Another proof of the seven-point theorem on the Poincaré hyperbolic disk

防衛大学校 数学教育室　　藤村 雅代 [*1]
Masayo Fujimura
Department of Mathematics, National Defense Academy of Japan

Abstract

The five-point theorem on the Poincaré hyperbolic disk was conjectured by G. Wang in 2013 and proved in 2021. In this report, we give an another proof of this theorem using a method of symbolic computation and discuss an approach based on elementary geometry.

1 準備 –双曲円板の 5 点定理–

双曲円板の 5 点定理について扱う。双曲円板の 5 点定理は、2013 年に G. Wang [3] によって予想が与えられ、2021 年に解決した問題である [4]。ここでは、その別証明を与え、初等幾何的なアプローチについて考える。

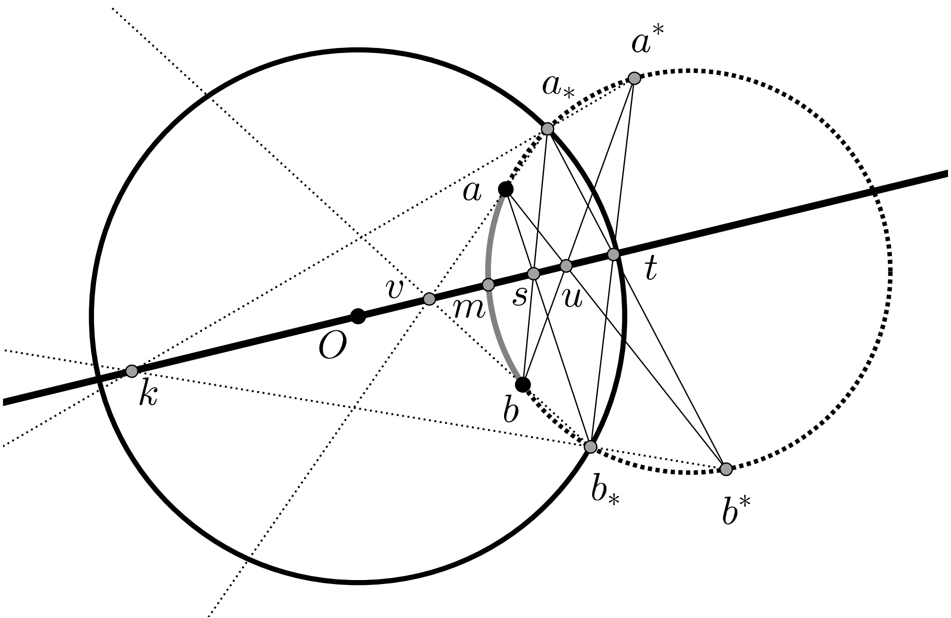

図 1: 5 点定理: 5 点 s, u, t, k, v は原点と a, b の双曲中点 m を通る直線上にある。

[*1] 〒 239-8686 横須賀市走水　 E-mail: masayo@nda.ac.jp

$\mathbb{D}$ を複素平面上の単位円板とし、$a, b \in \mathbb{D}$ をとる。また、$a^*,\ b^*$ をそれぞれ単位円に関する $a,\ b$ の鏡像とする。すなわち、次が成り立つ。

$$a^* = \frac{1}{\overline{a}}, \qquad b^* = \frac{1}{\overline{b}}.$$

2 点 a, b を通る双曲直線は、これら 2 点を通り単位円に直交する円 (C_{ab} とおく) として定まるが、これは、4 点 a, b, a^*, b^* を通る円と一致する。この円 C_{ab} と単位円の交点を a_*, b_* とおく。ただし、a_* は a に近い交点とする。

さらに、次の記号を導入する。$z_1 \neq z_2$ のとき、2 点 z_1 と z_1 を通るユークリッド直線を $L[z_1, z_2]$ と表す。$z_1 \in C_{ab}$ に対して、l_{z_1} は、点 z_1 において C_{ab} に接する接線とする。

また、交点 s, u, t, v, k, p, q を次で定める。

$$\begin{aligned}
&s = L[a, b_*] \cap L[b, a_*], && u = L[a, b^*] \cap L[b, a^*], && t = L[a_*, b^*] \cap L[b_*, a^*],\\
&v = L[a, a_*] \cap L[b, b_*], && k = L[a_*, a^*] \cap L[b_*, b^*], && p = l_{a^*} \cap l_{b^*},\\
&q = l_a \cap l_b, && m\text{: } a, b \ \text{の双曲中点 .}
\end{aligned}$$

これらの円や交点を作図すると、図 1 のようになる。この図をもとに、2013 年 Wang ら ([3]) は、『5 点 k, s, t, u, v は O, m を結ぶ直線上にあるか？』という 5 点予想を与え、2021 年に以下のように解決した。

定理 1 (Wang *et al.* [4])
$a, b \in \mathbb{D}$ とする。

- a, b の双曲中点 m は次で与えられる。
$$m = \frac{a(1-|b|^2) + b(1-|a|^2)}{1 - |a|^2|b|^2 + A[a,b]\sqrt{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}},$$
ただし、$A[a,b]^2 = (1-|a|^2)(1-|b|^2) + |a-b|^2$ (Ahlfors bracket).
- u は次で与えられる。
$$u = \frac{a(1-|b|^2) + b(1-|a|^2)}{1 - |a|^2|b|^2}.$$
- 5 点予想は成立する。

u 以外の点については、以下のように述べている。
$\cdots$, but finding similar formulas for the other points seems to lead to tedious computations.
ここではまず、敢えて u 以外の点の座標を求めることを目標とする。

2 座標による別証明と 7 点定理

Wang の問題をふまえて、次の問題を考える。

問題 1
5 点予想における u 以外の交点を a, b で表せ。

まず、次が必要である。

補題 2
a_* と b_* は次で与えられる。

$$a_* = \frac{b(1-a\overline{b})|a-b| + (a-b)|1-a\overline{b}|}{(1-a\overline{b})|a-b| + \overline{b}(a-b)|1-a\overline{b}|}, \quad b_* = \frac{a(1-\overline{a}b)|b-a| + (b-a)|1-\overline{a}b|}{(1-\overline{a}b)|b-a| + \overline{a}(b-a)|1-\overline{a}b|}. \tag{1}$$

証明 $g_b(z) = \dfrac{z-b}{1-\overline{b}z}$ とおく。g_b は点 b を原点に写す単位円板の正則自己同型写像である。このとき、原点と $g_b(a)$ を結ぶ双曲直線は、この 2 点を結ぶユークリッド直線に一致する。また、 $A_* = \dfrac{g_b(a)}{|g_b(a)|}$ とおくと、A_* は原点から $g_b(a)$ に向って伸ばした直線が単位円周と交わる点であり、$A_* = \dfrac{a-b}{1-\overline{b}a}\dfrac{|1-\overline{b}a|}{|a-b|}$ と書ける。このとき a_* は、$a_* = g_b^{-1}(A_*)$ で与えられるので、(1) の左の等式が得られる。もう一方の b_* も同様に得られる。 ∎

次に 2 直線の交点を考える。2 点 z_1, z_2 を通る直線 $L[z_1, z_2]$ は、次で与えられる。

$$(\overline{z_1}-\overline{z_2})z-(z_1-z_2)\overline{z} = \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}.$$

$L[z_1, z_2]$ と $L[w_1, w_2]$ が並行でなければ、その交点は次で与えられる。

$$\frac{(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2})(w_1-w_2)-(\overline{w_1}w_2-w_1\overline{w_2})(z_1-z_2)}{(\overline{z_1}-\overline{z_2})(w_1-w_2)-(\overline{w_1}-\overline{w_2})(z_1-z_2)}. \tag{2}$$

これらを使って、5 点 k, s, t, u, v を求めることができる。

命題 3 ([2])
$a, b \in \mathbb{D}$ に対して、t は次で得られる。

$$t = \frac{a(1-|b|^2)+b(1-|a|^2)}{(a\overline{b}+\overline{a}b)-2|ab|^2+|a-b||1-\overline{a}b|}.$$

同様に、$s, k, v,$ はそれぞれ次で得られる。

$$\begin{aligned}
s &= \frac{a(1-|b|^2)+b(1-|a|^2)}{2-(a\overline{b}+b\overline{a})-|a-b||1-\overline{a}b|},\\
k &= \big(a(1-|b|^2)+b(1-|a|^2)\big)\frac{|a-b|-|1-\overline{a}b|}{(1-|ab|^2)|a-b|+\big(2|ab|^2-(|a|^2+|b|^2)\big)|1-\overline{a}b|},\\
v &= \big(a(1-|b|^2)+b(1-|a|^2)\big)\frac{|1-\overline{a}b|-|a-b|}{\big(2-(|a|^2+|b|^2)\big)|1-\overline{a}b|-(1-|ab|^2)|a-b|}.
\end{aligned}$$

証明 計算が煩雑になるため、数式処理システム (ここでは、Risa/Asir[1]を使用している) を利用して計算を行う。そのため、絶対値の部分を新たな変数で置き換えを行う。

交点 t を求めるため、$m_{ab} = |a-b|, m_1 = |1-a\overline{b}|$ とおくと、$|a-b| = |b-a|$ かつ $|1-\overline{a}b| = |1-a\overline{b}|$ であることから a_*, b_* は次のように書ける。

$$a_* = \frac{b(1-a\overline{b})m_{ab}+(a-b)m_1}{(1-a\overline{b})m_{ab}+\overline{b}(a-b)m_1}, \qquad b_* = \frac{a(1-\overline{a}b)m_{ab}-(a-b)m_1}{(1-\overline{a}b)m_{ab}-\overline{a}(a-b)m_1}.$$

これらを、交点を求める公式 (2) に代入すると

$$t = \frac{\big(a(1-b\overline{b})+b(1-a\overline{a})\big)m_1}{(1-a\overline{b})(1-\overline{a}b)m_{ab}+(a\overline{b}+\overline{a}b-2ab\overline{a}\overline{b})m_1}$$

となるが、$(1-a\overline{b})(1-\overline{a}b) = m_1^2$ であることから、

$$t = \frac{\big(a(1-b\overline{b})+b(1-a\overline{a})\big)m_1}{m_1^2 m_{ab}+(a\overline{b}+\overline{a}b-2ab\overline{a}\overline{b})m_1} = \frac{a(1-b\overline{b})+b(1-a\overline{a})}{(a\overline{b}+\overline{a}b)-2ab\overline{a}\overline{b}+m_1 m_{ab}}$$

[1] `https://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir-ja.html` からダウンロード可能

と変形できる。

したがって、次を得る。

$$t = \frac{a(1-|b|^2)+b(1-|a|^2)}{(a\overline{b}+\overline{a}b)-2|ab|^2+|a-b||1-\overline{a}b|}.$$

他の点についても、同様にして a, b により座標を表現できる。 ∎

注意 1
以上より、5 点 k, s, t, u, v および m は、

$$\big(a(1-|b|^2)+b(1-|a|^2)\big) \times (\text{ 実数 })$$

の形をしていることがわかる。したがって、これらはすべて原点を通る同一直線上にある。これは、5 点定理の別証明を与える ([2])。

2.1 双曲円板の 7 点定理

さらに、2 点 $p = l_{a^*} \cap l_{b^*}, \quad q = l_a \cap l_b.$ を考える。このとき、

$$p = \big(a(1-|b|^2)+b(1-|a|^2)\big)\frac{1}{a\overline{b}+\overline{a}b-2|ab|^2},$$
$$q = \big(a(1-|b|^2)+b(1-|a|^2)\big)\frac{1}{1-a\overline{b}-\overline{a}b}.$$

が成り立つことが計算からわかる。したがって、これら 2 点も原点と双曲中点 m をむすぶ直線上にあることがわかり、5 点定理は次の 7 点定理として成立する。

系 4 (双曲円板の 7 点定理)
7 点 k, s, t, u, v, p, q は O, m を結ぶ直線上にある。

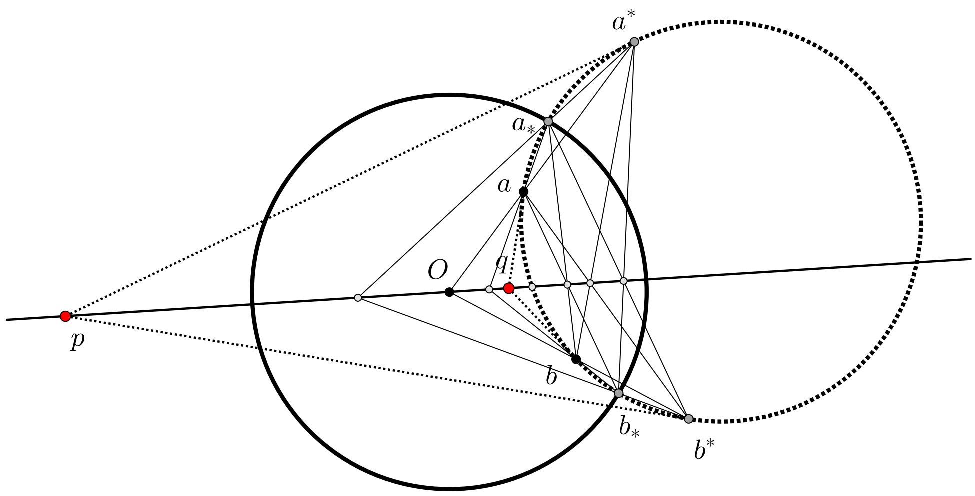

図 2: 7 点定理: 5 点定理に 2 点 p, q が加わる。

3　初等幾何によるアプローチ

次に、双曲円板の 7 点定理に対して、初等幾何の手法を使って別証明を与えることを考える。ここでは、前の節とは方針が異なり点の座標を求めない。カギとなるのは、次の古典的な定理である。

定理 5 (デザルグの定理 (1639))
2 つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ について、3 直線 $L[A, A']$, $L[B, B']$, $L[C, C']$ が 1 点で交わるとする。このとき、3 点 $L[A, B]$ と $L[A', B']$ の交点 X, $L[B, C]$ と $L[B', C']$ の交点 Y, $L[C, A]$ と $L[C'A']$ の交点 Z は同一直線上にある。

注意 2
デザルグの定理は *Self-dual* なので逆も成立する。

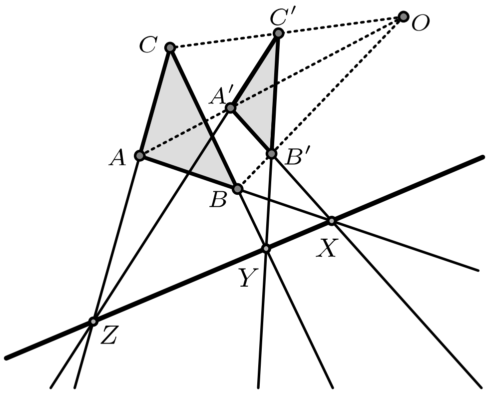

図 3: デザルグの定理

また、後で必要になる次の性質を示す。

補題 6
l_a と l_{a^*} の交点を a_1、l_b と l_{b^*} の交点を b_1 とおく。このとき、3 点 u, a_1, b_1 は直線 $L[a_*, b_*]$ 上にある。

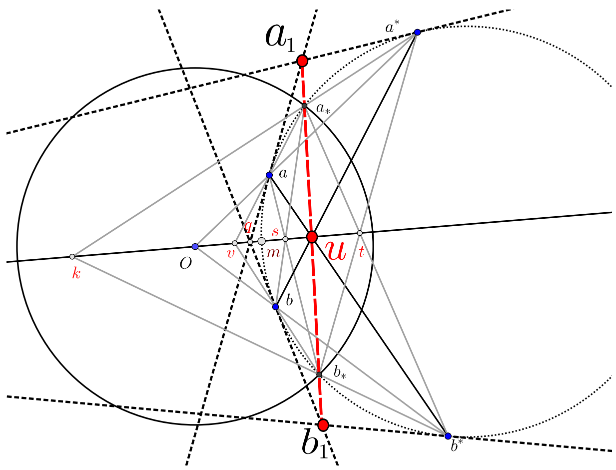

図 4: 補題 6: a_1, b_1, u は a_* と b_* を通る直線上の点である。

証明 まず、直線 $L[a_*, b_*]$ の方程式は以下で与えられる。

$$L[a_*, b_*] \ : \ (\overline{a_*} - \overline{b_*})z - (a_* - b_*)\overline{z} = \overline{a_*}b_* - a_*\overline{b_*}.$$

これを 補題 2 を用いて a, b で書き直すと次の方程式が得られる。

$$(\overline{b}|a|^2 - \overline{a}|b|^2 - \overline{a})z - (b|a|^2 - a|b|^2 + b)\overline{z} - 2a\overline{b} + 2\overline{a}b = 0. \tag{3}$$

左辺の z に u

$$u = \frac{a(1 - |b|^2) + b(1 - |a|^2)}{1 - |ab|^2}$$

を代入すると 0 になるので、u が この直線上の点であることがわかる。

次に、a_1 が $L[a_*, b_*]$ 上にあることを示す。a, b を通る双曲直線 $C_{a,b}$ は、3 点 a, b, a^* を通る円なので、複比を利用して方程式が得られる。

$$C_{a,b} : (a - a^*)(b - z)(\overline{a} - \overline{z})(\overline{b} - \overline{a^*}) = (\overline{a} - \overline{a^*})(\overline{b} - \overline{z})(a - z)(b - a^*).$$

これを変形して、

$$z\overline{z} - \frac{\overline{a}\overline{b}(a - b) - (\overline{a} - \overline{b})}{a\overline{b} - \overline{a}b}z - \frac{ab(\overline{a} - \overline{b}) - (a - b)}{\overline{a}b - a\overline{b}}\overline{z} + 1 = 0.$$

したがって、 $C_{a,b}$ の中心 c は

$$c = \frac{a(1 + |b|^2) - b(1 + |a|^2)}{a\overline{b} - \overline{a}b}. \tag{4}$$

であることがわかる。

直線 l_a は円 C_{ab} の半径である線分 $[c, a]$ に直交して、a を通ることから、方程式は次で得られる。

$$l_a \ : \ (\overline{a} - \overline{c})(z - a) + (a - c)(\overline{z} - \overline{a}) = 0.$$

(4) を代入して、

$$l_a \ : \ (1 - \overline{a}b)(\overline{a} - \overline{b})z - (1 - a\overline{b})(a - b)\overline{z} + (1 - |a|^2)(a\overline{b} - \overline{a}b) = 0. \tag{5}$$

同様に、直線 l_{a^*} の方程式は次で得られる。

$$l_{a^*} \ : \ (\overline{a^*} - \overline{c})(z - a^*) + (a^* - c)(\overline{z} - \overline{a^*}) = 0.$$

$a^* = \dfrac{1}{\overline{a}}$ であることと (4) から、上の方程式は次のように書ける。

$$l_{a^*} \ : \ \overline{a}^2(a - b)(1 - a\overline{b})z - a^2(\overline{a} - \overline{b})(1 - \overline{a}b)\overline{z} - (1 - |a|^2)(a\overline{b} - \overline{a}b) = 0. \tag{6}$$

(5) と (6) から l_a と l_{a^*} の交点 a_1 は次で与えられる。

$$a_1 = -\frac{a^2(\overline{a} - \overline{b})(1 - \overline{a}b) + (a - b)(1 - a\overline{b})}{(1 + |a|^2)(a\overline{b} + \overline{a}b) - 2|a|^2(1 + |b|^2)}.$$

この交点 a_1 の値を (3) の左辺の z に代入すると 0 になるので、a_1 は直線 $L[a_*, b_*]$ 上の点であることがわかる。b_1 についても同様に直線 $L[a_*, b_*]$ 上の点であることがわかる。 ∎

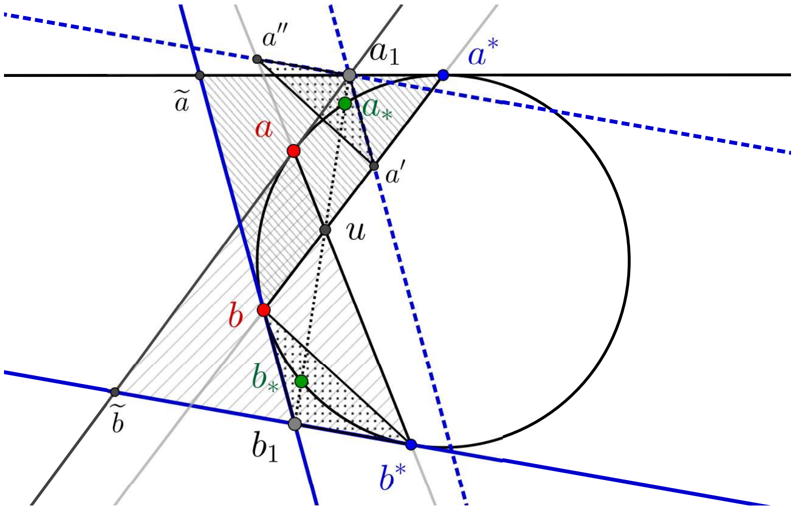

図 5: $\triangle a\tilde{b}b^*$ と $\triangle b\tilde{a}a^*$ は共に、円 C_{ab} への接線から得られる三角形なので、いずれも二等辺三角形になることに注意する。

注意 3
補題 6 の前半は、図形的に示すことが可能である (図 5 参照)。

交点 a_1 を通り、ℓ_b と平行な直線 ℓ' と ℓ_{b^*} と平行な直線 ℓ'' をとる (図 5 の太線が ℓ_b と ℓ_{b^*}、また、太点線が ℓ' と ℓ'' を表す)。また、$a' \in \ell' \cap L[b, a^*]$, $a'' \in \ell'' \cap L[a, b^*]$ とおく。このとき、$\triangle b_1 b^* b$ と $\triangle a_1 a'' a'$ はともに二等辺三角形で互いに相似になることがわかる。

実際、$\triangle a\tilde{b}b^*$ が、円 C_{ab} への接線から得られる二等辺三角形であることから

$$\angle a a'' a_1 = \angle b_1 b^* a = \angle b^* a \tilde{b} = \angle a'' a a_1$$

(最初の等号は $\ell_{b^*} // \ell''$ の錯角、2 番目の等号は $\triangle a\tilde{b}b^*$ が二等辺三角形であること、最後の等号は対頂角から成立する) であり、$\triangle a a_1 a''$ が二等辺三角形であることがわかる。したがって、

$$|a_1 - a''| = |a_1 - a| = |a_1 - a^*| \tag{7}$$

(最初の等号は $\triangle a a_1 a''$ が二等辺三角形であること、2 番目の等号は $\triangle a_1 a a^*$ が、円 C_{ab} への接線から得られる二等辺三角形であることから成立する) であることがわかる。さらに、$\triangle b\tilde{a}a^*$ も円 C_{ab} への接線から得られる二等辺三角形であるので、

$$\angle \tilde{a} b a^* = \angle b a^* \tilde{a} = \angle a_1 a' a^*$$

(最初の等号は $\triangle b\tilde{a}a^*$ が二等辺三角形であることから、2 番目の等号は $\ell_b // \ell'$ の同位角から成立する) であり、$\triangle a_1 a' a^*$ が二等辺三角形であることがわかる。したがって、

$$|a_1 - a^*| = |a_1 - a'|. \tag{8}$$

よって、(7) と (8) から、$|a_1 - a'| = |a_1 - a''|$ であり $\triangle a_1 a'' a'$ は二等辺三角形である。$\triangle b_1 b^* b$ と $\triangle a_1 a'' a'$ は $\ell_{b^*} // \ell''$ と $\ell_b // \ell'$ であることから頂角が等しい二等辺三角形であるので、互いに相似となる。

その相似の中心が u なので、a_1, u, b_1 は同一直線上にあることがわかる。

しかし、a_*, b_* もこの直線上にあることは、この方法では示せない。

補題 7
$L[a,b],\ L[a_*,b_*],\ L[a^*,b^*]$ は 1 点で交わる。

注意 4
実際この交点から 2 点 a,b を通る双曲直線 $C_{a,b}$ へ接線を引いたとき、その接点の一つ (単位円の内部にある方) が 2 点 a,b の双曲中点であることが知られている (例えば、[1] 参照)。

証明 $L[a,b]$ と $L[a^*,b^*]$ の交点は (2) より、

$$\frac{(\overline{a}b-a\overline{b})(a^*-b^*)-(\overline{a^*}b^*-a^*\overline{b^*})(a-b)}{(\overline{a}-\overline{b})(a^*-b^*)-(a-b)(\overline{a^*}-\overline{b^*})}$$

で与えられるが、$a^*=\dfrac{1}{\overline{a}}, b^*=\dfrac{1}{\overline{b}}$ であることから、

$$\frac{\overline{a}\overline{b}(a-b)+(\overline{a}-\overline{b})}{|a|^2-|b|^2}$$

と書ける。これは (3) をみたすので $L[a_*,b_*]$ 上の点であることがわかる。 ∎

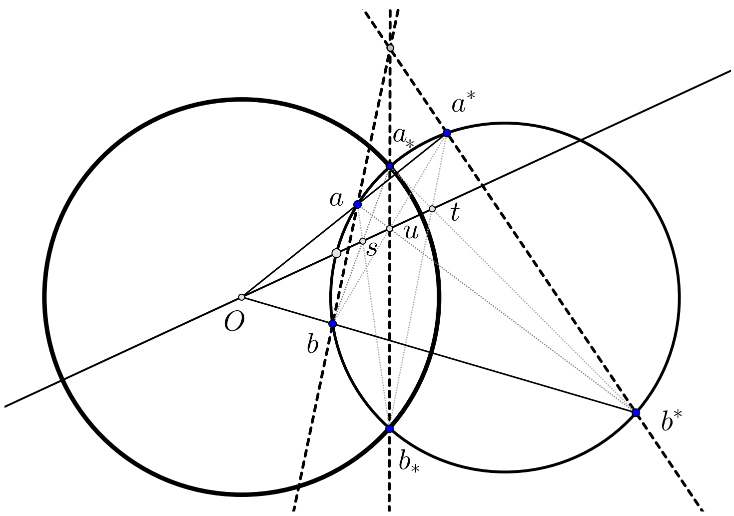

図 6: 補題 7: $L[a,b], L[a_*,b_*], L[a^*,b^*]$ は 1 点で交わる。

これらを利用して、以下では 7 点定理の一部を初等幾何的に示す。

補題 8
3 点 s,u,t は原点を含む同一直線上にある。

証明 s,u,t が同一直線上にあることはパスカルの定理から明らかなので、原点 O と s,t が同一直線上にあることを示す。
三角形 $\triangle ab_*a^*$ と $\triangle ba_*b^*$ を考える。
$L[a,b],\ L[a_*,b_*],\ L[a^*,b^*]$ は 1 点で交わるので、デザルグの定理の逆から 3 点、$O,\ s,\ t$ は同一直線上の点である。図 7 参照。 ∎

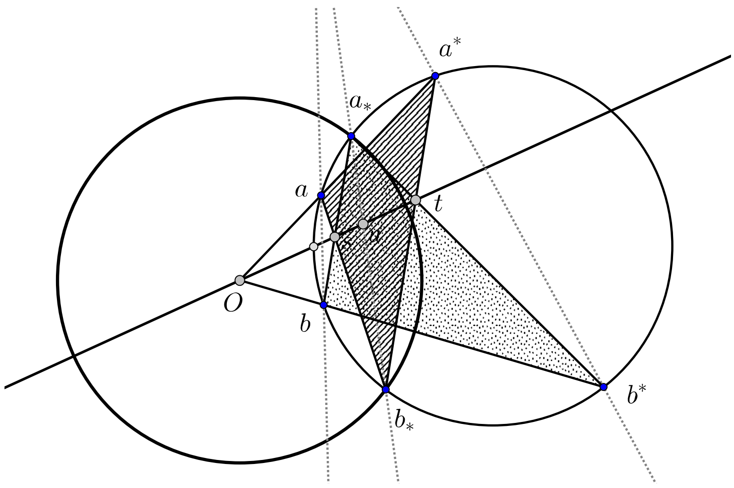

図 7: 3 点 s, u, t は原点を含む同一直線上にある。

補題 9
3 点 k, O, v は同一直線上にある。

証明 三角形 $\triangle aa^*a_*$ と $\triangle bb^*b_*$ を考える。
$L[a,b]$, $L[a_*, b_*]$, $L[a^*, b^*]$ は 1 点で交わるので、デザルグの定理から 3 点、k, O, v は同一直線上の点である。 ∎

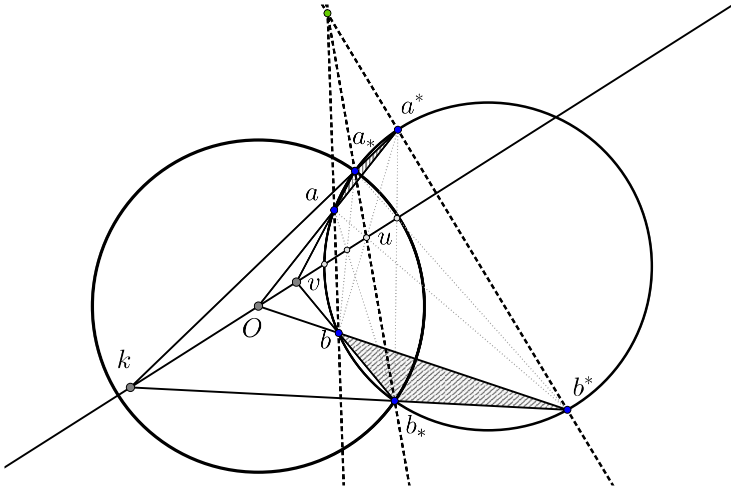

図 8: 3 点 k, O, v は同一直線上にある。

3 点 $p, 0, q$ は同一直線上にあることについても、三角形 $\triangle aa^*a_1$ と $\triangle bb^*b_1$ を考えれば上と同様に示せる。
7 点定理全体を含んだ初等幾何的な証明については、今後の課題とする。

謝　　辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP25K07039 の助成を受けています。

参 考 文 献

[1] 阿原 一志. 作図で身につく双曲幾何学. 共立出版, 2016.

[2] Masayo Fujimura, Oona Rainio, and Matti Vuorinen. Collinearity of points on Poincaré unit disk and Riemann sphere. *Publ. Math. Debrecen*, 105(1-2):141–169, 2024.

[3] Matti Vuorinen and Gendi Wang. Bisection of geodesic segments in hyperbolic geometry. In *Complex analysis and dynamical systems V*, volume 591 of *Contemp. Math.*, pages 273–290. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[4] Gendi Wang, Matti Vuorinen, and Xiaohui Zhang. On cyclic quadrilaterals in euclidean and hyperbolic geometries. *Publ. Math. Debrecen*, 99(1-2):123–140, 2021.