フィルター付き坪井距離空間の幾何学

北海道大学　川﨑 盛通 *
Morimichi Kawasaki
Hokkaido University

[Tsu09] において、坪井は単純群に対する距離空間を構成した。本稿においてはこの距離の一般化について説明するが、本稿のタイトルとなっている「フィルター付き坪井距離空間」については現在論文準備中であるために定義のみ簡潔に説明し、前段の歴史について簡潔に説明したい。

1　フィルター付き坪井距離空間の定義

G を有限正規生成群（finitely normally generated group）とする。各 $g \in G$ および $K \subset G$ に対し、数 $q_K(g)$ を、その積が g に等しくなるような $K \cup K^{-1}$ の元の共役の最小個数として定義する。ここで、単位元 1_G に対しては $q_K(1_G) = 0$ と定義し、g が $K \cup K^{-1}$ の元の共役の積として表せない場合は $q_K(g) = +\infty$ と定義する。$g \in G \setminus N$ に対し、$q_g = q_{\{g\}} \colon G \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とおく。

G の元 f, g は、f が g または g^{-1} と共役であるとき、互いに**対称共役**（symmetrized conjugate）であるといい、$f \sim g$ と表す。対称共役が同値関係であることは容易に確認できる。$g \in G$ によって代表される対称共役類を $[g]$ で表す。

$$\mathcal{M}(G) = \{S \subset (G/\sim) \mid S \text{ は } G \text{ を正規生成する有限集合 }\}$$

$\mathcal{M}(G)$ 上の関数 $d^{as}, d \colon \mathcal{M}(G) \times \mathcal{M}(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を次のように定義する。

$$d^{as}(X, Y) = \log \max_{y \in Y}\{q_X(y)\}.$$

$$d(X, Y) = \max\{d^{as}(x, Y), d^{as}(Y, X)\}.$$

$Y \in \mathcal{M}(G)$、特に Y は有限集合なので $\max_{y \in Y}\{q_X(y)\}$ が有限の値で定まることに注意する。

* 本研究の本稿に書かれている部分は科研費 (課題番号 JP21K13790) の助成を受けたものである.

この d は距離となる。

d が有界であることと、G がその極大正規部分群に関して一様単純（uniformly simple）であることは同値であることに注意する。

また、正の整数 k に対して $\mathcal{M}(G)$ の部分集合 $\mathcal{M}^k(G)$ を

$$\mathcal{M}^k(G) = \{S \subset (G/\sim) \mid S \text{ は } G \text{ を正規生成する有限集合で、元の個数は } k \text{ 個以下 } \}$$

と定義する。このとき、距離 d を $\mathcal{M}^k(G)$ に制限した距離空間 $(\mathcal{M}^k(G), d)$ のことを**フィルター付き坪井距離空間**といい、距離空間の族 $\{(\mathcal{M}^k(G), d)\}_{k=1,2,\dots}$ のことを**フィルター付き坪井距離空間**という。

ここで歴史的な流れを説明すると、坪井 [Tsu09] が最初に上記の距離空間を考えたのは群 G が単純群で $k=1$ の時である。このとき、$\mathcal{M}^1(G) = (G \setminus \{e\}) / \sim$ (e は G の単位元) となる。この坪井距離を「相対的単純群」というクラスの群について一般化したのが [KKK$^+$24] であるが、ここでも $k=1$ の場合のみを考えている。

2 先行研究

先述の通り、一般の場合については論文執筆が完了していないので、ここからは特殊な場合について先行研究を説明する。以下、考えるのは $\mathcal{M}^1(G)$ についてである。

最初に紹介するのは坪井の結果である。坪井が研究した群は多様体の微分同相群であるが、本稿では説明の簡略化のために閉多様体の場合を紹介し、C^∞ 級微分同相写像の成す群のみを微分同相群として考える。また、微分同相群には C^∞ 位相という自然な位相が入るが、それについての単位元成分を考える。閉多様体の微分同相群の単位元成分が単純群であることは古典的に知られている ([Ban97] など参照) が、坪井 [Tsu09], [Tsu12] は以下のより強い主張を示した。

定理 2.1 ([Tsu09], [Tsu12])**.** *M を次元が 2,4 でない閉多様体であるとする。このとき、微分同相群の単位元成分 $\mathrm{Diff}_0(M)$ について、$\left(\mathcal{M}^1\left(\mathrm{Diff}_0(M)\right), d\right)$ は有界な距離空間。*

Remark 2.2. 次元についての仮定であるが、2 次元の際には上記の結果は不成立であることが知られている [BHW22]。この際に用いられる手法がなかなかユニークである。[BHW22] では「イソトピーで割らない curve graph」である fine curve graph という「双曲空間」に群 $\mathrm{Diff}_0(M)$ が作用している状況を考えて、そこから擬準同型を構成した。このことから特に坪井距離の非有界性も従う。

次に紹介するのは児玉の結果である。これは無限交代群 A_∞(有限交代群 A_n の帰納

極限 $\bigcup_n A_n$ として定義する) についての以下の結果である。

定理 2.3 ([Kod11])**.** $\left(\mathcal{M}^1\left(A_\infty\right), d\right)$ は *(*標準的な距離構造の入った*)* 半直線と擬等長同型となる。

ここでどうして半直線が登場するかについて「気持ち」を説明する。坪井距離空間は群の部分集合を対称共役という同値関係で割ったものであったが、これは群の元とその逆元を同一視するような同値関係であった。したがって、そのような距離空間を考えると自然と半直線という「直線を折り曲げた空間」が登場する。

上記の児玉の結果であるが、我々の研究 [KKK+24] では無限対称群 S_∞(無限交代群と同じく、有限対称群 S_n の帰納極限 $\bigcup_n S_n$ として定義する) でも同様の結果を示した。無限対称群 S_∞ は単純群ではないが、$\mathcal{M}^1(S_\infty)$ は以下のように表せることが比較的容易に分かる。

$$\mathcal{M}^1(S_\infty) = (S_\infty \setminus A_\infty) / \sim$$

このとき、$\mathcal{M}^1(S_\infty)$ は以下のようになる。

定理 2.4 ([KKK+24])**.** $\left(\mathcal{M}^1\left(S_\infty\right), d\right)$ は *(*標準的な距離構造の入った*)* 半直線と擬等長同型となる。

[Tsu17], [Ish18], [KKK+24] においてはハミルトン微分同相群 (の交換子部分群や普遍被覆) についても坪井距離を考察しているが、設定がある程度複雑になるために本稿では触れない。各自原典を参照していただきたい。

現在準備中の論文ではフィルター付き坪井距離空間を定義した上で、[KLM] で出てきた群の強有界性や一様有界性との関係を書いた上で k が 2 以上のときの $\mathcal{M}^1(G)$ についても考察する予定である。

謝辞

研究集会「一般位相幾何学の進捗とその関連分野の動向」の開催に対して世話人の方々一同と京都大学数理解析研究所に感謝申し上げます。

参考文献

[Ban97] Augustin Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, vol. 400, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[BHW22] Jonathan Bowden, Sebastian Wolfgang Hensel, and Richard Webb, *Quasi-morphisms on surface diffeomorphism groups*, J. Amer. Math. Soc. **35** (2022), no. 1, 211–231.

[Ish18] Tomohiko Ishida, *Quasi-isometry type of the metric space derived from the kernel of the Calabi homomorphism*, J. Symplectic Geom. **16** (2018), no. 4, 1041–1050.

[KKK$^+$24] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Hiroki Kodama, Yoshifumi Matsuda, Takahiro Matsushita, and Ryuma Orita, *Relative simplicity of the universal coverings of transformation groups and tsuboi's metric*, preprint, arXiv:2412.00839 (2024).

[KLM] J. Kedra, A. Libman, and B. Martin, *Strong and uniform boundedness of groups*, J. Topol. Anal., Online Ready.

[Kod11] Hiroki Kodama, *On non-uniformly simple groups*, preprint, arXiv:1107.5125 (2011).

[Tsu09] Takashi Tsuboi, *On the uniform simplicity of diffeomorphism groups*, Differential geometry, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009, pp. 43–55.

[Tsu12] ______, *On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 1, 141–185.

[Tsu17] ______, *Several problems on groups of diffeomorphisms*, Geometry, dynamics, and foliations 2013, Adv. Stud. Pure Math., vol. 72, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017, pp. 239–248.