

Finiteness property of the n -adic Lodha–Moore group and its applications

鹿児島大学 学術研究院理工学域理学系 児玉 悠弥

Yuya Kodama

Graduate School of Science and Engineering,

Kagoshima University

概要

群の「finiteness property」とは、有限生成性や有限表示性を一般化した性質である。本稿では、[6]で導入された群が「finiteness property」をもつことと、その事実を用いて得られた結果を説明する。本稿の内容は、高野暁弘氏（大阪大学）との共同研究 [7] に基づく。また、本稿は京都大学数理解析研究所国際共同利用・共同研究拠点事業の助成を受けて作成された。

1 導入

離散群が従順であるとは、その群の冪集合上に左不変な有限加法的確率測度が存在することをいう。従順性が部分群に関して閉じていること、および自由群 F_2 が従順群でないことから、群が自由群を部分群として含む場合は非従順群であることが従う。Banach–Tarski のパラドックスと呼ばれる直観に反する定理も、3次元の回転群が自由群を含む非従順群であるという事実の帰結である。その逆、つまり自由群を含まない非従順群の存在問題は von Neumann–Day の問題と呼ばれる。例えば Tarski Monster と呼ばれる群がその性質をもつ初めての群として知られている。上記の存在問題自体はすでに解決されているが、そのような群はしばしば興味深い性質をもつことが多いので、現在も活発に研究されている。

Thompson 群 F は、 T や V と呼ばれる群とともに、1965年に Richard Thompson により導入された。当初は数理論理学の研究の観点から調べられていたが、後にホモトピー論の観点から再発見されるなど、様々な分野との関連が知られている。上の問題に関連して、Geoghegan は次の4つの性質がすべて成り立つと予想した。

- (1) F は type F_∞ をもつ。
- (2) F は（非可換な）自由群を含まない。
- (3) F は非従順群である。
- (4) F の無限遠でのホモトピー群は自明である。

[1, 3] により (3) を除いて予想は解決されたが, 非従順性は依然として大きな未解決問題である.

2016年, Lodha と Moore は, 「自由群を含まない非従順群」の新たな例を, F に生成元をひとつ付加して得られる群として構成した [9]. その後の研究 [8, 10] により, この群が上の4つの性質をもつ初めての例であることが示された. これらの性質をもつ群が無数に存在することを主張するのが, [7] における主定理のひとつである.

2 Finiteness property of groups and trivial homotopy groups at infinity

本節では, 前節で触れた「finiteness property」(type F_∞) の定義と, 群の無限遠におけるホモトピー群が自明であることの定義を述べる.

Definition 2.1 m を 1 以上の自然数とする. 群 G が **type F_m をもつ** とは, 以下の条件を満たす CW 複体 X_m が存在することをいう:

- (1) $\pi_1(X_m)$ は G と同型.
- (2) 2 以上の自然数 k に対し, $\pi_k(X_m) = 0$.
- (3) m 骨格が有限個の胞体からなる.

群が **type F_∞ をもつ** とは, 全ての $m \geq 1$ に対して群が type F_m をもつことをいう.

群が有限生成群であることと type F_1 をもつことは同値であり, 有限表示群であることと type F_2 をもつことは同値である. 以上より, 「群が type F_∞ をもつこと」はその群が強い有限性を有することを意味し, これを finiteness property と呼ぶ.

Definition 2.2 群 G が type F_m をもつと仮定する. X_m を条件を満たす CW 複体とし, その普遍被覆を \widetilde{X}_m と書く. 群が **$(m-1)$ -connected at infinity** であるとは, 全ての $k < m$ に対し, 以下の条件が成り立つことをいう: 任意のコンパクト部分集合 $C \subset \widetilde{X}_m$ に対し, あるコンパクト部分集合 $C \subset D \subset \widetilde{X}_m$ が存在し, 包含写像 $\widetilde{X}_m \setminus D \hookrightarrow \widetilde{X}_m \setminus C$ が誘導する写像 $\pi_k(\widetilde{X}_m \setminus D) \rightarrow \pi_k(\widetilde{X}_m \setminus C)$ が零写像である. 群 G が全ての $m \geq 1$ に対して $(m-1)$ -connected at infinity であるとき, G の無限遠でのホモトピー群は自明であるという.

3 Thompson's group F , the Lodha–Moore group, and their n -adic generalizations

$\mathfrak{C} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots$ をカントール集合とする. 簡単のため, \mathfrak{C} の各元を $000\dots, 0101\dots$ のような文字列で表す. 本節では, Thompson 群 F , Lodha–Moore 群 G_0 , そしてそれらの一般化である $F(n)$ と $G_0(n)$ の定義を述べる. これらの群の詳細については, 例えば [4–7] などを参照されたい.

Definition 3.1 \mathfrak{C} 上の同相写像 x_0, x_1 を, 以下のように定める :

$$x_0: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}; \begin{cases} 00\eta \mapsto 0\eta \\ 01\eta \mapsto 10\eta \\ 1\eta \mapsto 11\eta \end{cases}$$

$$x_1: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}; \begin{cases} 0\eta \mapsto 0\eta \\ 100\eta \mapsto 10\eta \\ 101\eta \mapsto 110\eta \\ 11\eta \mapsto 111\eta \end{cases}$$

これらの写像で生成される $\text{Homeo}(\mathfrak{C})$ の部分群を, **Thompson 群** F という.

次に, Lodha–Moore 群の定義に必要な写像 y を導入する.

Definition 3.2 写像 y とその逆写像 y^{-1} を, 以下のように再帰的に定める :

$$\begin{array}{ll} y: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C} & y^{-1}: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C} \\ y(00\zeta) = 0y(\zeta) & y^{-1}(0\zeta) = 00y^{-1}(\zeta) \\ y(01\zeta) = 10y^{-1}(\zeta) & y^{-1}(10\zeta) = 01y(\zeta) \\ y(1\zeta) = 11y(\zeta) & y^{-1}(11\zeta) = 1y^{-1}(\zeta) \end{array}$$

この写像を用いて, y_{10} を

$$y_{10}(\xi) = \begin{cases} 10y(\eta) & \xi = 10\eta \\ \xi & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める. F と y_{10} で生成される $\text{Homeo}(\mathfrak{C})$ の部分群を, **Lodha–Moore 群** G_0 という. F の各元は \mathfrak{C} の元のうち有限文字列のみを書き換えるのに対し, G_0 の元は無有限文字列の書き換えも許すという違いがある. 例えば,

$$\begin{aligned} y_{10}(10011001100110\dots) &= 10y(011001100110\dots) \\ &= 1010y^{-1}(1001100110\dots) \\ &= 101001y(01100110\dots) \\ &= 10100110y^{-1}(100110\dots) \\ &= 1010011001y(0110\dots) \end{aligned}$$

という計算から, 10 の後に続く 0110 が 1001 に繰り返し書き換えられる様子が確認できる.

以下では, これらを一般化した群の定義を述べる. n を 2 以上の自然数とし, $\mathfrak{C}_n = \{0, 1, \dots, n-1\} \times \{0, 1, \dots, n-1\} \times \dots$ を n 進コントロール集合とする. \mathfrak{C} の場合と同様に, 各元は $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 上の無有限文字列として表す. 以下の写像はすべて n に依存して定まるが, 簡単のため $n=2$ の場合と一部同じ記号を用いる.

Definition 3.3 \mathfrak{C}_n 上の同相写像 $x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$ を以下のように定める：

$$\begin{aligned}
 x_0: \mathfrak{C}_n &\rightarrow \mathfrak{C}_n; \begin{cases} 0k\eta \mapsto k\eta & (k < n-1) \\ 0(n-1)\eta \mapsto (n-1)0\eta \\ k\eta \mapsto (n-1)k\eta & (0 < k < n) \end{cases} \\
 x_1: \mathfrak{C}_n &\rightarrow \mathfrak{C}_n; \begin{cases} 0\eta \mapsto 0\eta \\ 1k\eta \mapsto k\eta & (k < n-2) \\ 1(n-2)\eta \mapsto (n-1)0\eta \\ 1(n-1)\eta \mapsto (n-1)1\eta \\ k\eta \mapsto (n-1)k\eta & (1 < k < n) \end{cases} \\
 &\vdots \\
 x_{n-2}: \mathfrak{C}_n &\rightarrow \mathfrak{C}_n; \begin{cases} k\eta \mapsto k\eta & (k < n-2) \\ (n-2)0\eta \mapsto (n-2)\eta \\ (n-2)k\eta \mapsto (n-1)(k-1)\eta & (0 < k \leq n-1) \\ (n-1)\eta \mapsto (n-1)(n-1)\eta \end{cases} \\
 x_{n-1}: \mathfrak{C}_n &\rightarrow \mathfrak{C}_n; \begin{cases} k\eta \mapsto k\eta & (k < n-1) \\ (n-1)\eta \mapsto (n-1)x_0(\eta) \end{cases}
 \end{aligned}$$

これらの写像で生成される $\text{Homeo}(\mathfrak{C}_n)$ の部分群を, **Brown–Thompson group** $F(n)$ という.

定義から明らかに, $F(2) = F$ である.

Definition 3.4 写像 y とその逆写像 y^{-1} を, 以下のように再帰的に定める：

$$\begin{array}{ll}
 y: \mathfrak{C}_n \rightarrow \mathfrak{C}_n & y^{-1}: \mathfrak{C}_n \rightarrow \mathfrak{C}_n \\
 y(00\zeta) = 0y(\zeta) & y^{-1}(0\zeta) = 00y^{-1}(\zeta) \\
 y(0k\zeta) = k\zeta & y^{-1}(k\zeta) = 0k\zeta \\
 y(0(n-1)\zeta) = (n-1)0y^{-1}(\zeta) & y^{-1}((n-1)0\zeta) = 0(n-1)y(\zeta) \\
 y(k\zeta) = (n-1)k\zeta & y^{-1}((n-1)k\zeta) = k\zeta \\
 y((n-1)\zeta) = (n-1)(n-1)y(\zeta) & y^{-1}((n-1)(n-1)\zeta) = (n-1)y^{-1}(\zeta)
 \end{array}$$

ここで, $k = 1, \dots, n-2$ である.

この写像を用いて, 写像 $y_{(n-1)0}$ を

$$y_{(n-1)0}(\xi) = \begin{cases} (n-1)0y(\eta) & \xi = (n-1)0\eta \\ \xi & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める. $F(n)$ と $y_{(n-1)0}$ で生成される $\text{Homeo}(\mathfrak{C}_n)$ の部分群を, **n -adic Lodha–Moore 群** $G_0(n)$ という. 定義から明らかに, $G_0(2) = G_0$ である.

Theorem 3.5 ([6]) 全ての $n \geq 2$ に対し, 以下が成り立つ.

- (1) $G_0(n)$ は非従順である.
- (2) $G_0(n)$ は F_2 を含まない.

y の定義において 0 と $n-1$ の部分のみに注目すると, $n=2$ の場合と同じであることが観察できる. この事実から, $i(x_0) = x_0, i(x_1) = x_{n-1}, i(y_{10}) = y_{(n-1)0}$ で定められる写像 $i: G_0 \rightarrow G_0(n)$ が単射準同型であることがわかるので, 直ちに (1) が従う. (2) は, $G_0(n)$ が F_2 を含むならば G_0 も F_2 を含むということを示すことにより得られる. これらの議論の詳細は, [6, Section 4.1, Section 4.2] を参照されたい.

Remark 3.6 ([6]) $G_0(n)$ のアーベル化は \mathbb{Z}^{n+1} と同型である. したがって, 相異なる自然数 $n, m \geq 2$ に対し, $G_0(n)$ と $G_0(m)$ は非同型である.

4 主定理

以下に主な結果を述べる. 証明の詳細は [7] を参照されたい. 以下, $n \geq 2$ を固定する.

Theorem 4.1 $G_0(n)$ は *type* F_∞ をもつ.

Brown による十分条件 [2, Proposition 1.1] により, 以下を示せば十分である.

Theorem 4.2 ([7, Theorem A.2]) $G_0(n)$ が作用する連結な CW 複体 X で, 以下の条件を満たすものが存在する:

- (1) X は可縮.
- (2) 各次元において, 商空間 X/G は高々有限の胞体からなる.
- (3) 各胞体の固定部分群は *type* F_∞ をもつ.

CW 複体の頂点集合は, $G_0(n)$ の $F(n)$ による剰余類からなる. X の高次の胞体の説明はここでは省略するが, 頂点集合上に自然に定まる群作用を用いて X への作用を構成する. 2つめの条件は, 群作用を直接解析することでわかる. 3つめの条件は, $F(n)$ (とそのさらなる一般化) が *type* F_∞ をもつこと [2] と, *type* F_∞ をもつ群の直積はまた *type* F_∞ をもつという事実を使う. 群作用を詳細に解析すると, 各固定部分群が $F(n)$ とその一般化たちとの直積と同型であることがわかる. 最も難しいのは可縮性の証明であるが, これは非正曲率 (CAT(0)) 幾何を用いて示す.

上の定理と, $G_0(n)$ が自身と似た群による HNN 拡大で表せるという事実 [7, Section 3.2] を組み合わせると, 多くの帰結が得られる.

Theorem 4.3 ([7, Theorem 3.7]) 全ての $i \geq 0$ に対して,

$$H^i(G_0(n); \mathbb{Z}[G_0(n)]) = 0$$

が成り立つ.

Theorem 4.4 ([7, Theorem 5.4]) $G_0(n)$ の無限遠でのホモトピー群は自明である.

Theorem 4.5 ([7, Theorem 1.2]) M を連結で向き付けられた閉 4 次元多様体で, さらにシンプレクティック多様体であり $c_1(TM) = 0$ を満たすものとする. このとき, M の基本群は必ず $G_0(n)$ と非同型である.

上述の仮定をすべて満たす M の基本群については, そのアーベル化のランクが 1 以上である場合, 多くの代数的制約が課されることが知られている. すでに述べたように $G_0(n)$ のアーベル化は \mathbb{Z}^{n+1} であるから, 最後の定理は背理法により示される.

参考文献

- [1] M. G. Brin and C. C. Squier, *Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line*, Invent. Math. **79** (1985), no. 3, 485–498.
- [2] K. S. Brown, *Finiteness properties of groups*, J. Pure Appl. Algebra **44** (1987), no. 1-3, 45–75.
- [3] K. S. Brown and R. Geoghegan, *An infinite-dimensional torsion-free FP_∞ group*, Invent. Math. **77** (1984), no. 2, 367–381.
- [4] J. Burillo, S. Cleary, and M. I. Stein, *Metrics and embeddings of generalizations of Thompson’s group F* , Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 4, 1677–1689.
- [5] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson’s groups*, Enseign. Math. (2) **42** (1996), no. 3-4, 215–256.
- [6] Y. Kodama, *An n -adic generalization of the Lodha–Moore group*, Communications in Algebra **51** (2023), no. 12, 4997–5018.
- [7] Y. Kodama and A. Takano, *The Lodha–Moore groups and their n -adic generalizations are not SCY*, arXiv preprint arXiv:2501.07522 (2025).
- [8] Y. Lodha, *A nonamenable type F_∞ group of piecewise projective homeomorphisms*, J. Topol. **13** (2020), no. 4, 1767–1838.
- [9] Y. Lodha and J. T. Moore, *A nonamenable finitely presented group of piecewise projective homeomorphisms*, Groups Geom. Dyn. **10** (2016), no. 1, 177–200.
- [10] M. C. B. Zaremsky, *HNN decompositions of the Lodha–Moore groups, and topological applications*, J. Topol. Anal. **8** (2016), no. 4, 627–653.