
2. ρ は自由かつ, 任意の点 $x \in X$ に対して, ある近傍 U_x が存在して, 以下の条件を満たす:

"任意の $y \in X$ に対し, ある近傍 U_y が存在し, $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U_x \cap U_y \neq \emptyset\}$ が有限集合となる. "

上記の定理の設定では, Γ が離散群であることから, 条件 2 の "有限集合" の部分は "コンパクト" と言い換えても良い. そのため条件 2 を調べるために, 以下の定理は重要である.

定理 1.2. X を局所コンパクトハウスドルフ空間, L を局所コンパクトハウスドルフ群, ρ を X 上の連続 L-作用とする. このとき次の 2 条件は同値である.

1. 任意の点 $x \in X$ に対して, ある近傍 U_x が存在して, 以下の条件を満たす:

"任意の $y \in X$ に対し, ある近傍 U_y が存在し, $\{l \in L \mid lU_x \cap U_y \neq \emptyset\}$ がコンパクトとなる. "

2. 任意のコンパクト集合 $C, C' \subset X$ に対して, $L_{C,C'} := \{l \in L \mid lC \cap C' \neq \emptyset\}$ がコンパクトとなる.

上記の定理の 2 番目の条件は作用の **proper** 性と呼ばれる. この定理を背景に, 群も空間も局所コンパクトハウスドルフの設定で, 不連続群論は proper 性の研究と proper 作用の離散部分群の

研究がそれぞれ開拓された.

また, 作用される空間 X が距離空間で作用が等長であるとき, 以下の定理が知られている.

定理 1.3. (X,d) を有界閉集合とコンパクトが同値な距離空間とする. また, 等長変換群 $\mathrm{Isom}(X)$ にコンパクト開位相を考える. このとき, 自然な X 上の $\mathrm{Isom}(X)$ の作用は proper となる. 特に任意の閉部分群 $L < \mathrm{Isom}(X)$ の作用は proper である.

Palais は C^∞-級の設定では proper ならば, その作用は必ずある距離において等長作用であることを示した:

定理 1.4 (Palais [8])**.** L をリー群, X を C^∞-多様体, ρ を X 上の C^∞ 級な L-作用とする. ρ が proper であるならば, ある X 上の L-不変な Riemann 計量 g が存在する.

このような背景のもと, 以下の問いが考えられる.

疑問 1.5. 作用の proper 性は "群作用と相性の良い幾何構造" の存在性を保証するのか.

上記の疑問に対し, 2006 年に吉野氏は一様構造と同程度連続性について以下の定理を示した.

定理 1.6 (Yoshino [11])**.** L を局所コンパクトハウスドルフ群, X をパラコンパクトな局所コンパクトハウスドルフ空間, ρ を X 上の 連続 L-作用とし, 商空間 $L\backslash X$ がパラコンパクトとなることを仮定する. このとき, ρ が proper であるならば, ある X 上の一様構造 $\mathcal{U}$ が存在して, ρ は $(X,\mathcal{U})$ 上同程度連続となる.

1.2 主結果

本論文では, 疑問 1.5 を粗構造と同程度制御性の枠組みで研究する. 主結果は以下の 3 つである. 第一に, 位相ではなくボルノロジーという構造を用いて, 作用の proper 性を一般化した作用の B-proper 性を導入したことである. 第二に, その B-proper 性について, 疑問 1.5 に対して, 回答を与えたことである. 第三に B-proper 性に対して特徴づけを与えたことである.

以下, $(L,\mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X,\mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を X 上のボルノロジカル L-作用とする.

主定理 1 (N. [7])**.** ボルノロジー空間 X 上のボルノロジカル L-作用 ρ が B-proper であるならば, ある X 上の粗構造 $\mathcal{E}$ が存在して, ρ は $(X,\mathcal{E})$ 上同程度制御に作用する.

主定理 2 (N. [7])**.** ボルノロジー空間 X 上のボルノロジカル L-作用 ρ が B-proper であることと, 以下の 3 条件を満たすことは同値である:

1. $L_x := \{l \in L \mid lx = x\}$ が L 上の有界集合である.
2. 各点 $x \in X$ において, 包含写像 $\iota_x : L\cdot x \to X$ による $\mathcal{B}_X$ の引き戻し $\iota_x^*\mathcal{B}_X$ と写像 $T^x : L \to L\cdot x, l \mapsto lx$ による $\mathcal{B}_L$ の押し出し $T^x_*\mathcal{B}_L$ が一致する.
3. ある粗構造 $\mathcal{E}$ が存在して, ρ は $(X,\mathcal{E})$ 上同程度制御に作用する.

2 先行研究

2.1 proper 作用

この節では, L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を局所コンパクトハウスドルフ L-空間, ρ を X 上の連続 L-作用とする. また本稿を通して, 部分集合 $C, C' \subset X$ に対し, L の部分集合 $L_{C,C'}$ を

$$L_{C,C'} := \{\, l \in L \mid lC \cap C' \neq \emptyset \,\}$$

と定める.

定義 2.1. 作用 ρ について, 以下の 3 つの用語を定義する:

1. 作用 ρ が **proper** であるとは, 任意の X 上のコンパクト集合 C, C' について, $L_{C,C'}$ がコンパクトになることをいう.
2. 作用 ρ が**弱 proper** であるとは, 任意の点 $x \in X$ とコンパクト部分集合 $C \subset X$ に対し, $L_{x,C} := L_{\{x\},C} \subset L$ がコンパクトになることをいう ([1]).
3. 作用 ρ が **CI 条件**を満たすとは, 任意の点 $x \in X$ に対し, 固定部分群

$$L_x := L_{\{x\},\{x\}} = \{l \in L \mid lx = x\}$$

がコンパクトであることをいう.

一般に proper, 弱 proper, CI 条件の順に弱い概念になっている. またそれらの差分を表す例を紹介する.

例 2.2. ここに 2 つの作用の例を示す.

(i) **[CI 条件を満たすが弱 proper でない作用]** $\mathbb{Z}$ の S^1 上の作用 ρ_1 を次のように定義する.

$$\mathbb{Z} \times S^1 \longrightarrow S^1, \qquad (n, e^{2\pi i r}) \longmapsto e^{2\pi i (r+\sqrt{2}\,n)}.$$

この作用は固定点のない作用であるため, ρ_1 は CI 条件を満たす. しかし, $L_{S^1,S^1} = \mathbb{Z}$ はコンパクトではないため, 弱 proper ではない.

(ii) **[弱 proper だが proper でない作用]** $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の作用 ρ_2 を次のように定義する.

$$\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad \left(s, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} 2^s x_1 \\ 2^{-s} x_2 \end{pmatrix}.$$

点 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とコンパクトな部分集合 $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ を固定する. 軌道 $\mathbb{R} \cdot x$ が $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上閉集合であるため, $C \cap \mathbb{R} \cdot x$ はコンパクト集合である. また写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cdot x, l \mapsto lx$ は同相であるから, $L_{x,C}$ もコンパクトである. したがって, 作用 ρ_2 は弱 proper である. しかし, $L_{S^1,S^1} = \mathbb{R}$ はコンパクトではないため, proper ではない.

適切な設定下で吉野氏は, 弱 proper 性と proper 性に関する特徴づけを以下のように与えている（cf. [11]）.

定理 2.3 (Yoshino [11])**.** L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を局所コンパクト空間, ρ を X 上の 連続 L-作用とする. このとき, 以下の 2 つの条件は同値である.

(i) 作用 ρ は弱 proper である.

(ii) 作用 ρ は CI 条件を満たし, 各軌道は X 内の閉集合であり, 任意の点 $x \in X$ に対し, 写像

$$T_x \colon L/L_x \longrightarrow L \cdot x, \qquad [l] \longmapsto lx$$

は同相である.

定理 2.4 (Yoshino [11])**.** L を局所コンパクトハウスドルフ群, X をパラコンパクトな局所コンパクトハウスドルフ空間, ρ を X 上の連続 L-作用で, かつ商空間 $L\backslash X$ がパラコンパクトとなることを仮定する. このとき, 以下の 2 つの条件は同値である.

(i) 作用 ρ は proper である.

(ii) 作用 ρ は弱 proper であり, X 上の位相に適合する一様構造 $\mathcal{U}$ が存在し, 作用 ρ は $(X,\mathcal{U})$ 上同程度連続である.

2.2 ボルノロジー空間

この節では, ボルノロジー空間の定義を紹介する. ボルノロジーの研究の歴史的経緯については, [4] を参照せよ. 本稿を通じて, 任意の集合 X に対し, その冪集合を $\mathcal{P}(X)$ と表す.

定義 2.5 (ボルノロジー)**.** X を集合, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}(X)$ の部分集合とする. $\mathcal{B}$ が X 上のボルノロジーであるとは, $\mathcal{B}$ が次の 3 つの条件を満たすことをいう.

(i) $\displaystyle\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ である.

(ii) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ に対し, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$ となる.

(iii) 任意の $B \in \mathcal{B}$ と任意の $B' \subset B$ について, $B' \in \mathcal{B}$ となる.

X 上のボルノロジー $\mathcal{B}$ に対し, 組 $(X, \mathcal{B})$ をボルノロジー空間と呼び, $\mathcal{B}$ の各要素 $B \in \mathcal{B}$ を **有界集合** という. 特に, ボルノロジー空間の有限部分集合はすべて有界である.

次に「ボルノロジー基底」の概念を紹介する. 集合 X に対し, $\mathcal{D}$ が X の部分集合族であり, 次の 2 つの条件を満たすとき, $\mathcal{D}$ を X 上のボルノロジー基底という.

(i′) $\displaystyle\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D = X$ である.

(ii′) 任意の $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ に対し, $D_1 \cup D_2 \subset D$ となる $D \in \mathcal{D}$ が存在する.

ボルノロジー基底 $\mathcal{D}$ に対し, $\langle \mathcal{D} \rangle := \{A \subset X \mid \exists D \in \mathcal{D} \text{ s.t. } A \subset D\}$ とおく. このとき, $\langle \mathcal{D} \rangle$ は

ボルノロジーである.

例 2.6. 以下では, ボルノロジーの例を 3 つ紹介する.

1. X を集合とする. X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ はボルノロジーとなり, X の**最大ボルノロジー**という.
2. (X,d) を距離空間とする. $\mathcal{D}_d := \{\bar{B}_n(x) \mid x \in X, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とおく. ただし, $\bar{B}_n(x)$ は x を中心とする半径 n の閉球である. このとき, $\mathcal{D}_d$ はボルノロジー基底をなす. また, $\langle \mathcal{D}_d \rangle = \{B \subset X \mid B \text{ は距離空間の意味で有界集合である.}\}$ を満たす. このボルノロジーを**距離ボルノロジー**といい, $\mathcal{B}_d(X)$ で表す.
3. (X,τ) をハウスドルフ空間とする. $\mathcal{D}_{\mathrm{cpt}} := \{C \subset X \mid C \text{ はコンパクト }\}$ とおく. このとき, $\mathcal{D}_{\mathrm{cpt}}$ はボルノロジー基底をなす. また, $\langle \mathcal{D}_{\mathrm{cpt}} \rangle = \{B \subset X \mid B \text{ は } X \text{ 上相対コンパクト.}\}$ を満たす. このボルノロジーを**コンパクトボルノロジー**といい, $\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(X)$ で表す.

定義 2.7. $(X,B_X),(Y,B_Y)$ をボルノロジー空間とする. 写像 $f\colon X \to Y$ に対し, 任意の $B \in B_X$ について $f(B) \in B_Y$ が成り立つとき, f は**ボルノロジカル**であるという.

命題 2.8. 以下の 2 つの主張が成り立つ.

1. $(X,\mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, Y を集合, $\pi\colon X \to Y$ を全射とする. このとき,
$$\pi_*\mathcal{B}_X := \{\pi(B) \subset Y \mid B \in \mathcal{B}_X\}$$
はボルノロジーとなり, $\pi\colon (X,\mathcal{B}_X) \to (Y,\pi_*\mathcal{B}_X)$ はボルノロジカルになる.
2. X を集合, $(Y,\mathcal{B}_Y)$ をボルノロジー空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする. このとき,
$$f_0^*\mathcal{B}_Y := \{\, f^{-1}(B) \subset X \mid B \in \mathcal{B}_Y\}$$
はボルノロジー基底である. さらに f が単射であるとき, $f_0^*\mathcal{B}_Y$ はボルノロジーとなる.

上記の命題の条件 1 の設定下で, $\pi_*\mathcal{B}_X$ を π による $\mathcal{B}_X$ の**押し出し**とよぶ. また, 条件 2 の設定下で, $f_0^*\mathcal{B}_Y$ から生成されるボルノロジー $f^*\mathcal{B}_Y := \langle f_0^*\mathcal{B}_Y \rangle$ を f による $\mathcal{B}_Y$ の**引き戻し**という.

2.3 粗空間

この小節では, Roe ([10]) によって導入された粗空間の定義やそれに関する用語を紹介する.

定義 2.9 (粗構造)**.** X を集合, $\mathcal{E}$ を $X \times X$ の部分集合族とする. 対 $(X,\mathcal{E})$ が **粗空間**（coarse space）であるとは, $\mathcal{E}$ が次の 5 条件を満たすことをいう.

(i) 対角線集合 $\mathrm{diag}(X) := \{\,(x,x) \mid x \in X\,\}$ が $\mathcal{E}$ の元である.

(ii) 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対し, $E^\dagger$ も $\mathcal{E}$ の元である. ただし, $E^\dagger := \{\,(x',x) \in X \times X \mid (x,x') \in E\,\}$.

(iii) 任意の $E_1,E_2 \in \mathcal{E}$ に対し, 合成 $E_1 \circ E_2$ も $\mathcal{E}$ の元である. ただし, 合成は以下で定めるものとする.
$$E_1 \circ E_2 := \left\{(x,z) \in X \times X \;\middle|\; \exists y \in X \text{ s.t. } (x,y) \in E_1,\ (y,z) \in E_2\right\}$$

(iv) 任意の有限個の元 $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ に対し, その和集合 $\cup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}$ も $\mathcal{E}$ の元である.
(v) 任意の $E \in \mathcal{E}$ と $E' \subset E$ に対し, E' も $\mathcal{E}$ の元である.

また $\mathcal{E}$ の元を **制御集合**（entourage）という.

次に, 粗構造の台となる「粗基底」の概念を導入する.

定義 2.10 (粗基底)**.** 集合 X と集合族 $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{P}(X \times X)$ について, $\mathcal{E}_0$ が X 上の **粗基底**（coarse base）であるとは, 次を満たすことをいう.

(i)' ある $E \in \mathcal{E}_0$ が存在して, E は対角線集合 $\mathrm{diag}(X)$ を含む.
(ii)' 任意の $E \in \mathcal{E}_0$ に対し, $E^\dagger \subset E'$ となる $E' \in \mathcal{E}_0$ が存在する.
(iii)' 任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_0$ に対し, $E_1 \circ E_2 \subset E$ となる $E \in \mathcal{E}_0$ が存在する.
(iv)' 任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_0$ に対し, $E_1 \cup E_2 \subset E$ となる $E \in \mathcal{E}_0$ が存在する.

このとき,

$$\langle \mathcal{E}_0 \rangle := \left\{ E \subset X \times X \;\middle|\; \exists E_0 \in \mathcal{E}_0 \text{ s.t. } E \subset E_0 \right\}$$

とおくと, $\langle \mathcal{E} \rangle$ は X 上の粗構造である. これを粗基底 $\mathcal{E}_0$ によって生成された粗構造という.

粗空間は距離空間から誘導することができる.

例 2.11. (X, d) を距離空間とする. 任意の $r \geq 0$ に対し,

$$E_r := \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) \leq r\}$$

とおく. このとき,

$$\mathcal{C}_d := \{E_r \subset X \times X \mid r \geq 0\}$$

は X 上の粗基底である. $\mathcal{E}_d := \langle \mathcal{C}_d \rangle$ を (X, d) の**有界粗構造**という.

各制御集合は任意の部分集合に膨らましを以下のように定める.

定義 2.12. $(X, \mathcal{E})$ を粗空間とし, 制御集合 $E \in \mathcal{E}$ と部分集合 $S \subset X$ をとる. このとき, S の **E-近傍**とは, 以下で定める集合 $E[S]$ のことである:

$$E[S] := \{y \in X \mid \exists x \in S \text{ s.t. } (x, y) \in E\}.$$

また粗空間での有界性を以下のように定める.

定義 2.13. $(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. このとき, 部分集合 $B \subset X$ が**有界集合**であるとは, ある有限部分集合 $N \subset X$ とある制御集合 $E \in \mathcal{E}$ が存在して, $B \subset E[N]$ となることをいう.

注意として, 上記の定義は Roe の有界集合の定義と少し異なる. しかし, 粗空間に粗連結性を課すと, 2 つの定義は同値になる. 本論文では, 以下の命題が成り立つようにするために, 上記の定義を採用している.

命題 2.14. $(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ を $(X, \mathcal{E})$ の有界集合全体とする. このとき, $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ は X 上のボルノロジーとなる.

この命題から粗空間はボルノロジー空間としても見ることができ, 粗空間としての有界性とボルノロジー空間としての有界性は一致する.

2.4 ボルノロジー空間への群作用

この節では, (X, B_X) をボルノロジー空間, L をボルノロジー B_L を備えた群, ρ を X 上の L-作用とする.

定義 2.15 (ボルノロジー群 [9])**.** 群 L が **ボルノロジー群**であるとは, 積写像

$$L \times L \longrightarrow L, \quad (l_1, l_2) \longmapsto l_1 l_2$$

および逆写像

$$L \longrightarrow L, \quad l \longmapsto l^{-1}$$

がともにボルノロジカルであることをいう. ここで, $L \times L$ には $\langle B_L \times B_L \rangle$ によるボルノロジーが入っているものとする.

位相群に対して連続作用を定義するのに対応して, ボルノロジー群に対してボルノロジカル作用を次のように定義する.

定義 2.16. L の X 上の作用 ρ が **ボルノロジカル作用**であるとは, 写像

$$L \times X \longrightarrow X, \quad (l, x) \longmapsto lx$$

がボルノロジカルであることをいう. ここで, $L \times X$ には $\langle B_L \times B_X \rangle$ によるボルノロジーが入っているものとする.

重要なボルノロジカル作用の例として, 以下の命題が成り立つ.

命題 2.17. L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間, ρ を X 上の連続 L-作用とする. このとき, L と X にコンパクトボルノロジー (例 2.6 を参照) を考えると, ρ はボルノロジカル作用である.

2.5 粗空間への群作用

L を群, X を集合, ρ を X 上の L-作用とする. 各 $l \in L$ と 部分集合 $E \subset X \times X$ に対し, 次の 2 つの記法を用いる.

$$\begin{aligned} l_* E &:= \{ (lx, ly) \mid (x, y) \in E \}, \\ L_* E &:= \bigcup_{l \in L} l_* E. \end{aligned}$$

定義 2.18. $(X,\mathcal{E})$ を粗空間, L を群とする. L の作用 ρ が **同程度制御**であるとは, 各 $E\in\mathcal{E}$ に対し, ある $F\in\mathcal{E}$ が存在して, 任意の $l\in L$ について $l_*E\subset F$ が成り立つことをいう.

上の定義は, 任意の $E\in\mathcal{E}$ に対し L_*E が制御集合となることを意味する.
次に同程度制御な作用の例を挙げる.

例 2.19. (X,d) を距離空間とし, L を (X,d) の等長変換からなる群の部分群とする. このとき, L は粗空間 $(X,\mathcal{E}_d)$ に同程度制御に作用している. ただし, $\mathcal{E}_d$ は (X,d) の有界粗構造である (例 2.11 を参照).

$E,F\in\mathcal{E}$ が $l_*E\subset F$ を満たすとき, 任意の点 $x\in X$ に対して $l\cdot(E[x])$ は $F[lx]$ の部分集合となる.

3 B-proper 性について

この節では B-proper という位相構造を仮定しない proper 性の定義を紹介する. この用語に関しては, Leitner-Vigolo ([5]) が既に coarsely $\mathcal{B}$-proper という用語を紹介している. これに基づいて, B-proper 性を新たに定義する.

3.1 B-proper の定義

$(L,\mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X,\mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を X 上のボルノロジカル L-作用とする.

定義 3.1. 作用 ρ に関連するいくつかの用語を次のように定義する.

(i) 作用 ρ が **B-proper** であるとは, 任意の $B,B'\in\mathcal{B}_X$ に対し,

$$L_{B,B'}:=\{\, l\in L \mid lB\cap B'\neq\emptyset\,\}$$

が L の有界集合であることをいう.

(ii) 作用 ρ が **弱 B-proper** であるとは, 任意の $x\in X$ および $B\in\mathcal{B}_X$ に対し, $L_{x,B}:=L_{\{x\},B}$ が L の有界集合であることをいう.

(iii) 作用 ρ が BI **条件**を満たすとは, 任意の $x\in X$ に対し, 固定部分群 L_x が L の有界集合であることをいう.

以下では同じ群作用だが, X 上のボルノロジー構造を変えることによって, B-proper 性が変わる例を紹介する.

例 3.2. $L:=\mathbb{R}$ とし, $X:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy\neq 0\}$ とする. また X 上の連続 L-作用 ρ を

$$\rho\colon \mathbb{R}\times X\to X,\qquad \left(s,\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\longmapsto\begin{pmatrix}2^s x\\2^{-s}y\end{pmatrix}$$

と定める. L にはコンパクトボルノロジー $\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(L)$ が備わっているものとし, X には $\mathbb{R}^2$ の通常

の距離を制限した距離 d を考え, コンパクトボルノロジー $\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(X)$ と距離ボルノロジー $\mathcal{B}_d(X)$ についてそれぞれ B-proper 性を考察する.

(i)X にコンパクトボルノロジー $\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(X)$ が備わっているとき

このとき ρ は B-proper である. 以下で証明の方針を述べる. 任意に $\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(X)$ をとり, 2 つの関数 $q_x\colon X \to \mathbb{R}_{>0}, (x,y) \mapsto |x|, q_y\colon X \to \mathbb{R}_{>0}, (x,y) \mapsto |y|$ を定める. 今, コンパクトボルノロジーを考えているので, q_x, q_y は $\mathrm{cl}_X B \cup \mathrm{cl}_X B'$ 上で最大値と最小値を持つ. このことから, 議論を経て $L_{B,B'}$ に上限と下限があることが導かれ, $L_{B,B'}$ は L 上相対コンパクトとなる. よって, ρ は $(X, \mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(X))$ 上 B-proper である.

(ii)X に距離ボルノロジー $\mathcal{B}_d(X)$ が備わっているとき

このとき ρ は B-proper でない. 実際, $\mathbb{R}^2$ 上の原点中心半径 1 の閉球 $\bar{B}_1(0)$ を X 上に制限した集合 $B := \bar{B}_1(0) \cap X$ を考えると, B は $\mathcal{B}_d(X)$ の元であり, $L_{B,B} = \mathbb{R}$ となってしまう.

3.2 B-proper 性と位相的 proper 性

この節では, 前節で定めた B-proper 性と位相的な proper 性の関連性について考察する. 以降, L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間, ρ を X 上の連続 L-作用とする.

命題 2.17 より, 群と空間がコンパクトボルノロジーを備えた設定では, 連続作用はボルノロジカル作用であることに触れた. proper 性については以下のことが成り立つ.

定理 3.3. 局所コンパクトハウスドルフ空間 $(X, \mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(X))$ 上の局所コンパクトハウスドルフ群 $(L, \mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(L))$ による連続作用 ρ について以下の 3 つのことが成り立つ.

(i) X 上の L-作用が proper であることと, B-proper であることは同値である.

(ii) X 上の L-作用が弱 proper であることと, 弱 B-proper であることは同値である.

(iii) X 上の L-作用が CI 条件を満たすことと, BI 条件を満たすことは同値である.

4 主定理

この節では, B-proper 性と弱 B-proper 性の特徴付けを紹介する. $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を X 上のボルノロジカル L-作用とする.

4.1 弱 B-proper 性の特徴付け

作用 ρ の弱 B-proper 性は次のように特徴付けられる.

定理 4.1 (N. [7]). ボルノロジー空間 $(X, \mathcal{B}_X)$ 上のボルノロジカル L-作用について, 次の 2 つの条件は同値である.

(i) 作用 ρ は弱 B-proper である.

(ii) 作用 ρ が BI 条件を満たし, 任意の $x \in X$ に対し, $\iota_x^*\mathcal{B}_X = q_*^x\mathcal{B}_L$ が成り立つ. ただし, ι_x は軌道 $L \cdot x$ から X への包含写像で, 写像 q^x は次のように定める: $q^x\colon L \to L \cdot x,\, l \mapsto lx$.

2 つの集合 $\iota_x^*\mathcal{B}_X, q_*^x\mathcal{B}_L$ については, 命題 2.8 を参照せよ. 留意として, 各点 $x \in X$ に対し, 包含 $q_*^x(\mathcal{B}_L) \subset \iota_x^*(\mathcal{B}_X)$ は一般に成り立つ. 上記の定理は作用が BI 条件を満たす仮定のもと, 逆の包含が成り立つことと弱 B-proper 性は同値であることを主張している.

例 2.2 の (i) では CI 条件を満たし, 弱 proper でない作用の例を見た. さらに, 定理 3.3 により, 群と空間がコンパクトボルノロジーを備えた設定でこの作用は BI 条件を満たすが弱 B-proper ではないことがわかる. この弱 B-proper 性を満たさないことを上記の弱 B-proper 性の特徴づけから以下で考察する.

考察 4.2. 例 2.2 (i) において, 作用 ρ_1 を以下のように定義した:

$$\rho_1\colon \mathbb{Z} \times S^1 \to S^1, (n, e^{2\pi i r}) \mapsto e^{2\pi i(r+\sqrt{2}n)}.$$

$e^0 \in S^1$ とし, ι_{e^0} を軌道 $L \cdot e^0$ から X への包含写像, 写像 $q^{e^0}\colon L \to L \cdot x,\, l \mapsto \rho(l, e^0)$ とする. このとき, 次の 2 つのボルノロジーが得られる：

$$\begin{aligned}\iota_{e^0}^*\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(S^1) &= \bigl\{\, \{e^{2\pi i\sqrt{2}n} \mid n \in N\} \bigm| N \subset \mathbb{Z} \,\bigr\}, \\ q_*^{e^0}\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{Z}) &= \bigl\{\, \{e^{2\pi i\sqrt{2}n} \mid n \in N\} \bigm| N \subset \mathbb{Z} \text{ finite} \,\bigr\}.\end{aligned}$$

したがって, $\iota_{e^0}^*\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(S^1)$ は $q_*^{e^0}\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{Z})$ が異なるため, この作用は弱 B-proper ではないことが改めてわかる.

第 2 節では 吉野氏の定理 2.3 を紹介した. 実は定理 4.1 はその一般化になっている. 定理 2.3 を定理 4.1 を用いて再証明するときに以下の命題は重要である.

命題 4.3. X を局所コンパクトハウスドルフ空間, S を X の部分集合, ι を S から X への包含写像とする. このとき以下の S に関する 2 条件は同値である:

1. 集合 S は X 上閉集合である.
2. 等式 $\iota^*\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(X) = \mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(S)$ が成り立つ.

4.2 B-proper 性の特徴づけ

この節では, B-proper 性の特徴づけを紹介し, B-proper な作用から誘導される粗構造について考察する. そのために各有界集合に $B \in \mathcal{B}_X$ によって定義される $X \times X$ の部分集合 $E(L, B)$ と, $X \times X$ 上の集合族 $\mathcal{E}_0(L, \mathcal{B}_X)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned}E(L, B) &:= \{(lb_1, lb_2) \in X \times X \mid l \in L, b_1, b_2 \in B\} \cup \mathrm{diag}(X) \\ \mathcal{E}_0(L, \mathcal{B}_X) &:= \{E(L, B) \mid B \in \mathcal{B}_X\}\end{aligned}$$

定理 4.4 (N. [7])**.** ボルノロジー空間 $(X, \mathcal{B}_X)$ 上のボルノロジカル L-作用 ρ について, 以下の 3 条件は同値である.

1. 作用 ρ は B-proper である.
2. 作用 ρ は弱 B-proper かつ $\mathcal{E}_0(L, \mathcal{B}_X)$ は粗基底となる.
3. 作用 ρ は弱 B-proper かつある粗構造 $\mathcal{E}$ が存在して, $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \mathcal{B}_X$ かつ ρ は $(X, \mathcal{E})$ 上同程度制御となる.

ただし, $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{E}$ から誘導されるボルノロジーである (命題 2.14 を参照).

この定理のもと B-proper な作用から構成される粗構造を以下のように定義する.

定義 4.5. ボルノロジー空間 $(X, \mathcal{B}_X)$ 上のボルノロジカル L-作用 ρ が B-proper であることを仮定する. このとき, $\mathcal{E}(L, \mathcal{B}_X) := \langle \mathcal{E}_0(L, \mathcal{B}_X) \rangle$ を ρ **から誘導される粗構造**と呼ぶ.

以下は B-proper 作用から誘導される粗構造の例である.

例 4.6. 直交群 $\mathrm{O}(n)$ の $\mathbb{R}^n$ の標準的な作用を ρ_1 とする. また, $\mathrm{O}(n)$ と $\mathbb{R}^n$ にはコンパクトボルノロジーが備わっているとする. このとき, ρ_1 は B-proper になり, 等式

$$\mathcal{E}(L, \mathcal{B}_X) = \langle \{ (B \times B) \cup \mathrm{diag}(X) \mid B \in \mathcal{B}_X \} \rangle$$

が成り立つ. 特筆すべきこととして, $\mathbb{R}^n$ の標準的な距離を d とおくと, ρ_1 から誘導される粗構造 $\mathcal{E}(L, \mathcal{B}_X) := \langle \mathcal{E}_0(L, \mathcal{B}_X) \rangle$ は d による有界粗構造 $\mathcal{E}_d$ に真に含まれる.

例 4.7. ユークリッド運動群 $\mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}^n$ の標準的な作用を ρ_2 とする. また, $\mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^n$ にはコンパクトボルノロジーが備わっているとする. このとき, ρ_2 は B-proper になる. さらに, $\mathbb{R}^n$ の標準的な距離を d とおくと, 等式 $\mathcal{E}(L, \mathcal{B}_X) = \mathcal{E}_d$ が成り立つ.

上記の 2 つの例の背景にある命題として, 以下の 2 つのことが成り立つ.

命題 4.8. ボルノロジー群 $(L, \mathcal{B}_L)$ が最大ボルノロジーを備えているとする. すなわち $\mathcal{B}_L = \mathcal{P}(L)$ とする. このとき, $(X, \mathcal{B}_X)$ 上のボルノロジカル L-作用 ρ は B-proper になる. また, ρ から誘導される粗構造について,

$$\mathcal{E}(L, \mathcal{B}_X) = \langle \{ (B \times B) \cup \mathrm{diag}(X) \mid B \in \mathcal{B}_X \} \rangle$$

が成り立つ.

命題 4.9. $\mathcal{E}$ を X 上の粗構造で等式 $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \mathcal{B}_X$ を満たすとする. また, $(X, \mathcal{B}_X)$ 上のボルノロジカル L-作用 ρ が推移的かつ $(X, \mathcal{E})$ 上に同程度制御に作用すると仮定する. このとき, ρ は B-proper となり, ρ から誘導される粗構造について,

$$\mathcal{E}(L, \mathcal{B}_X) = \mathcal{E}$$

が成り立つ.

付録 A　終わりに

最後に今後の課題を紹介して本稿を終える．設定として, X を正則ハウスドルフ空間, Γ を離散群, ρ を X 上の連続 Γ-作用とする．イントロダクションで紹介したように, 不連続群論では次の ρ の性質 $(\star)$ が重要である．

性質 $(\star)$: “商写像 $X \to \Gamma\backslash X$ が正則被覆となり, 商空間 $\Gamma\backslash X$ も正則ハウスドルフ空間である．”

この性質 $(\star)$ を特徴づけるために, Palais は X の部分集合に対して small という概念を以下のように導入した．

定義 A.1 (Palais [8])**.** S を X の部分集合とする．集合 S が **small** であるとは, 任意の $y \in X$ に対して, ある近傍 U_y が存在して, $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma S \cap U_y \neq \emptyset\}$ が有限集合になることをいう．

Palais は性質 $(\star)$ を以下のように特徴づけた．

定理 A.2 (Palais [8])**.** このとき, 以下の 2 条件は同値である:

1. ρ は性質 $(\star)$ を満たす．
2. ρ は自由かつ, 任意の点 $x \in X$ に対して, ある small な近傍 U_x が存在する．

特筆すべき点は，この結果が X が局所コンパクトとは限らない場合にも成り立つことである。このような背景のもと, 今後は以下の問いに取り組むつもりである．

疑問 A.3. 今回得た B-proper に関する結果を用いて, 以下の条件をボルノロジーや粗幾何学の観点から特徴づけることはできるか？

“任意の点 $x \in X$ に対して, ある small な近傍 U_x が存在する.”

もし, 専門家の方がご覧になった際はぜひご意見をいただきたい．

謝辞

本研究は、国際共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所による支援を受けたものである．

参考文献

[1] A. Baklouti and F. Khlif, *Weak proper actions on solvable homogeneous spaces*, Internat. J. Math. **18** (2007), no. 8, 903–918. MR 2339576.

[2] N. Brodskij, J. Dydak, and A. J. Mitra, *Coarse structures and group actions*, Colloq. Math. **111** (2008), no. 1, 149–158. MR 2353938.

[3] D. Dikranjan and N. Zava, *Categories of coarse groups: quasi-homomorphisms and functorial coarse structures*, Topology Appl. **273** (2020), 106980, 31 pp. MR 4074764.

[4] H. Hogbe-Nlend, *Les racines historiques de la bornologie moderne*, Actes du Colloque d'Analyse Fonctionnelle (Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1971), Supplément au Bull. Soc. Math. France, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1972, pp. 201–206. MR 355511.

[5] A. Leitner and F. Vigolo, *An invitation to coarse groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2339, Springer, Cham, 2023. MR 4696828

[6] K. Mine, A. Yamashita, and T. Yamauchi, *Co coarse structures on uniform spaces*, Houston J. Math. **41** (2015), no. 4, 1351–1358. MR 3455363.

[7] H. Nagaya, *A characterization of proper actions with bornology and coarse geometry*, preprint, arXiv:2504.18811 [math.DG], 2025.

[8] R. S. Palais, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, *Ann. of Math.* (2) **73** (1961), 295–323. MR 0126506.

[9] D. P. Pombo, Jr., *Bornological groups*, Indian J. Math. **54** (2012), no. 2, 225–258. MR 3013350.

[10] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR 2007488.

[11] H. Yoshino, 固有な作用の一様連続性について, 表現論シンポジウム講演集 **2006** (2006), 22–30.