COARSE CODING THEORY AND DISCONTINUOUS GROUPS FOR HOMOGENEOUS SPACES

奥田 隆幸 (広島大学)

1. 序

符号理論はもともと情報通信における誤り訂正や効率的な情報伝達を目的として発展してきた理論である．その数学的抽象化として，距離空間やアソシエーションスキーム上の点配置に対し，任意の二点間の関係に制約を課すという枠組みが現れる．本稿ではこの分野を**幾何学的符号理論**と呼ぶことにする．球面上の接吻数問題，ユークリッド空間における球充填問題，等角直線族などは，いずれもこの枠組みに含まれる．

一方，局所コンパクト等質空間上の不連続群論は，古くから幾何学の中心的課題の一つであった．双曲空間や対称空間上の離散群作用の研究は，リーマン面論や幾何構造論と深く結びついて発展してきた．特に，Lie 群の等質空間 G/H 上における離散部分群 $\Gamma \subset G$ の不連続作用は，大域幾何構造の理解と密接に関係している．

等質空間 G/H のイソトロピー H が非コンパクトであるとき, 不連続群論において, 群作用の固有性が大きな問題となる. 1980 年代後半から 1990 年代にかけて，小林俊行により，簡約型等質空間上の固有作用を三つ組 (G, H, L) の観点から捉える枠組みが確立された．特に，部分群の相対的位置関係を表す条件

$$H \pitchfork L \quad \text{in } G$$

が，G/H 上の L 作用の固有性と同値であることが示された．さらに G が線型簡約 Lie 群である場合には，カルタン射影を用いた代数的判定法が確立され (小林 [10, 12], Benoist [3])，固有作用の問題は対称空間上の距離構造に還元されることが明らかになった．この理論は非コンパクト等質空間上の不連続群論に決定的な影響を与え，簡約型等質空間上の Calabi–Markus 現象の必要十分条件の解明など多くの重要な結果を導いた．

興味深いことに，条件 $H \pitchfork L$ に現れるのは局所的な位相構造ではなく，G における「相対コンパクト性」という大域的有界性の振る舞いのみである．すなわち，固有作用の問題は本質的に「有界性」や「漸近的非交性」に関する問題である．近年，粗幾何学の観点からこの固

The author is supported by JSPS Grants-in-Aid for Scientific Research JP24K06714 and JP23K22395. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

有性条件を再解釈する試みがなされ，距離構造を仮定しない枠組みでも理解できることが示された．

本稿の目的は，この状況をさらに推し進め，幾何学的符号理論と粗幾何学を統合することにより，等質空間上の固有作用を符号理論的な概念として記述することである．そのためにまず，距離空間，群作用，アソシエーションスキームなどを統一的に扱う枠組みとして BRP **空間** (binary relation partition space) を導入する．これは集合 M 上の二項関係を写像

$$R : M \times M \to I$$

によって記述するものであり，従来の幾何符号理論の多くの例を包含する．

さらに，冪集合の間の任意和を保つ写像（PUP 射）を基礎として，粗空間および粗射の圏を構成する．この圏は Roe の粗圏と圏同値であり，漸近的非交性や粗部分集合といった概念を圏論的に扱うことが可能になる．この基盤の上で**粗** BRP **空間**および**粗幾何符号**を定義することにより，幾何学的符号理論を粗幾何学へ拡張する．

その結果，有界型群 G (局所コンパクト群の "位相を忘れた" 一般化) とその部分群 H, L に対し，等質空間 G/H 上の L 作用が固有であることは，粗 BRP 空間 (G^R, G^{LR}, R) において $[L]$ がある下方閉集合 $[H]^{\pitchfork}$ に属することと同値になる．特に群作用の固有性という位相的性質が，粗符号理論の言葉で「漸近的非交性に基づく符号条件」として記述できることが分かる．さらに G が線形簡約 Lie 群である場合，カルタン射影を用いた小林–Benoist の固有性判定定理は，カルタン射影像における粗幾何符号条件へと自然に移送される．この観点から，非コンパクト等質空間上の不連続群論は，粗符号理論の一具体例として理解される．

本稿で紹介する結果は，宮地宗人氏，長屋拓暁氏，小川健翔氏との共同研究の内容を部分的に含む．なお本稿は，第 41 回代数的組合せ論シンポジウム報告集において紹介した内容を，不連続群論の解説を加えて整備し直したものである．

2. 幾何符号理論

本節では，誤り訂正符号や接吻数問題を含んだ形で幾何符号理論という枠組みを設定する[1]．

2.1. BRP 空間と BRP 射.

本稿で紹介する幾何符号理論は以下で定義する BRP 空間[2]というシステムの上で展開される．

Definition 2.1. *BRP* 空間およびそれらの間の射を次のように定める．

(*i*) 集合 M, I および全射写像 $R : M \times M \to I$ のなす三つ組 (M, I, R) を ***BRP* 空間**とよぶ．

[1]本節の設定や言葉遣いは本稿独自のものが多いので注意

[2]BRP は binary relation partition の略である．

(*ii*) (M, I, R), (M', I', R') を *BRP* 空間とする．写像 $\varphi : M \to M'$, $\psi : I \to I'$ の組 (φ, ψ) が (M, I, R) から (M', I', R') への ***BRP* 射**であるとは,

$$R' \circ (\varphi \times \varphi) = \psi \circ R$$

が成立することをいう．

BRP 空間と BRP 射は圏をなす．また，BRP 射 (φ, ψ) が同型射であることと，φ, ψ がそれぞれ全単射であることは同値である．

Example 2.2. (M, d) を距離空間とする．$I := \{ d(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in M \} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ とおき，

$$R : M \times M \to I, \quad (x_1, x_2) \mapsto d(x_1, x_2)$$

と定めると，(M, I, R) は *BRP* 空間となる．距離空間の間の等長写像は *BRP* 射を誘導する．

Example 2.3. G を群，M を G 集合とする．すなわち M には G 作用が定まっているとする．I を $M \times M$ における対角 G 作用の軌道空間とし，$R : M \times M \to I$ を商写像とすると，(M, I, R) は *BRP* 空間となる．また G 集合の間の G 同変写像は *BRP* 射を誘導する．

2.2. **幾何符号．** 以下 (M, I, R) を BRP 空間とする．

Definition 2.4. $\mathcal{S}$ を冪集合 $(\mathcal{P}(I), \subset)$ の下方閉部分集合[3]とする．

$\mathcal{S}$ 幾何符号: M の部分集合 C が $\mathcal{S}$ 幾何符号であるとは，$R(C \times C) \in \mathcal{S}$ となることをいう．

$\mathcal{S}$ 幾何符号全体を $\mathcal{P}(M)_{\mathcal{S}}$ と書く．これは冪集合 $(\mathcal{P}(M), \subset)$ における下方閉部分集合である．

Remark 2.5. 本稿では踏み込んだ議論は行わないが, 幾何符号理論における基本的な問いは以下のようなものである:

Problem 2.6. $\mathcal{S}$ 幾何符号の中で "大きな" ものを調べよ.

幾何符号の大きさについてはいろいろなものが想定される. 最も簡単に定義できるものは極大性である. 極大な幾何符号の分類や構成はこの分野の中心的なテーマとなる. また幾何符号として有限集合しか現れないような状況においては, しばしば幾何符号の濃度上限がテーマとなることも多い. また以下で紹介する球充填 (幾何符号がユークリッド空間内の可算部分集合として定義される) のようなものについては, "密度" のような概念でその符号の大きさを定量化することもある.

Example 2.7 (誤り訂正符号)**.** $M = \{0, 1\}^n$, $I = \{0, \ldots, n\}$ とし，

$$R : M \times M \to I, \quad (x, y) \mapsto d(x, y) := \#\{ i \mid x_i \neq y_i \}$$

[3]本稿を通じて, 半順序集合 $(P, \leq)$ の部分集合 S が下方閉であるとは, "$x \in S$ かつ $y \leq x$ なら $y \in S$" が成り立つこととする

とおくと (M,I,R) は *BRP* 空間である．この R は *Hamming* 距離と呼ばれるものである．$e \leq \lfloor n/2 \rfloor$ について $A_e := \{1,\dots,2e\} \subset I$ とし，下方閉集合 $\mathcal{S}_e \subset \mathcal{P}(I)$ を

$$\mathcal{S}_e := \{D \subset I \mid D \cap A_e = \emptyset\}$$

として定める．このとき部分集合 $C \subset M$ が $\mathcal{S}_e$ 幾何符号であることは e 誤り訂正符号 (線型性は課していない) である，すなわち M の部分集合族 $\{E_e(c)\}_{c\in C}$ が互いに非交，ことと同値である．ただし，ここで

$$E_e(c) := \{x \in M \mid R(x,c) \leq e\}$$

とおいた．誤り訂正符号理論についての詳細は *MacWilliams–Sloane* [13] などを参照されたい．

Example 2.8 (接吻配置)**.** $M = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1\}$, $I = [-1,1]$ とし，

$$R : M \times M \to I, \quad (x,y) \mapsto (x,y)_{\mathbb{R}^n}$$

と定めると (M,I,R) は *BRP* 空間となる．ただし $(x,y)_{\mathbb{R}^n}$ は x, y の $\mathbb{R}^n$ における標準内積の値とする．ここで $A := (1/2,1) \subset I$ とし，下方部分集合 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(I)$ を

$$\mathcal{S} := \{D \subset I \mid D \cap A = \emptyset\}$$

とおく．このとき部分集合 $C \subset S^n$ が $\mathcal{S}$ 幾何符号であることは，C が接吻配置になること，すなわち $\mathbb{R}^n$ の部分集合族 $\{E^{\circ}_1(2c)\}_{c\in C}$ が非交，と同値である．ただし，ここで

$$E^{\circ}_1(2c) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - 2c\| < 1\}$$

とおいた．接吻数問題の解説としては *Boyvalenkov–Dodunekov–Musin* [4] を，また球面上の一般的な符号理論については *Bannai–Bannai* [1]，あるいは *Bannai–Bannai–Ito–Tanaka* [2, 17, Chapter 5] を参照されたい．

Example 2.9 (球充填)**.** $M = I = \mathbb{R}^n$ とし，

$$R : M \times M \to I, \quad (x,y) \mapsto y - x$$

と定めると (M,I,R) は *BRP* 空間となる．ここで $A := \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \|\alpha\| \geq 2\} \cup \{0\}$ とおくと，A 幾何符号とは単位球充填の中心点集合に他ならない．球充填問題の一般的な解説は *Cohn* [6] を，また *Viazovska* らによる近年の驚くべき進展 [7, 16] については同じく *Cohn* [5] を参照されたい．

Example 2.10 (s 関係集合)**.** (M,I,R) を *BRP* 空間とする．自然数 s に対し，$\mathcal{S}_{\leq s} := \{\, S \subset I \mid \#S \leq s \,\}$ とおく．M の部分集合 C が s 関係集合であるとは，$\#(R(C \times C)) \leq s$ が成り立つことをいう．このとき s 関係集合と $\mathcal{S}_{\leq s}$ 幾何符号は等価である．

Example 2.11 (距離空間上の距離集合)**.** (M, d) を距離空間とし，*Example 2.2* の意味での *BRP* 空間 (M, I, R) を考える．自然数 s について，$\mathcal{S}_{\leq s}$ を I における濃度 s 以下の部分集合全体とする．このとき $\mathcal{S}_{\leq s}$ 幾何符号（s 関係集合）は $(s-1)$ 距離集合と等価である．ただしここでは「$s-1$ 距離集合」とは，0 を除く距離の種類が高々 $s-1$ 種類である集合を意味する．

参考文献として，球面上の距離集合については *Bannai–Bannai* [1]，ユークリッド空間上の距離集合については *Pach–Agarwal* [14]，等角直線族（射影空間上の 1 距離集合）については *Greaves–Koolen–Munemasa–Szöllősi* [9] を挙げておく．

Example 2.12 (群作用の固定点自由性)**.** G を群とし，$M = I = G$ とおく．$R : G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto x^{-1}y$ とすると $(M, I, R) = (G, G, R)$ は *BRP* 空間となる．L, H を G の部分群とし，剰余類集合 G/H への L 作用を考える．また $\mathcal{P}(G)$ の下方閉部分集合 $\mathcal{S}^H$ を

$$\mathcal{S}^H := \{S \subset G \mid S \cap gHg^{-1} \subset \{e\} \textit{ for any } g \in G\}$$

とおく．このとき L 作用 *on* G/H が固定点自由であること，すなわち任意の $l \in L \setminus \{e\}$，任意の $p \in G/H$ について $lp \neq p$ となることと，L が $\mathcal{S}^H$ 幾何符号であることは同値である．

2.3. BRP 同型射と幾何符号理論.

"幾何符号は BRP 同型で保たれる" ということを定式化しておく．

Theorem 2.13. *(M, I, R), (M', I', R') を BRP 空間とし，(φ, ψ) を (M, I, R) から (M', I', R') への BRP 同型射とする．$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(I)$ を下方閉部分集合とし，*

$$\mathcal{S}' := \{\, \psi(A) \mid A \in \mathcal{S} \,\}$$

とおく．このとき，全単射

$$\varphi_{\mathrm{im}} : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M'), \quad S \longmapsto \varphi(S)$$

は $\mathcal{P}(M)_{\mathcal{S}}$ と $\mathcal{P}(M')_{\mathcal{S}'}$ の間の全単射を誘導する．

3. 局所コンパクト等質空間上の不連続群と固有な群作用

本稿の主テーマの一つである局所コンパクト等質空間上の不連続群論および固有な群作用についての各種定義や概要を紹介する．

3.1. 固有な群作用と不連続作用.

L を位相群とし，X を局所コンパクト Hausdorff 位相空間とする．L の X への連続作用が固有 (proper) であるとは，X の任意のコンパクト部分集合 D について L の閉部分集合 $L_D := \{l \in L \mid lD \cap D \neq \emptyset\}$ がコンパクトであることをいう．これは写像

$$L \times X \to X \times X,\ (l, x) \mapsto (lx, x)$$

が固有であることと同値である．L の X への作用が固有であるとき，その軌道空間 $X_L := L\backslash X$ は Hausdorff 空間になる．また L 作用が固定点自由 (L の非単位元は X で固定点を持たない) という設定においては，X_L の Hausdorff 性と L 作用の固有性は同値である．

Γ を離散群 (位相群であって位相が離散位相) とする．本稿では Γ の X への同相作用 (Γ から Homeo(X) への群準同型) が不連続 (discontinuous) であるとは, 軌道空間 X_Γ が Hausdorff で, 商写像 $\pi : X \to X_\Gamma$ が Γ-正則被覆写像 (Γ-主束) であることとする．これは Γ 作用が固有かつ固定点自由であることと同値である．また Γ が捩れ元を持たない場合には固有性から固定点自由性が自動的に従う．

Γ が X に不連続に作用しているとする．X が局所的な幾何構造 (局所ユークリッド構造, リーマン計量などのテンソル場など) を持っており, Γ 作用がその構造を保っているとき, 商空間 X_Γ にも局所幾何構造が移植される．特に X が可微分多様体で Γ が微分同相として作用している場合は X_Γ も可微分多様体となり, また例えば X が定断面曲率リーマン多様体で, Γ が等長微分同相として作用している場合には, X_Γ も定断面曲率リーマン多様体となる．

3.2. **局所コンパクト Hausdorff 等質空間．** G を局所コンパクト Hausdorff 位相群, X を局所コンパクト Hausdorff 位相空間とする．また G は X に連続かつ推移的に作用しており, さらに各 $x \in X$ について, 軌道写像 $G \to X,\ g \mapsto gx$ が開写像である[4]とする．このとき X を局所コンパクト Hausdorff 等質 G 空間と呼ぶ．

各 $x \in X$ における固定化部分群を $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ と表すと, 剰余類空間 (位相は商位相) G/G_x と X は以下の G 同変写像により同相である:

$$G/G_x \to X,\ gG_x \mapsto gx.$$

逆に G の閉部分群 H について, 剰余類空間 G/H は局所コンパクト Hausdorff 等質空間である． この対応は基点付き局所コンパクト Hausdorff 等質 G 空間全体 (を基点を保つ G 同変同相で割ったもの) と G の閉部分群全体の間の一対一対応を与える．等質空間の基点を取り換えると, G の固定化部分群は G の共役により取り換えられる．特に局所コンパクト Hausdorff 等質 G 空間全体 (を G 同変同相で割ったもの) と G の閉部分群の共役類全体が一対一に対応する．

特に G が Lie 群である場合には, 等質 G 空間 X には自然に可微分多様体構造が定まることが知られている．またこの場合, 各種等質 G 空間上の G 不変テンソル場を探す問題は固定化部分群の表現論の議論に帰着できることが知られており, 例えば X 上の G 不変擬リーマン計量全体などの局所幾何構造の集合を線型代数の言葉で記述することが可能である (詳しくは [18, 第 10 章] などを参照されたい)．

3.3. **局所コンパクト等質空間上の固有な群作用．** 以下，G を局所コンパクト Hausdorff 位相群とする．本節では，閉部分群の等質空間への作用が固有であることを，G の内部における部分集合の相対的位置関係として記述する．

Definition 3.1 (小林 [12])**.** G の部分集合 $S_1, S_2 \subset G$ に対し，

$$S_1 \pitchfork S_2 \quad in\ G$$

[4] G が第二可算の場合, 群作用が連続かつ推移的であるなら軌道写像の開性は自動的に従う

であるとは，次の同値な条件が成立することをいう：

(i) 任意のコンパクト部分集合 $C \subset G$ に対して $(CS_1C^{-1}) \cap S_2$ は G において相対コンパクトである．

(ii) 任意のコンパクト部分集合 $C \subset G$ に対して $S_1 \cap (CS_2C^{-1})$ は G において相対コンパクトである．

(iii) 任意のコンパクト部分集合 $C_1, C_2 \subset G$ に対して $C_1S_1C_1^{-1} \cap C_2S_2C_2^{-1}$ は G において相対コンパクトである．

この条件は，S_1 と S_2 の局所的構造ではなく，G における大域的な有界性の振る舞いのみに依存している．

Theorem 3.2 (小林 [11]). H および L を G の閉部分群とする．このとき次は同値である：

(i) L の G/H への作用は固有である．

(ii) H の G/L への作用は固有である．

(iii) G の $G/H \times G/L$ への対角作用は固有である．

(iv) $H \pitchfork L$ *in* G が成立する．

この定理により，等質空間上の固有作用は，G の中における二つの閉部分群の相対的位置関係として完全に記述されることが分かる．

以上は任意の局所コンパクト群に対して成り立つ一般論である．以下では G が線形簡約 Lie 群であると仮定する．この場合には，小林 [10, 12], Benoist [3] により, 上記の条件はリーマン幾何の言葉でより具体的に記述できることが知られている．K を G の極大コンパクト部分群とすると，商空間 $M := G/K$ は非コンパクト型リーマン対称空間となる．Lie 代数のカルタン分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

をとり，$\mathfrak{p}$ に $\mathrm{Ad}(K)$-不変内積を固定する．この内積は M 上の G-不変リーマン計量を誘導する．$\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ をとり，$A := \exp(\mathfrak{a})$ とおくと，

$$\exp(\mathfrak{a})K \subset M$$

は M の極大平坦部分多様体となる．さらに

$$W := N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$$

を Weyl 群とすると，W は $\mathfrak{a}$ 上に直交変換として作用する．対称空間 M 上の K 作用は，極大平坦部分多様体 $\exp(\mathfrak{a})K$ を断面とする超極作用 (hyperpolar action) である (cf. [8])．したがって各 K-軌道は $\exp(\mathfrak{a})K$ と交わり，その交点は Weyl 群の作用を除いて一意に定まる．よって自然な同一視 $K\backslash M \simeq W\backslash\mathfrak{a}$ が得られる．$\mathfrak{a}$ 上の内積は W-不変であるから，$W\backslash\mathfrak{a}$ は自然な距離空間となる．いま写像 $\pi : G \to M,\ g \mapsto gK$ と商写像 $M \to K\backslash M$ を合成すると $G \longrightarrow K\backslash M \simeq W\backslash\mathfrak{a}$ が得られる．この写像 $\mu : G \longrightarrow W\backslash\mathfrak{a}$ をカルタン射影と呼ぶ．

Theorem 3.3 (小林 [10, 12]–Benoist [3]). 上記の設定のもとで，閉部分群 $H, L \subset G$ に対し，次は同値である：

(i) $H \pitchfork L$ *in* G.

(*ii*) 任意の $r \geq 0$ に対して

$$\mu(H) \cap E_r(\mu(L))$$

は $W\backslash\mathfrak{a}$ において有界である．ただし $E_r(\mu(L))$ は距離空間 $W\backslash\mathfrak{a}$ における部分集合 $\mu(L)$ の r-近傍とする．

したがって，簡約型の場合には，等質空間上の固有作用は，カルタン射影像の大域的距離構造における "漸近的非交性" として理解できる．

Example 3.4. *G を簡約型 Lie 群とし，H を G の簡約型部分群とする．このとき以下の二条件は同値である (*小林 [10]*)*

(*i*) $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H$.

(*ii*) *G の任意の非コンパクト閉部分群 L について，L の G/H への作用は固有ではない (このような現象を等質空間 G/H 上の Calabi–Markus 現象という).*

この定理は *Theorem 3.3* の系として得られる．証明の概略を紹介しよう．$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H$ が成り立つとする．このとき $\mu(H) = W\backslash\mathfrak{a}$ となる．特に G の任意の非コンパクト閉部分群 L について，$\mu(L) = \mu(H) \cap \mu(L)$ は非有界となり，L の G/H への作用は固有ではない．逆に $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G > \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H$ であるとき，$\mu(H)$ は $W\backslash\mathfrak{a}$ において，いくつかの閉凸錐の和の形で書ける．特に $\mathfrak{a}$ の一次元線型部分空間 V であって，$\mu(H)$ と $W \cdot V$ が交わらないようなものが取れる．このとき $L := \exp V$ は G の非コンパクト可換部分 *Lie* 群であり，$\mu(L) = W \cdot V$ が成り立つ．任意の $r \geq 0$ について $\mu(H) \cap E_r(W \cdot V)$ は有界であり，このことから L の G/H への作用は固有である．

Example 3.5. *$G = SO(2,2)$ とし，閉部分群 H, L を $H = SO(2,1)$, $L = SU(1,1)$ とする．このとき G/H は符号 $(2,2)$ 不定値内積空間 $\mathbb{R}^{2,2}$ の閉部分多様体 $\{x \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \|x\|_{2,2} = -1\}$ と見なせ，またこの多様体は定断面曲率な G 不変擬リーマン計量を持つ．また $W\backslash\mathfrak{a}$ は距離空間として*

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq x_2 \geq 0\}$$

と等長同型であり，この同型を通じて

$$\mu(H) = \{x_1 = 0\}, \ \mu(L) = \{x_1 = x_2\}$$

とみなせることが分かる．このとき $\mu(H) \cap E_r(\mu(L))$ は任意の $r \geq 0$ について有界となるので，L 作用 on $X := G/H$ は固有である．特に L の torsion-free 離散部分群 Γ (例えば種数が 2 以上の曲面群や有限階数自由群などが実現可能) を固定すると，Γ は $X := G/H$ に不連続に作用し，特に $X_\Gamma := \Gamma\backslash X$ は定断面曲率擬リーマン多様体の構造を持つ．

4. 有界型群の等質空間上の固有な群作用

局所コンパクト等質空間上の固有な群作用をより一般の設定で考えたい．ここでは有界型空間という枠組みを用いて，"位相を忘れた設定" で等質空間と固有な群作用を再定式化する．

4.1. **有界型空間と有界型写像.** X を集合とする．冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の下方閉部分集合 $\mathcal{B}_X$ が X における前有界型構造 (pre-bornological structure) であるとは, $\mathcal{B}_X$ は有限和で閉じている (特に $\emptyset \in \mathcal{B}_X$) こととする．また前有界型構造 $\mathcal{B}_X$ が有界型構造 (bornological structure) であるとは, $\mathcal{B}_X$ が X を被覆する, すなわち $\bigcup \mathcal{B}_X = X$ を満たすこととする．有界型構造が備わった集合を有界型空間と呼ぶことにする．有界型空間 $(X, \mathcal{B}_X)$ について, $\mathcal{B}_X$ の元を特に X における有界集合と呼ぶ.

有界型空間の間の写像が有界型であるとは, 定義域における有界集合の像が終域の有界集合になることとする．有界型空間と有界型写像は圏をなす．この圏を本稿では **Born** と書くことにする.

有界型空間の間の有界型写像が固有 (proper) であるとは, 終域の有界集合の逆像が定義域における有界集合になることとする．固有な有界型写像全体は **Born** の部分圏をなす．これを $\mathbf{Born}_{\mathbf{proper}}$ と書く.

圏 **Born** における同型射とは全単射な固有有界型写像に他ならない. この同型射を本稿では有界型同型写像とよぶ.

Example 4.1. 距離空間 (X, d) について,

$$\mathcal{B}^d := \{B \subset X \mid B \textit{ is bounded in } (X, d)\}$$

は X 上の有界型構造を定める．また距離空間の間のリプシッツ写像による有界集合の像は有界である．したがって, リプシッツ写像は有界型写像とみなせる．これにより距離空間とリプシッツ写像の圏から **Born** への関手が定まる.

Example 4.2. *Hausdorff* 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について, 閉包コンパクト部分集合全体を

$$\mathcal{B}^{\mathcal{O}} := \{B \subset X \mid \textit{the closure of } B \textit{ in } X \textit{ is compact} \}$$

とおく．このとき $(X, \mathcal{B}^{\mathcal{O}})$ は有界型空間である．また *Hausdorff* 位相空間の間の連続写像は上記の意味の有界型空間の間の有界型写像を誘導する．これにより *Hausdorff* 位相空間と連続写像の圏から **Born** への関手が定まる．また連続写像が *Hausdorff* 位相空間の間の写像として固有であることと, 対応する有界型空間の間の有界型写像として固有であることは同値である．特に上記の関手は *Hausdorff* 位相空間と連続固有写像の圏から $\mathbf{Born}_{\mathbf{proper}}$ への関手を誘導する.

Remark 4.3. 距離空間 (X, d) について, 誘導位相を $\mathcal{O}^d$ と書くと, $\mathcal{B}^{\mathcal{O}^d} \subset \mathcal{B}^d$ となる．等号 $\mathcal{B}^{\mathcal{O}^d} = \mathcal{B}^d$ が成立する, すなわち有界閉集合がコンパクトになるような距離空間, を "固有な距離空間 *(proper metric space)*" や "*Heine–Borel* 距離空間 *(Heine–Borel metric space)*" などとよぶ.

有界型空間 $(X, \mathcal{B}_X)$ と $(Y, \mathcal{B}_Y)$ について, 直積集合 $X \times Y$ 上の有界型構造 $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ を

$$\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y := \{B \subset X \times Y \mid B \subset B_X \times B_Y \text{ for some } B_X \in \mathcal{B}_X, B_Y \in \mathcal{B}_Y\}$$

として定める．有界型空間 $(X \times Y, \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y)$ を $(X, \mathcal{B}_X)$ と $(Y, \mathcal{B}_Y)$ の直積とよぶ.

また本稿では, 有界型空間 $(X, \mathcal{B}_X)$ と $(Y, \mathcal{B}_Y)$ について, 有界型写像 $\pi : X \to Y$ が商であるとは, π は全射であり, また Y の任意の有界集合が, X のある有界集合の像として書けることとする.

有界型空間 $(X, \mathcal{B}_X)$ から集合 Y への全射写像 $\pi : X \to Y$ について, π が商となるような Y 上の有界型構造 $\pi_* \mathcal{B}_X$ が一意に存在する. 実際

$$\pi_* \mathcal{B}_X := \{\pi(B) \mid B \in \mathcal{B}_X\}$$

とすればよい. この有界型構造を商有界型構造とよぶ.

4.2. **有界型群と有界型空間上の固有な群作用.** L を群であって, 有界型空間でもあるものとする. L が有界型群 (bornological group) であるとは, 積写像 $L \times L \to L, (l_1, l_2) \mapsto l_1 \cdot l_2$ および逆元を与える写像 $L \to L,\ l \mapsto l^{-1}$ が共に有界型写像であることとする. ただし $L \times L$ には有界型空間としての直積の構造が定まっているものとする. これは **Born** における群対象を定める.

$X = (X, \mathcal{B}_X)$ を有界型空間, $L = (L, \mathcal{B}_L)$ を有界型群とする. X 上の L 作用が有界型であるとは, 写像

$$L \times X \to X,\ (l, x) \mapsto lx$$

が有界型であることとする. ただし $L \times X$ には有界型空間としての直積の構造が定まっているものとする. また L の X 上の有界型作用が固有であるとは, 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ について,

$$L_B := \{l \in L \mid lB \cap B \neq \emptyset\}$$

が有界であることとする. これは有界型写像

$$L \times X \to X \times X,\ (l, x) \mapsto (lx, x)$$

が固有であることと同値である.

Example 4.4. $L = (L, \mathcal{O}_L)$ を局所コンパクト *Hausdorff* 位相群とし, $X = (X, \mathcal{O}_X)$ を局所コンパクト *Hausdorff* 位相空間とする. このとき $(L, \mathcal{B}^{\mathcal{O}_L})$ は有界型群, $(X, \mathcal{B}^{\mathcal{O}_X})$ は有界型集合である. また L の X への連続作用はこの意味で有界型作用でもあり, 連続作用として固有であることと, 有界型作用として固有であることは同値である.

4.3. **有界型等質空間.** $G = (G, \mathcal{B}_G)$ を有界型群とし, X を有界型空間とする. また G は X に有界かつ推移的に作用しており, 各 $x \in X$ について, 軌道写像

$$G \to X,\ g \mapsto gx$$

(これは有界型写像になる) が商写像, すなわち X の任意の有界集合が G のある有界集合の像として書けるとする. このとき X を有界型 G 等質空間と呼ぶ.

各 $x \in X$ における固定化部分群を $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ と表すと, 剰余類集合 G/G_x に商有界型構造を定めたものと X は以下の G 同変写像により有界型空間として同型となる:

$$G/G_x \to X,\ gG_x \mapsto gx.$$

逆に G の部分群 H について, 剰余類空間 G/H は有界型 G 等質空間である. この対応は基点付き有界型等質 G 空間全体 (を基点を保つ G 同変有界型同型で割ったもの) と G の部分群全体の間の一対一対応を与える. 等質空間の基点を取り換えると, G の固定化部分群は G の共役により取り換えられる. 特に有界型等質 G 空間全体 (を G 同変有界型同型で割ったもの) と G の部分群の共役類全体が一対一に対応する.

Example 4.5. $G = (G, \mathcal{O}_G)$ を局所コンパクト *Hausdorff* 位相群とし, $X = (X, \mathcal{O}_X)$ を局所コンパクト *Hausdorff* 等質 G 空間とする. このとき有界型空間 $(X, \mathcal{B}^{\mathcal{O}_X})$ は有界型等質 G 空間となる. また G の閉部分群 H について, G/H に定まる商位相 *(Hausdorff)* が誘導する有界型構造と, G に位相から定まる有界型構造を考えて, その商有界型構造を G/H に定めたものは一致する. ただし H が G において閉でない場合は G/H の商位相が *Hausdorff* にならず, 同様の主張は成り立たないので注意.

4.4. **有界型等質空間上の固有な群作用.** Theorem 3.2 の一般化として, 有界型等質空間上の群作用の固有性について, 以下が成り立つ:

Theorem 4.6. *G を有界型群とし, 各 $D, S \subset G$ について,*

$$E_D^{LR}(S) := DSD^{-1} := \{d_1 s d_2^{-1} \mid s \in S, d_1, d_2 \in D\} \subset G$$

とおく. また H, L を G の部分群とする. 以下は同値:

(i) *G/H への L 作用は固有.*
(ii) *G/L への H 作用は固有.*
(iii) *$G/H \times G/L$ への対角 G 作用は固有.*
(iv) *任意の有界集合 D of G について, G の部分集合 $H \cap E_D^{LR}(L)$ は有界.*
(v) *任意の有界集合 D of G について, G の部分集合 $E_D^{LR}(H) \cap L$ は有界.*
(vi) *任意の有界集合 D_1, D_2 of G について, G の部分集合 $E_{D_1}^{LR}(H) \cap E_{D_2}^{LR}(L)$ は有界.*

5. 粗空間論

本稿の主目的は幾何学的符号理論の枠組みを "粗幾何学" の観点から広げ, 有界型等質空間上の群作用の固有性を, 符号理論的な意味で特徴づけることである. 本節では粗幾何学を展開する舞台となる粗空間に関する言葉遣いを上半束豊穣圏の言葉を用いて整備する.

5.1. **ダガー USL 豊穣圏.** まず上半束 (upper semi-lattice, 以下 USL) およびダガー USL 豊穣圏の定義を導入する.

Definition 5.1. 上半束, それらの間の射およびテンソル積を次のように定める.

(i) 二項演算付き半順序集合 $(\Omega, \leq, \vee)$ が **上半束 *(USL)*** であるとは, 任意の $a, b \in \Omega$ に対して $a \vee b$ が $\{a, b\}$ の上界の最小元であることをいう.

(*ii*) ***USL* 射**とは，半順序および二項演算を保つ *USL* の間の写像をいう．

(*iii*) $(\Omega_1, \leq, \vee), (\Omega_2, \leq, \vee)$ を *USL* とする．$\Omega_1 \times \Omega_2$ 上に次を定める：

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \iff a_1 \leq b_1 \text{ かつ } a_2 \leq b_2,$$
$$(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2) := (a_1 \vee b_1,\ a_2 \vee b_2).$$

このようにして得られる *USL* を Ω_1, Ω_2 の**テンソル積**とよび，$\Omega_1 \otimes \Omega_2$ と書く．

USL とそれらの間の USL 射は，上記のテンソル積について対称モノイダル閉圏をなす．

Definition 5.2. *USL* 豊穣圏およびダガー *USL* 豊穣圏を次のように定める．

(*i*) 圏 C が ***USL* 豊穣圏**であるとは，任意の対象 $X, Y \in C$ について $C(X, Y)$ に *USL* 構造が定まっており，さらに任意の $X, Y, Z \in C$ に対し

$$C(Y, Z) \otimes C(X, Y) \longrightarrow C(X, Z),\ (f, g) \longmapsto f \circ g$$

が *USL* 射となることをいう．

(*ii*) *USL* 豊穣圏 C が **ダガー *USL* 豊穣圏**であるとは，C における対象上で恒等な自己反変関手 † が定まっており，任意の対象 X, Y に対して

$$C(X, Y) \longrightarrow C(Y, X),\ f \longmapsto f^\dagger$$

が *USL* 射となることをいう．

Definition 5.3. モノイド Ω が **ダガー *USL* モノイド**であるとは，次の条件を満たすことである．

(*i*) Ω が *USL* 構造 $(\leq, \vee)$ を持つ．

(*ii*) Ω に自己反変写像 $\dagger : \Omega \to \Omega,\ a \mapsto a^\dagger$ が定まっており，次を満たす：

(a) $(a^\dagger)^\dagger = a$ （反射性），
(b) $a \leq b \ \Rightarrow\ a^\dagger \leq b^\dagger$ （順序保全性），
(c) $(a \vee b)^\dagger = a^\dagger \vee b^\dagger$ （*join* 保全性），
(d) $(a \cdot b)^\dagger = b^\dagger \cdot a^\dagger$ （積に関する反対称性），
(e) $e^\dagger = e$ （単位元の不変性）．

このとき $(\Omega, \vee, \cdot, e, \dagger)$ をダガー *USL* モノイドとよぶ．

ダガー USL 豊穣圏 C において，対象 X を固定すると $C(X) := C(X, X)$ はダガー USL モノイドである．

Definition 5.4. ダガー *USL* モノイド Ω の部分集合 Ω' が **下方閉ダガー *USL* 部分モノイド**であるとは，次の条件を満たすことである．

(*i*) （部分モノイド）$e \in \Omega'$ かつ $a, b \in \Omega'$ ならば $a \cdot b \in \Omega'$.

(*ii*) （下方閉）$b \in \Omega'$ かつ $a \leq b$ ならば $a \in \Omega'$.

(*iii*) （$\vee$-閉）$a, b \in \Omega'$ ならば $a \vee b \in \Omega'$.

(*iv*) （ダガー閉）$a \in \Omega'$ ならば $a^\dagger \in \Omega'$.

このとき Ω' は Ω から継承した順序・$\vee$・$\cdot$・e・$\dagger$ によりダガー *USL* モノイドとなり，包含写像 $i : \Omega' \hookrightarrow \Omega$ は *USL* 構造を保ち，モノイド準同型かつダガー射である．

5.2. **PUP 射のなすダガー USL 豊穣圏.** 本節では「冪集合の間の任意和を保つ写像」を基礎として粗幾何学を展開する．

Definition 5.5. 集合 X, Y に対し，冪集合の間の写像

$$\eta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$$

が **任意和を保つ**とは，任意の $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して

$$\eta\left(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\right) = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \eta(U)$$

が成り立つことをいう．本稿ではこのような η を X から Y への ***PUP* 射**[5]とよび，単に $\eta : X \xrightarrow{\mathrm{PUP}} Y$ と書く．

Theorem 5.6. 集合と *PUP* 射はダガー *USL* 豊穣圏をなす．この圏を PUP と書く．ただし, 各集合 X,Y に対して $\mathrm{PUP}(X,Y)$ 上の *USL* 構造 $(\subset, \cup)$ を次で定める：

(i) $\eta_1 \subset \eta_2 \iff \eta_1(S) \subset \eta_2(S)$ が任意の $S \subset X$ に対して成り立つ.

(ii) $\eta_1 \cup \eta_2 : X \xrightarrow{\mathrm{PUP}} Y$ を

$$(\eta_1 \cup \eta_2)(S) := \eta_1(S) \cup \eta_2(S) \qquad (S \subset X)$$

によって定める.

さらに，各 $\eta \in \mathrm{PUP}(X,Y)$ に対し，$\eta^\dagger \in \mathrm{PUP}(Y,X)$ を次の条件で定める：任意の $S_X \subset X$, $S_Y \subset Y$ に対して

$$\eta(S_X) \cap S_Y \neq \emptyset \iff S_X \cap \eta^\dagger(S_Y) \neq \emptyset$$

が成り立つ.

Remark 5.7. 圏 PUP は二項関係の圏 Rel と圏同型である．実際，集合 X, Y に対して $\mathrm{Rel}(X,Y) := \mathcal{P}(X \times Y)$ であり，$\mathrm{PUP}(X,Y)$ とは次の写像で全単射に対応する*:*

$$\mathrm{PUP}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X\times Y), \quad \eta \longmapsto A_\eta := \{\, (x,y) \in X\times Y \mid y \in \eta(x) \,\}.$$

以下で定義する “fully-defined” という概念は, 後に粗空間の間の射を定義するときに用いる:

Definition 5.8. *PUP* 射 $\eta : X \xrightarrow{\mathrm{PUP}} Y$ が ***fully-defined*** であるとは, 任意の空でない部分集合 $S \subset X$ に対して $\eta(S)$ が空でないことをいう.

集合と fully-defined PUP 射は圏 PUP の wide subcategory をなす. ただしこの部分圏は USL 豊穣構造やダガー構造を持たない.

[5]PUP は power union preserving の略

5.3. **粗空間と粗射.** ダガー USL 豊穣圏 PUP を基礎として，粗圏（粗空間およびそれらの間の粗射のなす圏）を定義する．

Definition 5.9. 集合 X に対し，ダガー *USL* モノイド $\mathrm{PUP}(X) := \mathrm{PUP}(X,X)$ の下方閉ダガー部分 *USL* モノイドを X 上の**粗構造**とよぶ．粗構造の定まった集合を**粗空間**といい，粗構造の元を ***entourage*** とよぶ．

Example 5.10. 集合 X について，

$$\mathcal{E}^{\min} := \{E \in \mathrm{PUP}(X) \mid E \subset \mathrm{id}_{\mathcal{P}(X)}\}$$

とおくと，これは X 上の粗構造を定める．これは X 上の粗構造の中で最小のものである．本稿ではこれを X 上の最小粗構造とよぶ．

Example 5.11. (X,d) を距離空間とする．各 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し $E_r \in \mathrm{PUP}(X)$ を

$$E_r : X \overset{\mathrm{PUP}}{\longrightarrow} X, \quad S \longmapsto E_r(S) := \{\, x \in X \mid d(s,x) \leq r \textit{ for some } s \in S \,\}$$

と定める．このとき

$$\mathcal{E}_X^d := \{\, E \in \mathrm{PUP}(X) \mid E \subset E_r \textit{ for some } r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \,\}$$

は X 上の粗構造を定める．

Example 5.12. $G = (G,\mathcal{B})$ を有界型群とする．各 $B \in \mathcal{B}$ に対して $E_B^R, E_B^{LR} \in \mathrm{PUP}(G)$ を

$$E_B^R : G \overset{\mathrm{PUP}}{\longrightarrow} G, \quad S \longmapsto SB := \{\, sb \mid s \in S,\ b \in B \,\},$$
$$E_B^{LR} : G \overset{\mathrm{PUP}}{\longrightarrow} G, \quad S \longmapsto BSB^{-1} := \{\, b_1 s b_2^{-1} \mid s \in S,\ b_1, b_2 \in B \,\}$$

と定める．このとき

$$\mathcal{E}_G^{R,\mathcal{B}} = \mathcal{E}_G^R := \{\, E \in \mathrm{PUP}(G) \mid E \subset E_B^R \textit{ for some } B \in \mathcal{B} \,\},$$
$$\mathcal{E}_G^{LR,\mathcal{B}} = \mathcal{E}_G^{LR} := \{\, E \in \mathrm{PUP}(G) \mid E \subset E_B^{LR} \textit{ for some } B \in \mathcal{B} \,\}$$

はいずれも G 上の粗構造を定める．本稿では $G^R := (G, \mathcal{E}_G^R)$，$G^{LR} := (G, \mathcal{E}_G^{LR})$ と書く．

Definition 5.13. 粗空間 $X = (X, \mathcal{E}_X)$, $Y = (Y, \mathcal{E}_Y)$ に対して：

(*i*) $\eta : X \overset{\mathrm{PUP}}{\longrightarrow} Y$ が ***controlled*** であるとは，$\mathrm{Ad}_\eta(\mathcal{E}_X) \subset \mathcal{E}_Y$ が成り立つことをいう．ただし

$$\mathrm{Ad}_\eta : \mathrm{PUP}(X) \to \mathrm{PUP}(Y), \quad E \longmapsto \mathrm{Ad}_\eta E := \eta \circ E \circ \eta^\dagger$$

と定める．

(*ii*) $\eta : X \overset{\mathrm{PUP}}{\longrightarrow} Y$ が ***tame*** であるとは，η が *controlled* かつ *fully-defined* であることをいう．

粗空間と tame PUP 射は圏をなす．この圏を Tame と書く．

Proposition 5.14. *Tame PUP* 射 $\eta_1, \eta_2 : X \overset{\mathrm{PUP}}{\longrightarrow} Y$ に対して次は同値である：

(*i*) $\eta_1 \circ \eta_2^\dagger \in \mathcal{E}_Y$.
(*ii*) $\eta_2 \circ \eta_1^\dagger \in \mathcal{E}_Y$.
(*iii*) ある $E \in \mathcal{E}_Y$ が存在して $\eta_1 \subset E \circ \eta_2$.
(*iv*) ある $E \in \mathcal{E}_Y$ が存在して $\eta_2 \subset E \circ \eta_1$.

これらの条件が成り立つとき，$\eta_1 \sim \eta_2$ と書く．この関係 $\sim$ は $\mathrm{Tame}(X, Y)$ 上の同値関係を定める．

Theorem 5.15. 同値関係 $\sim$ は圏 Tame における *congruence relation* を誘導する．すなわち，*tame PUP* 射 $\eta_1, \eta_2 : X \xrightarrow{\mathrm{PUP}} Y$，$\xi_1, \xi_2 : Y \xrightarrow{\mathrm{PUP}} Z$ が $\eta_1 \sim \eta_2$ かつ $\xi_1 \sim \xi_2$ を満たすならば

$$\xi_1 \circ \eta_1 \ \sim\ \xi_2 \circ \eta_2$$

が成り立つ．

Definition 5.16. 商圏 $\mathrm{Tame}/\!\sim$ を**粗圏**とよび，Coarse と書く．粗圏の射（すなわち *tame PUP* 射の同値類）を**粗射**といい，$f : X \xrightarrow{\mathrm{coarse}} Y$ のように表す．粗圏 Coarse の同型射を**粗同値**とよぶ．

Remark 5.17. 上で導入した粗圏は，*John Roe* の教科書 [15] の言葉では粗空間と *bornological map* のなす圏を *close* 類で割って得られる圏と圏同値である（宮地–長屋–小川–奥田: 論文準備中）．

5.4. **直積粗空間.** 粗空間の直積についての用語をまとめておく．

Definition 5.18. $X = (X, \mathcal{E}_X)$ および $Y = (Y, \mathcal{E}_Y)$ を粗空間とする．直積集合 $X \times Y$ 上の粗構造 $\mathcal{E}_X \otimes \mathcal{E}_Y$ を次で定める．

各 $E_X \in \mathcal{E}_X$, $E_Y \in \mathcal{E}_Y$ に対して *PUP* 射

$$E_X \otimes E_Y : X \times Y \xrightarrow{\mathrm{PUP}} X \times Y, \quad S \longmapsto \bigcup_{(x,y) \in S} \big(E_X(x) \times E_Y(y)\big)$$

を定める．そして

$$\mathcal{E}_X \otimes \mathcal{E}_Y := \{\, E \in \mathrm{PUP}(X \times Y) \mid E \subset E_X \otimes E_Y \ \textit{for some}\ E_X \in \mathcal{E}_X,\ E_Y \in \mathcal{E}_Y \,\}$$

とする．粗空間 $(X \times Y, \mathcal{E}_X \otimes \mathcal{E}_Y)$ を $(X, \mathcal{E}_X)$ と $(Y, \mathcal{E}_Y)$ の**直積粗空間**とよぶ．

Theorem 5.19. X, X', Y, Y' を粗空間とし，$\eta_1 : X \xrightarrow{\mathrm{PUP}} Y$, $\eta_2 : X' \xrightarrow{\mathrm{PUP}} Y'$ を *tame PUP* 射とする．このとき

$$\eta_1 \otimes \eta_2 : X \times X' \xrightarrow{\mathrm{PUP}} Y \times Y', \quad S \longmapsto \bigcup_{(x,y) \in S} \big(\eta_1(x) \times \eta_2(y)\big) \qquad (S \subset X \times X')$$

は直積粗構造に関して *tame PUP* 射となる．

さらに粗射 $f_1 : X \xrightarrow{\mathrm{coarse}} Y$, $f_2 : X' \xrightarrow{\mathrm{coarse}} Y'$ に対し，粗射 $f_1 \otimes f_2 : X \times X' \xrightarrow{\mathrm{coarse}} Y \times Y'$ を

$$f_1 \otimes f_2 := [\eta_1 \otimes \eta_2]$$

として定める（ただし $\eta_1 \in f_1$, $\eta_2 \in f_2$）．この定義は $\eta_1 \in f_1$, $\eta_2 \in f_2$ の取り方によらない．

5.5. **商粗射.** 粗圏 Coarse における商を次のように定める.

Definition 5.20. 本稿では, *tame PUP* 射 $\eta : X \xrightarrow{\text{PUP}} Y$ が **半商**であるとは, 任意の $E_Y \in \mathcal{E}_Y$ に対して, ある $E_X \in \mathcal{E}_X$ が存在し

$$E_X \circ \eta^\dagger \supset \eta^\dagger \circ E_Y$$

が成り立つことをいう. また半商 *PUP* 射 η が **商**であるとは, さらに $\eta(X) = Y$ を満たすことをいう.

Remark 5.21. *Tame PUP* 射 $\eta : X \xrightarrow{\text{PUP}} Y$ が半商であるとき, $\eta(X) \subset Y$ は $\mathcal{E}_Y$*-stable*, すなわち任意の $E \in \mathcal{E}_Y$ に対して $E(\eta(X)) \subset \eta(X)$ が成り立つ. 特に半商性は *tame* の同値関係で**閉じていない**ことに注意する必要がある.

Definition 5.22. 本稿では, 粗射 $f : X \xrightarrow{\text{coarse}} Y$ が **商粗射**（*resp.* **半商粗射**）であるとは, f の代表元として商 *tame PUP* 射（*resp.* 半商 *tame PUP* 射）$\eta \in f$ が存在することをいう.

粗射 $f : X \xrightarrow{\text{coarse}} Y$ が粗圏において epi であることと, ある $\eta \in f$ が存在して $\eta(X) = Y$ を満たすことは同値である. 特に商粗射は粗圏において epi である.

Example 5.23. 写像

$$\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \longmapsto y - x$$

を考える. $\mathbb{R}^n$ には通常の距離に基づく *Example 5.11* の粗構造を入れる. また $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ には直積粗構造を入れる. このとき

$$\pi_{\text{im}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{PUP}} \mathbb{R}^n, \quad S \longmapsto \pi(S)$$

は商 *tame PUP* 射である. したがって

$$R := [\pi_{\text{im}}] : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{coarse}} \mathbb{R}^n$$

は商粗射となる.

Example 5.24. 群 G を有界型群とし, *Example 5.12* で定めた粗空間 G^R, G^{LR} を考える. 全射写像

$$\pi : G \times G \longrightarrow G, \quad (x, y) \longmapsto x^{-1}y$$

に対して

$$\pi_{\text{im}} : G^R \times G^R \xrightarrow{\text{PUP}} G^{LR}, \quad S \longmapsto \pi(S)$$

は商 *tame PUP* 射である. したがって

$$R := [\pi_{\text{im}}] : G^R \times G^R \xrightarrow{\text{coarse}} G^{LR}$$

は商粗射となる.

5.6. **粗部分集合.** 粗空間における「粗部分集合」を次のように定める.

Definition 5.25. 粗空間 $X=(X,\mathcal{E}_X)$ に対し，$\mathcal{P}(X)$ 上に前順序 $\prec$ および同値関係 $\sim$ を次で定める．$S_1, S_2 \in \mathcal{P}(X)$ に対して

$$S_1 \prec S_2 \iff \exists E \in \mathcal{E}_X \textit{ such that } S_1 \subset E(S_2),$$
$$S_1 \sim S_2 \iff S_1 \prec S_2 \text{ かつ } S_2 \prec S_1.$$

Definition 5.26. 集合 $\mathcal{P}(X)$ の $\sim$ による同値類全体を

$$\mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(X) := \mathcal{P}(X)/\sim$$

と書く．$\mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(X)$ は誘導される半順序と有限和 *(*これらも同じ $\prec$, $\cup$ という記号で書く*)* により有限完備上半束（*USL* であって最小元を持つ）となる．$\mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(X)$ の元を $X=(X,\mathcal{E}_X)$ の**粗部分集合**とよぶ.

Definition 5.27. 粗射 $f : X \overset{\mathrm{coarse}}{\longrightarrow} Y$ に対して

$$f_{\mathrm{im}} : \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(X) \longrightarrow \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(Y), \quad S \longmapsto [\eta_f(S_0)]$$

と定める．ただし $S_0 \in S$, $\eta_f \in f$ とする．この定義は S_0, η_f の取り方によらない.

また粗射 f が半商であるとき

$$f^{\mathrm{pre}} : \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(X), \quad S \longmapsto [\eta_f^{\dagger}(S_0)]$$

と定める．ただし $S_0 \in S$, $\eta_f \in f$ で η_f は半商であるとする．この定義も S_0, η_f の取り方によらない.

対応 $f \mapsto f_{\mathrm{im}}$ は粗圏 Coarse から上半束の圏への関手を定める. 特に $f : X \overset{\mathrm{coarse}}{\longrightarrow} Y$ が粗同値なら, $f_{\mathrm{im}} : \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(X) \to \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(Y)$ は全単射である.

Definition 5.28. 写像

$$\mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(X) \times \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(X \times Y), \quad (S, S') \longmapsto S \otimes S'$$

を

$$S \otimes S' := [S_0 \times S_0']$$

によって定める．ただし $S_0 \in S$, $S_0' \in S'$ である．この定義は S_0, S_0' の取り方によらない.

5.7. **粗空間上の有界型構造と漸近的非交対.** $X=(X,\mathcal{E})$ を粗空間とする. 集合 X 上の前有界型構造 $\mathcal{B}$ が粗構造 $\mathcal{E}$ と compatible であるとは, 各 $E \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{B}$ について, $E(B) \in \mathcal{B}$ となることとする.

Example 5.29. 粗空間 $X=(X,\mathcal{E})$ について, $\mathcal{B}^{\emptyset} := \{\emptyset\}$ *(*つまり有界集合が空集合のみ*)* は *compatible* な前有界型構造である. また

$$\mathcal{B}^{\mathcal{E}} := \{B \subset X \mid \textit{there exists a finite subset } B_0 \textit{ of } X \\ \textit{and } E \in \mathcal{E} \textit{ such that } B \subset E(B_0)\}$$

は *compatible* な有界型構造である. $\mathcal{B}^{\mathcal{E}}$ を $X=(X,\mathcal{E})$ の標準的な有界型構造と呼ぶことにする.

Remark 5.30. 粗空間 X が粗連結である, つまり任意の $a, b \in X$ について $b \in E(\{a\})$ となる $E \in \mathcal{E}$ が存在する, とき, 上記の $\mathcal{B}^{\mathcal{E}}$ は *J. Roe* [15] における *"bounded subset"* 全体の集合と一致する. 粗連結でない場合には *Roe* の意味の *bounded subset* 全体は有界型構造にならない*(*有限和で閉じない*)*ので注意.

Definition 5.31. $\mathcal{B}$ を粗空間 $X = (X, \mathcal{E})$ 上の *compatible* な前有界型構造とする. 本稿では X の粗部分集合 α が $\mathcal{B}$-有界であるとは, $\alpha \subset \mathcal{B}$ となることとする *(*これは α のある代表元が $\mathcal{B}$ の元となることと同値*)*. また粗部分集合の対 (α, β) が $\mathcal{B}$-*disjoint* であるとは, "粗部分集合 γ であって $\gamma \prec \alpha$ かつ $\gamma \prec \beta$ となるものは $\mathcal{B}$-有界なものに限る" が成立することとする. また特に $\mathcal{B}^{\mathcal{E}}$-*disjoint* を *asymptotically disjoint* という.

Proposition 5.32. $S_1, S_2 \subset X$ とする. 以下の条件は同値*:*

(*i*) $([S_1], [S_2])$ は $\mathcal{B}$-*disjoint.*
(*ii*) 任意の $E \in \mathcal{E}$ について, $S_1 \cap E(S_2) \in \mathcal{B}$.
(*iii*) 任意の $E \in \mathcal{E}$ について, $E(S_1) \cap S_2 \in \mathcal{B}$.
(*iv*) 任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ について, $E_1(S_1) \cap E_2(S_2) \in \mathcal{B}$.

Example 5.33. X を集合とし, $\mathcal{E}^{\min}$ を X 上の最小粗構造 *(see Example 5.10)* とする. このとき $\mathcal{P}(X)$ 上の同値関係 $\sim$ は自明な同値関係 *(*$S_1 \sim S_2 \iff S_1 = S_2$*)* となり, $\mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(X) \simeq \mathcal{P}(X)$ となる. この $X = (X, \mathcal{E}^{\min})$ 上の *compatible* な前有界型構造として $\mathcal{B}^{\emptyset} = \{\emptyset\}$ を考える. このとき $\mathcal{B}^{\emptyset}$-有界な X の部分集合 *(*= 粗部分集合*)* とは, 空集合のことである. 二つの部分集合 *(*= 粗部分集合*)* S_1, S_2 について, (S_1, S_2) が $\mathcal{B}^{\emptyset}$-*disjoint* であるとは, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, つまり *disjoint* であることを意味する.

Example 5.34. $G = (G, \mathcal{B})$ を有界型群とし, $G^{LR} = (G, \mathcal{E}^{LR,\mathcal{B}})$ を考える. このとき $\mathcal{B}^{\mathcal{E}^{LR,\mathcal{B}}} = \mathcal{B}$ が成り立つ. $S_1, S_2 \subset G$ について, $([S_1], [S_2])$ が $\mathcal{B}$-*disjoint* であることは, 任意の $B \in \mathcal{B}$ について $S_1 \cap E_B^{LR}(S_2) \in \mathcal{B}$ が成立することと同値.

Theorem 5.35. X, Y を粗空間とし, $f : X \xrightarrow{\mathrm{coarse}} Y$ を粗同値とする. 全単射 $f_{\mathrm{im}} : \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(X) \to \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(Y)$ を考える. 粗部分集合 $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{coarse}}(X)$ について, 以下の二条件は同値*:*

(*i*) (α, β) は *asymptotically disjoint in* X.
(*ii*) $(f_{\mathrm{im}}(\alpha), f_{\mathrm{im}}(\beta))$ は *asymptotically disjoint in* Y.

6. 粗符号理論

有界型等質空間上の群作用の固有性をある種の符号理論の枠組みで捉えたい. 本稿では, 粗幾何学を基礎として幾何符号理論を拡張し, その枠組みにおいて有界型等質空間上の群作用の固有性が捉えられることを紹介する.

6.1. 粗 BRP 空間.

Definition 6.1. 粗 BRP 空間および粗 BRP 射を次のように定める.

(*i*) $M = (M, \mathcal{E}_M)$, $I = (I, \mathcal{E}_I)$ をそれぞれ粗空間とし, $R : M \times M \overset{\text{coarse}}{\longrightarrow} I$ を $M \times M = (M \times M, \mathcal{E}_M \otimes \mathcal{E}_M)$ から I への商粗射とする. このとき三つ組 (M, I, R) を**粗 *BRP* 空間**とよぶ.

(*ii*) (M, I, R), (M', I', R') をそれぞれ粗 BRP 空間とする. 粗射 $\varphi : M \overset{\text{coarse}}{\longrightarrow} M'$, $\psi : I \overset{\text{coarse}}{\longrightarrow} I'$ の組 (φ, ψ) が**粗 *BRP* 射**であるとは,
$$R' \circ (\varphi \otimes \varphi) \;=\; \psi \circ R$$
が成立することをいう.

粗 BRP 空間およびそれらの間の粗 BRP 射は圏をなす. また粗 BRP 射 (φ, ψ) が同型であることと, φ, ψ がそれぞれ粗圏において同型であることは同値である.

Example 6.2. (M, I, R) を *Section 2.1* の意味の BRP 空間とする. このとき集合 M, I にそれぞれ最小粗構造 *(see Example 5.10)* を定めておき, R を
$$R : M \times M \overset{\text{PUP}}{\longrightarrow} I,\ S \mapsto R(S)$$
とみなせば (記号の乱用), $(M, I, [R])$ は粗 BRP 空間である.

Example 6.3. *Example 5.23* の設定において, $(M, I, R) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, R)$ は粗 BRP 空間である.

Example 6.4. *Example 5.24* の設定において, $M = G^R$, $I = G^{LR}$ とすると $(M, I, R) = (G^R, G^{LR}, R)$ は粗 BRP 空間である.

6.2. 粗幾何符号. 以下, (M, I, R) を粗 BRP 空間とする.

Definition 6.5. 集合 $\mathcal{S}$ を $(\mathcal{P}^{\text{coarse}}(I), \prec)$ の下方閉部分集合とする. 粗部分集合 C *in* M が $\mathcal{S}$ 粗幾何符号であるとは, $R_{\text{im}}(C \otimes C) \in \mathcal{S}$ を満たすことをいう.

以下, $\mathcal{S}$ 粗幾何符号全体を $\mathcal{P}^{\text{coarse}}(M)_{\mathcal{S}}$ と書く. これは半順序集合 $(\mathcal{P}^{\text{coarse}}(M), \prec)$ における下方閉部分集合である.

Example 6.6. (M, I, R) を *Section 2.1* の意味の BRP 空間とし, $(M, I, [R])$ を *Example 6.2* の意味で粗 BRP 空間とみなす. $\mathcal{S}$ を $\mathcal{P}(I) \simeq \mathcal{P}^{\text{coarse}}(I)$ の下方閉部分集合としたとき, "$\mathcal{S}$ 幾何符号" と, "$\mathcal{S}$ 粗幾何符号" は等価な概念である. すなわち $\mathcal{P}(M) \simeq \mathcal{P}^{\text{coarse}}(M)$ の同一視において, $\mathcal{P}(M)_{\mathcal{S}} = \mathcal{P}^{\text{coarse}}(M)_{\mathcal{S}}$ が成立する.

Example 6.7. *Example 6.3* で定めた粗 BRP 空間 $(M, I, R) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, R)$ を考える. $I = \mathbb{R}^n$ の部分集合として $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = \cdots = x_n = 0\}$ をとり, $\mathcal{P}^{\text{coarse}}(I)$ の下方閉部分集合として
$$\begin{aligned}[A]^{\pitchfork} &:= \{\alpha \in \mathcal{P}^{\text{coarse}}(I) \mid (\alpha, [A]) \textit{ is asymptotically disjoint in } I\} \\ &= \{[S] \mid S \subset \mathbb{R}^n, S \cap E_r(A) \textit{ is bounded for any } r \geq 0\}\end{aligned}$$

を考える．このとき $M = \mathbb{R}^n$ の部分集合 C について，以下の二条件は同値である:

(*i*) $[C]$ は $[A]^{\pitchfork}$ 粗幾何符号である．
(*ii*) 任意の $r \geq 0$ について，

$$\{|y_1 - x_1| \mid x, y \in C, \sum_{i=2}^{n} |y_i - x_i|^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$$

は有界．

$[A]^{\pitchfork}$ 粗幾何符号の具体例としては

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$$

とおいた場合の $[C]$ などが挙げられる．

粗符号理論の枠組みで有界型等質空間上の群作用の固有性を以下のように特徴づけることができる:

Example 6.8. $G = (G, \mathcal{B}_G)$ を有界型群とし，*Example 5.12* で定義した粗 *BRP* 空間 (G^R, G^{LR}, R) を考える．G の閉部分群 L, H を固定し，有界型等質空間 $X = G/H$ 上の L 作用を考える．

$\mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(G^{LR})$ の下方閉部分集合として

$$[H]^{\pitchfork} := \{\, \alpha \in \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(G^{LR}) \mid (\alpha, [H]) \textit{ is asymptotically disjoint in } G^{LR} \}$$

を考える．このとき L 作用が $X = G/H$ 上で固有であることと，$[L]$ が $[H]^{\pitchfork}$ 粗幾何符号であることは同値である (*Theorem 4.6* の言い換え)．

6.3. **粗 BRP 同型と粗幾何符号．** 粗幾何符号は粗 BRP 同型のもとで不変であることをまず定式化する．

Theorem 6.9. 粗 *BRP* 空間 (M, I, R), (M', I', R') を考える．(φ, ψ) を (M, I, R) から (M', I', R') への粗 *BRP* 同型射とする．また $S \subset \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(I)$ を下方閉部分集合とし，

$$S' := \{\, \psi_{\mathrm{im}}(A) \mid A \in S \,\}$$

と定める．

このとき全単射

$$\varphi_{\mathrm{im}} : \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(M) \longrightarrow \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(M')$$

は

$$\mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(M)_S \longrightarrow \mathcal{P}^{\mathrm{coarse}}(M')_{S'}$$

の間の全単射を誘導する．

この定理は，粗幾何符号という概念が粗 BRP 同型に関して自然であることを示している．

Example 6.10 (等質空間の場合)**.** *Example 6.8* で見たように，有界型群 G とその閉部分群 H, L に対し，L の G/H への作用の固有性は，粗 *BRP* 空間 (G^R, G^{LR}, R) において $[L]$ がある下方閉集合 $[H]^{\pitchfork}$ に属することと同値であった．

いまさらに G を線型簡約 *Lie* 群とし，K を極大コンパクト部分群とする．このときリーマン対称空間 G/K, 両側剰余類集合 $K\backslash G/K \simeq W\backslash\mathfrak{a}$ を距離空間 *(see Section 3.3)* とみなしたとき，

$$\varphi : G^R \longrightarrow G/K,\ g \mapsto gK \qquad \mu : G^{LR} \longrightarrow K\backslash G/K \simeq W\backslash\mathfrak{a},\ g \mapsto KgK$$

は粗同値となることが示せる *(μ が controlled* になることは非自明*)*. また (φ, μ) は

$$(G^R, G^{LR}, R) \longrightarrow (G/K, K\backslash G/K, R)$$

の粗 *BRP* 同型射を与える．したがって *Theorem 6.9* により，固有作用の判定条件はカルタン射影像における対応する粗幾何符号条件へとそのまま移送される．すなわち，小林–*Benoist* の固有性判定定理 *(Theorem 3.3)* は，カルタン射影像における粗幾何符号条件として理解できる．

Concluding Remarks: 今後は以下の課題に取り組みたい：

- **課題 1: 粗部分集合の “大きさ” について:** 幾何学的符号理論においては, “符号の大きさ” は “有限部分集合の濃度” を用いた指標で考えることが多い．粗符号理論においては, 粗部分集合の “濃度” は自然には定義されないため, 符号の大きさをどのように定量化すべきかということは重要な問題であると思われる.
- **課題 2: 粗符号理論における Delsarte 理論の整備:** 幾何符号理論において, 符号の濃度の上限を与える道具として “Delsarte 理論” が知られている．これは舞台となる空間上の調和解析を用いて符号の濃度についての線型計画問題を探るというものである（アソシエーションスキームや球面に関しては例えば [2, 17] を参照されたい．一般論については論文を準備中である)．粗符号理論においても, ある種の符号の大きさの上限を与える理論としての Delsarte 理論についても整備を進めたい.
- **課題 3: 固有な群作用の商空間の “大きさ” に関して:** Lie 群の等質空間上の不連続群については, その商多様体がコンパクトか否かという問題は重要な問題と考えられており, またポアンカレ双対を用いてそのような問題を群コホモロジーの言葉で言い換える理論も知られている (小林俊行 [10]). 局所コンパクト等質空間が可微分多様体の構造を持たない場合にもコンパクト台を持つコホモロジーを用いて同様の理論が展開できるのかということは考えてみたい. また有界型等質空間の固有な群作用について, その商空間の大きさを何らかのコホモロジーの言葉で記述できないかということも考えたい.
- **課題 4: 粗符号理論の応用例:** 本稿では粗符号理論が等質空間上の固有な群作用（特に不連続群論）と関係していることを紹介した．他の応用，特に「誤り訂正」的な意味での応用が存在するかどうか検討したい.

References

1. Eiichi Bannai and Etsuko Bannai, *A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres*, European Journal of Combinatorics **30** (2009), no. 6, 1392–1425.
2. Eiichi Bannai, Etsuko Bannai, Tatsuro Ito, and Rie Tanaka, *Algebraic combinatorics*, vol. 5, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2021.
3. Yves Benoist, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math. (2) **144** (1996), no. 2, 315–347. MR 1418901
4. Peter Boyvalenkov, Stefan Dodunekov, and Oleg Musin, *A survey on the kissing numbers*, Serdica Math. J. **38** (2012), no. 4, 507–522. MR 3060792
5. Henry Cohn, *A conceptual breakthrough in sphere packing*, Notices Amer. Math. Soc. **64** (2017), no. 2, 102–115. MR 3587715
6. ———, *Packing, coding, and ground states*, Mathematics and materials, IAS/Park City Math. Ser., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, pp. 45–102. MR 3700014
7. Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko, and Maryna Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 24*, Ann. of Math. (2) **185** (2017), no. 3, 1017–1033. MR 3664817
8. Claudio Gorodski, *Topics in polar actions*, arXiv preprint arXiv:2208.03577 (2022).
9. Gary Greaves, Jacobus H. Koolen, Akihiro Munemasa, and Ferenc Szöllősi, *Equiangular lines in euclidean spaces*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **138** (2016), 208–235.
10. Toshiyuki Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), no. 2, 249–263. MR 1016093
11. ———, *Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type*, Representation theory of Lie groups and Lie algebras (Fuji-Kawaguchiko, 1990), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992, pp. 59–75. MR 1190750
12. ———, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory **6** (1996), no. 2, 147–163. MR 1424629
13. Florence Jessie MacWilliams and Neil James Alexander Sloane, *The theory of error-correcting codes*, vol. 16, Elsevier, 1977.
14. János Pach and Pankaj K. Agarwal, *Combinatorial geometry*, Wiley, New York, 1995.
15. John Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR 2007488
16. Maryna S. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8*, Ann. of Math. (2) **185** (2017), no. 3, 991–1015. MR 3664816
17. 坂内英一, 坂内悦子, and 伊藤達郎, **代数的組合せ論入門** *(***共立叢書現代数学の潮流***)*, 共立出版, 2016.
18. 小林 俊行 and 大島 利雄, *Lie* **群と表現論**, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店, 東京, 2005 (japanese).

(T. Okuda) Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University, 1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima City, Hiroshima, 739-8526, Japan.

Email address: `okudatak@hiroshima-u.ac.jp`