最適化問題における generic な制約写像の 4 パラメータ族に対する古典的制約想定の完全判定

Constraint Qualification for Generic 4-Parameter Families of Constraints in Optimization

関西大学システム理工学部　寺本 央 *1
Hiroshi Teramoto
Faculty of Engineering Science, Kansai University

慶應義塾大学理工学部　早野 健太
Kenta Hayano
Faculty of Science and Technology, Keio University

KLab 株式会社　濱田 直希
Naoki Hamada
KLab Inc.

Abstract

Constraint qualifications (CQs) play a fundamental role in the local analysis of constrained optimization, but their validity becomes subtle when the constraint system is degenerate. This article reviews recent results on the four classical CQs—LICQ, MFCQ, ACQ, and GCQ—for generic 4-parameter families of smooth constraint mappings. Using the invariance of these CQs under $\mathcal{K}[G]$-equivalence and reduction, the problem is reduced to checking finitely many $\mathcal{K}[G]$-normal forms of full reductions that arise generically. We summarize the resulting complete decision tables for the equality-only, inequality-only, and mixed cases. In particular, LICQ holds only in the regular class, MFCQ fails whenever singular equality constraints are present and, in the inequality-only case, is characterized by the normal-form parameter $l_1 > 0$, while ACQ and GCQ are determined by explicit sign and parameter conditions. The classification further shows that GCQ holds on a substantially wider range of generic classes than the stronger qualifications, so the phenomenon that only GCQ survives is not exceptional but appears generically.

1　はじめに

多目的最適化問題

$$\text{Minimize } f = (f_1, \dots, f_p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \quad \text{subject to} \quad g(x) \le 0,\ \ h(x) = 0$$

を考える．ここで $g = (g_1, \dots, g_q) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ は不等号制約，$h = (h_1, \dots, h_r) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ は等号制約を表す写像である．これらの写像の組 (g, h) を本稿では制約写像と呼ぶ．多目的最適化の一般論については [3]

*1 〒 564-8680 大阪府吹田市山手町 3-3-35　E-mail: teramoto@kansai-u.ac.jp

を参照されたい．しかし，本稿で扱う CQ は目的関数ではなく制約写像 (g, h) のみにより決まる局所的性質であるので，議論の本質は単目的最適化にもそのまま適用される．

局所最適解や局所パレート最適解を記述するうえで Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件は中心的役割を果たすが，制約が退化していると局所最適性から KKT 条件は自動的には導けない．そのために導入されるのが制約想定 (constraint qualification; CQ) であり，古典的には

$$\mathrm{LICQ} \Longrightarrow \mathrm{MFCQ} \Longrightarrow \mathrm{ACQ} \Longrightarrow \mathrm{GCQ}$$

という階層が知られている [4, 5, 6]．LICQ や MFCQ はヤコビ行列や方向ベクトルの存在で記述できる一方，ACQ と GCQ は接錐や極錐を通じて定義されるため，直接判定が難しい．

この判定困難性を回避するために，濱田・早野・寺本は制約写像芽に対する群作用 $\mathcal{K}[G]$ と reduction / full reduction を導入し，それらのもとで LICQ, MFCQ, ACQ, GCQ が不変であることを示したうえで，generic な 4 パラメータ族に現れる full reduction の $\mathcal{K}[G]$-正規形ごとに 4 つの CQ の成否を完全決定した [1]．基礎となる正規形分類は [2] による．

ここで注意したいのは，既存の CQ 階層に現れる包含関係が真の包含関係であることを示す例 (MFCQ は成り立つが LICQ は成り立たない，GCQ は成り立つが ACQ は成り立たない，など) の多くは CQ 階層が真の包含関係であること示すには十分でも，それがどの程度 generic かは別問題であるという点である．[1] の眼目は,「GCQ のみ成立する」現象が例外的ではなく，generic な 4 パラメータ族の中に多数現れることを示したところにある．

本稿の構成は次の通りである．第 2 節で 4 つの CQ と基本例を確認し，第 3 節で $\mathcal{K}[G]$-同値と reduction を導入する．第 4 節では generic 性の意味と正規形分類を整理し，第 5 節で CQ 完全判定表を解説する．

2　問題設定と 4 つの制約想定

以後，g, h は C^∞ 級とし，それらが定める実行可能集合を $M(g,h) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \le 0,\ h(x) = 0\}$ とする．CQ は局所的概念であるから，議論点 $x^* \in M(g,h)$ を原点へ平行移動して $x^* = 0$ と仮定してよい．原点で活性な不等号制約の添字集合を $I(0) = \{\, j \in \{1, \ldots, q\} \mid g_j(0) = 0 \,\}$ と書く．また，dg_0, dh_0 はそれぞれ g, h の原点における微分とする．

原点における線形化錐を

$$L^+(g,h) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid dg_{j,0}(d) \le 0\ (j \in I(0)),\ dh_0(d) = 0\}$$

と定める．一方，実行可能集合芽の接錐を

$$C^+(g,h) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists x_\nu \in M(g,h),\ x_\nu \to 0,\ \exists t_\nu \downarrow 0,\ \frac{x_\nu}{t_\nu} \to d \right\}$$

とする．これは標準的な Bouligand 接錐の定義 $(x_\nu - 0)/t_\nu \to d$ と同値である．さらに部分集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ の極錐を

$$X^\circ = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot d \le 0 \text{ for all } d \in X\}$$

と書く．

このとき 4 つの CQ は次で定義される．

LICQ. 活性な不等号制約の勾配 $\nabla g_j(0)$ $(j \in I(0))$ と等号制約の勾配 $\nabla h_k(0)$ $(1 \le k \le r)$ が一次独立である．

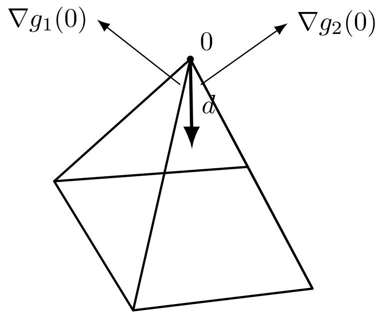

図 1: 実行可能集合 $M(g) = \{x_3 \geq |x_1| + |x_2|\}$ の模式図．頂点 0 では LICQ は成立しないが，錐の内部へ向かう方向 d を選べば MFCQ は成り立つ．

MFCQ. dh_0 のランクが r であり，しかもある $d \in T_0\mathbb{R}^n$ が存在して

$$dg_{j,0}(d) < 0 \ (j \in I(0)), \qquad dh_0(d) = 0$$

を満たす．そのような d を MF-ベクトルと呼ぶ．

ACQ.

$$C^+(g,h) = L^+(g,h).$$

GCQ.

$$C^+(g,h)^\circ = L^+(g,h)^\circ.$$

これらの関係は

$$\text{LICQ} \Longrightarrow \text{MFCQ} \Longrightarrow \text{ACQ} \Longrightarrow \text{GCQ}$$

である [4, 5, 6]．以下の 2 例は，この包含が真の包含であることを説明するための基本例である．

例 1（MFCQ は成り立つが LICQ は成り立たない）．不等号制約のみからなる制約写像

$$g(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 - x_3,\ -x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2 - x_3,\ -x_1 - x_2 - x_3)$$

を考える．このとき

$$M(g) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq |x_1| + |x_2|\}$$

であり，原点は 4 つの面が交わる頂点である（図 1）．原点では 4 本の不等号制約がすべて活性であり，

$$\nabla g_1(0) = (1,1,-1),\ \nabla g_2(0) = (-1,1,-1),\ \nabla g_3(0) = (1,-1,-1),\ \nabla g_4(0) = (-1,-1,-1)$$

は $\mathbb{R}^3$ の 4 本のベクトルだから一次独立ではない．したがって LICQ は成り立たない．しかし

$$d = (0,0,1)$$

とおけば

$$\nabla g_i(0) \cdot d = -1 < 0 \qquad (i = 1,2,3,4)$$

であるから d は MF-ベクトルであり MFCQ は成り立つ．

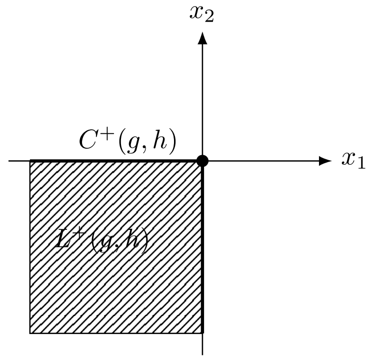

図 2: 太線で接錐 $C^+(g,h)$，斜線領域で線形化錐 $L^+(g,h)$ を表した図．この種の例は CQ 階層の包含関係が真の包含関係であることを示すが，本稿の後半では，このギャップが generic にも現れることを扱う．

例 2（GCQ **は成り立つが** ACQ **は成り立たない**）**.**

$$g(x_1,x_2)=(x_1,x_2),\qquad h(x_1,x_2)=x_1x_2$$

を考える．このとき実行可能集合は

$$M(g,h)=\{(x_1,0)\in\mathbb{R}^2\mid x_1\le 0\}\cup\{(0,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_2\le 0\}$$

であり，原点での接錐は

$$C^+(g,h)=\{(d_1,0)\in\mathbb{R}^2\mid d_1\le 0\}\cup\{(0,d_2)\in\mathbb{R}^2\mid d_2\le 0\}$$

となる．他方，$dh_0=0$ なので線形化錐は

$$L^+(g,h)=\{(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2\mid d_1\le 0,\ d_2\le 0\}$$

である．したがって

$$C^+(g,h)\neq L^+(g,h)$$

であり ACQ は成立しない．しかし極錐をとると

$$C^+(g,h)^\circ=L^+(g,h)^\circ=\mathbb{R}^2_{\ge 0}$$

となるので，GCQ は成り立つ（図 2）．この例は CQ 階層のギャップを理解するには有用だが，この例の原点における制約写像芽の $\mathcal{K}[G]_e$-余次元は無限大となり， generic な例ではない．

3 $\mathcal{K}[G]$-同値と full reduction

3.1 $\mathcal{K}[G]$-同値

まず，簡単な例で $\mathcal{K}[G]$-同値を導入する意義を説明する．$g,h\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を $g(0)=h(0)=0$ を満たす制約関数とし，$a,b,c\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を $a(x)>0,\ c(x)\neq 0$ を満たす関数とする．このとき

$$g'=ag+bh,\qquad h'=ch$$

と定めれば $M(g,h)=M(g',h')$ が成り立つ．すなわち，不等号制約に正の係数を掛けたり，等号制約を等号制約で可逆的に混ぜたり，不等号制約へ等号制約を加えたりしても，実行可能集合芽は変わらない．さらに，$\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を微分同相写像とすれば $M(g\circ\phi, h\circ\phi)=\phi^{-1}(M(g,h))$ であるから，実行可能集合は微分同相 ϕ で保たれる．これらの実行可能集合を保つ変換を，芽 (germ) として局所的に考え，まとめたものが $\mathcal{K}[G]$ 群である．

形式的には，正の対角行列全体を $G_d(q,\mathbb{R})$，置換行列群を P_q とし，$G_{gp}(q,\mathbb{R})=G_d(q,\mathbb{R})\rtimes P_q$ とおく．さらに

$$G=\left\{\begin{pmatrix}\Lambda & B\\ O_{r,q} & A\end{pmatrix}\;\middle|\;\Lambda\in G_{gp}(q,\mathbb{R}),\ B\in M_{q,r}(\mathbb{R}),\ A\in GL(r,\mathbb{R})\right\}$$

とする．制約写像芽 $(g,h),(g',h') : (\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^{q+r},0)$ が $\mathcal{K}[G]$-同値であるとは，ある微分同相芽 $\phi : (\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ と

$$\Lambda : (\mathbb{R}^n,0)\to G_{gp}(q,\mathbb{R}),\qquad B : (\mathbb{R}^n,0)\to M_{q,r}(\mathbb{R}),\qquad A : (\mathbb{R}^n,0)\to GL(r,\mathbb{R})$$

が存在して

$$\begin{pmatrix}g'\circ\phi(x)\\ h'\circ\phi(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda(x) & B(x)\\ O_{r,q} & A(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g(x)\\ h(x)\end{pmatrix}$$

が成り立つことをいう．$\Lambda(x)$ の成分が正であることが不等号の向きを保つことに対応し，置換は活性不等式の並べ替えに対応する．この作用は実行可能集合芽を微分同相で保つ．

3.2 reduction と full reduction

具体的な制約写像には，原点で活性ではない不等号制約や，正則な等号制約が含まれることがある．原点の十分小さい近傍では，活性ではない不等号制約は局所的には冗長であり削除できる．また，正則な等号制約が含まれる場合には，陰関数定理によりそれらが定める部分多様体へ制限することで，問題を低次元の制約写像へ書き直せる．以上の操作，すなわち

1. 不活性な不等号制約成分を削除する，
2. 正則な等号制約が定める部分多様体へ制限する，

を reduction と呼ぶ．とくに，残ったすべての不等号制約が活性であり，残った等号制約の微分の階数が 0 であるような reduction を full reduction と呼ぶ．

このとき次が本稿の出発点である．

定理 1 (不変性定理 [1])
LICQ, MFCQ, ACQ, GCQ はいずれも $\mathcal{K}[G]$-同値で不変であり，さらに *reduction*，とくに *full reduction* によっても保存される．

したがって，CQ の判定は元の制約写像に対して直接行う代わりに，まず full reduction をとり，その $\mathcal{K}[G]$-正規形上で調べればよい．この帰着が，特異点論的分類と最適化理論を結びつける鍵になっている．

4 一般的な 4-パラメータ制約写像族に現れる full reduction の $\mathcal{K}[G]$-正規形

4.1 generic の意味

b-パラメータ族とは，開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ およびパラメータ空間 $A \subset \mathbb{R}^b$ を用いて

$$F = (g, h)\colon U \times A \to \mathbb{R}^{q+r}$$

と与えられる滑らかな族であり，各 $a \in A$ について $F_a = (g_a, h_a)\colon U \to \mathbb{R}^{q+r}$ が一つの制約写像を与えるものをいう．[2] でいう generic とは，このような族全体の空間 $C^\infty(U \times A, \mathbb{R}^{q+r})$ に Whitney の C^∞ 位相を入れたとき，所望の性質をもつ族が残差集合をなすことを意味する．

[2] の主結果によれば，$b \leq 4$ で n が十分大きいとき，generic な制約写像族では，任意の実行可能点での full reduction の芽が有限個の $\mathcal{K}[G]$-正規形のいずれかに属する．その分類は

1. 等号制約のみの場合，
2. 不等号制約のみの場合，
3. 等号制約と不等号制約の混合の場合，

の 3 つに分かれ，等号のみでは 2 型，不等号のみでは 10 型，混合型では 8 型が現れる [2, Tables 1–3].

4.2 正規形分類の概略

以下，$\varepsilon_j \in \{1, -1\}$ とする．講究録の本文では CQ 判定に必要な最小限の情報にしぼって正規形を記す．完全な型のリストと正規化条件は [2, Tables 1–3] を参照されたい．

場合	一般的な full reduction の形
等号制約のみ	活性な不等号制約が存在しない場合，h は 2 種類の型に分類される： $$h = x_1^k + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j x_j^2 \quad (2 \leq k \leq 5)$$ または $$h = x_1^3 + \varepsilon_2 x_1 x_2^2 + x_3^2 + \sum_{j=4}^{n} \varepsilon_j x_j^2.$$ これらが後の表の型 $(1, k)$，(2) に対応する．
不等号制約のみ	$\mathrm{corank}(dh_0) = 0$，すなわち等号制約が正則な場合である．full reduction は沈めこみ（正則クラス）あるいは 10 種類の型 $(1, k), (2), \ldots, (10)$ に分類される．その 1-jet は $$g = (x_1, \ldots, x_{q-1}, \sum_{j=1}^{l_1} x_j - \sum_{j=l_1+1}^{l} x_j + \widetilde{g})$$ という標準形にでき，l_1 が MFCQ の成否を支配する．型 (6), (9), (10) には $\delta_i, \alpha, \alpha_{ij}, \varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}$ などのモジュライが現れる．
等号制約と不等号制約の混合	$\mathrm{corank}(dh_0) = 1$ の場合であり，full reduction は $$(g, h) = (x_1, \ldots, x_q, h)$$ の形で，h が 8 種類の型 $(1, k), (2), \ldots, (8)$ に分類される．一般的には活性な不等号制約の本数は高々3 本である．

4.3 表に現れる記号の読み方

後の判定表には，単なる符号 ε_j 以外にも $\delta_i, \alpha, \alpha_{ij}, \varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}$ などの記号が現れる．これらはすべて [2, Tables 2–3] の該当正規形に付随する係数であり，$\mathcal{K}[G]$-正規化のあとで読み取る量である．本文中で必要になる意味をまとめると次の通りである．

記号	意味
l_1	不等号のみの型の 1-jet において，最後の活性不等号の線形部分に現れる “正符号の変数の本数”．$l_1 > 0$ かどうかが MFCQ の成否を決める．
$\varepsilon_j, \varepsilon'_{q-1}$	対角化された二次項の符号．± 1 のみをとる．
δ_i	型 (6), (10) などに現れる distinguished quadratic terms の符号．± 1 のみをとる．
α, α_{ij}	型 (6), (10) に現れる連続モジュライ．二次・三次の混合項の係数として正規形に残る実数であり，判定表ではそれらに対する不等式条件の形で CQ の成否が表される．
$\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}$	型 (9) の lowest odd-order terms の符号パラメータ．± 1 のみをとる．

本稿の新規性は分類そのものではなく，この有限リストに現れる各型ごとに 4 つの CQ の成否を完全判定した点にある [1, Theorem 4.2]．すなわち，full reduction の正規形と付随パラメータが分かれば，どの CQ が成り立つかを表から直ちに読み取れる．

5 主結果：一般的な制約写像族に対する CQ の完全判定

この節の表は [1, Theorem 4.2, Tables 4–6] を講究録向けに再整理したものである．全体像を一文で述べると次のようになる．

主結果. 正則クラスのみが LICQ を満たす．MFCQ は特異な等号制約が存在すると成り立たず，そうではない場合には正規形のパラメータ l_1 によって成否が決まる．ACQ と GCQ の成否は各正規形に対して符号条件・パラメータ条件で完全に決まり，とくに GCQ は LICQ, MFCQ, ACQ よりはるかに広い範囲で成立する．

5.1 LICQ と MFCQ

LICQ についてはきわめて明快である．活性な不等号制約および等号制約の勾配がすべて一次独立であることは，full reduction が 正則クラス に属することと同値であるため，LICQ を満たすのは正則クラスに限られる．

MFCQ については，不等号制約のみのクラスで 1-jet が

$$g = (x_1, \ldots, x_{q-1}, \sum_{j=1}^{l_1} x_j - \sum_{j=l_1+1}^{l} x_j + \widetilde{g})$$

に直されたとき，

$$\text{MFCQ holds} \iff l_1 > 0$$

が成り立つ．一方，特異な等号制約を含むクラス（等号制約のみの場合と混合型の場合）では dh_0 のランクが r 未満なため，MFCQ は定義により成り立たない．

5.2 等号制約のみの場合：GCQ の成立条件

正則な場合を除く等号制約のみのクラスでは，full reduction のあと $dh_0 = 0$ であるから，線形化の段階では等号制約が消えてしまい，$L^+(g,h)$ はしばしば実際の実行可能集合より大きくなる．このため ACQ は不成立である．それでも極錐レベルでは GCQ が回復する場合があり，成立条件は表 1 の通りである．

型	GCQ が成り立つ条件
$(1,k)$	($k = 2$ かつ $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ のどれかが -1)，または ($k \geq 3$ かつ $\{\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\} = \{1, -1\}$)
(2)	$\varepsilon_4, \dots, \varepsilon_n$ のどれかが -1

表 1: 等号制約のみのクラスに対する GCQ の成立条件．この場合 ACQ は不成立である．出典は [1, Table 4]．

5.3 不等号制約のみの場合：ACQ と GCQ

不等号制約のみの場合，$l_1 > 0$ なら MFCQ が成り立ち，したがって ACQ, GCQ も成立する．興味深いのは境界的な場合 $l_1 = 0$ であり，このときのみ ACQ と GCQ の差が現れる．表 2 にその要約を示す．

ここで (†) は type (10) に対する特別条件であり，

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -1, \qquad \varepsilon_q = \cdots = \varepsilon_n = -1$$

に加え，相異なる $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ が存在して

$$(\alpha_{ij} \leq 0 \wedge \alpha_{ik} \leq 0 \wedge \alpha_{jk} < 2)$$

または

$$0 < \alpha_{ij}, \alpha_{ik} < 2, \quad \alpha_{jk} + \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ik}}{2} < 2\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_{ij}^2}{4}\right)\left(1 - \frac{\alpha_{ik}^2}{4}\right)}$$

を満たすことである．

この表から見える重要な現象は，ACQ が成立しない型でも GCQ が成立する例が数多く存在することである．すなわち，GCQ とそれより強い CQ の間のギャップは例外的現象ではなく，generic な不等号制約の中でも系統的に現れる．

5.4 混合型の場合：GCQ の成立条件

等号制約と不等号制約の混合型では，full reduction のあとで特異な等号制約を含むため MFCQ は不成立である．さらに ACQ も不成立である．それでも GCQ が多くの型で成立し，成立条件は表 3 に要約される．

6 おわりに

本稿では，制約写像に対する 4 つの古典的 CQ を対象に，$\mathcal{K}[G]$-同値と full reduction による不変性，generic な 4 パラメータ族に現れる正規形分類，および各型に対する LICQ, MFCQ, ACQ, GCQ の完全判定を整理した．

結論を簡潔に言えば，

型	ACQ が成り立つ条件	GCQ が成り立つ条件
$(1,k)$	$\varepsilon_q=\cdots=\varepsilon_n=-1$，または $k\geq 3$ かつ $\varepsilon_{q+1}=\cdots=\varepsilon_n=-1$	$k=2$ かつ $(\varepsilon_q,\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$，または $(\varepsilon_{q+1},\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$
(2)	$\varepsilon_{q+2}=\cdots=\varepsilon_n=-1$	$(\varepsilon_{q+2},\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$
$(3,k)$	$\varepsilon_{q-1}=\cdots=\varepsilon_n=-1$，または $k\geq 3$ かつ $\varepsilon_q=\cdots=\varepsilon_n=-1$	$(\varepsilon_q,\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$
$(4,k)$	不成立	$(\varepsilon_{q+1},\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$ または $\varepsilon_q=(-1)^{k+1}$
(5)	$\varepsilon_{q-1}=\varepsilon_{q+1}=\cdots=\varepsilon_n=-1$	$(\varepsilon_{q+1},\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$
(6)	$\delta_1=\delta_2=-1,\ \alpha<2,\ \varepsilon_q=\cdots=\varepsilon_n=-1$	$(\varepsilon_q,\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$
(7)	$\varepsilon_{q-2}=\varepsilon_q=\cdots=\varepsilon_n=-1$	$(\varepsilon_q,\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$
(8)	$\varepsilon_{q-1}=\varepsilon'_{q-1}=\varepsilon_q=\cdots=\varepsilon_n=-1$	$(\varepsilon_q,\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$
(9)	不成立	$(\varepsilon_{q+1},\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$ または $\varepsilon_{01}=1$ または $\varepsilon_{02}=1$
(10)	$(\dagger)$	$(\varepsilon_q,\ldots,\varepsilon_n)\neq(1,\ldots,1)$

表 2: 不等号制約のみのクラスに対する ACQ/GCQ の成立条件（$l_1=0$ の場合）．$l_1>0$ なら MFCQ, ACQ, GCQ はすべて成立する．出典は [1, Table 5].

型	GCQ が成り立つ条件
$(1,k)$	$\{\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\}=\{1,-1\}$
(2)	$\{\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_n\}=\{1,-1\}$
$(3,k)$	k が偶数で $\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_n$ のどれかが -1，または k が奇数で $\varepsilon_1=1$，あるいは $\{\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_n\}=\{1,-1\}$
(4)	$\{\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_n\}=\{1,-1\}$
(5)	$\{\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_n\}=\{1,-1\}$
(6)	$\{\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_n\}=\{1,-1\}$
(7)	$\{\varepsilon_4,\ldots,\varepsilon_n\}=\{1,-1\}$
(8)	$\{\varepsilon_4,\ldots,\varepsilon_n\}=\{1,-1\}$

表 3: 等号制約と不等号制約の混合型に対する GCQ の成立条件．この場合 ACQ は不成立である．出典は [1, Table 6].

1. LICQ は正則クラスでしか成立しない,
2. MFCQ は特異な等号制約の存在で不成立，不等号制約のみの場合には $l_1 > 0$ と同値である,
3. GCQ は他の 3 つより広い範囲で成立し，generic な制約写像においても「GCQ のみ成立」が多数現れる,

という 3 点に集約される．

今後の課題としては,

1. $\mathcal{K}[G]$-正規形認識問題を解くこと,
2. $\mathcal{K}[G]$-正規形認識アルゴリズムの構築,

が挙げられる．特異点論的分類にもとづく CQ 認識が具体的なアルゴリズムとして整備されれば，これまで理論的に扱いにくかった弱い制約想定 ACQ, GCQ を最適化ソフトウェアやベンチマーク設計の中でより実用的に扱えるようになるだろう．

謝　辞

本研究は JSPS 科研費 24H00685，23K03123 の助成を受けたものです．

参 考 文 献

[1] N. Hamada, K. Hayano and H. Teramoto, *Constraint Qualification for Generic Parameter Families of Constraints in Optimization*, arXiv:2510.02381, 2025.

[2] N. Hamada, K. Hayano and H. Teramoto, Characterization of generic parameter families of constraint mappings in optimization, *Journal of Singularities*, 28 (2025), 104–147, doi:10.5427/jsing.2025.28e.

[3] K. Miettinen, *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[4] J. Abadie, On the Kuhn–Tucker theorem, in *Nonlinear Programming*, J. Abadie (ed.), North-Holland, Amsterdam, 1967.

[5] O. L. Mangasarian and S. Fromovitz, The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 17 (1967), 37–47, doi:10.1016/0022-247X(67)90163-1.

[6] M. Guignard, Generalized Kuhn–Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space, *SIAM Journal on Control*, 7 (1969), 232–241, doi:10.1137/0307016.