

一般化された Hurwitz–Radon 数の幾何学的な意味付け *

広島大学大学院先進理工系科学研究科 宮地 宗人

Muneto Miyaji

Graduate School of Advanced Science and Engineering,
Hiroshima University

概要

Hurwitz–Radon 数は二次形式の合成問題に起源を持ち、球面上の各点で一次独立なベクトル場の最大本数と関係している。Kannaka–Tojo [arXiv:2602.04544] は、実簡約リー代数 $\mathfrak{g}$ とその忠実表現 ι に対して、二つの自然数 $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$, $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ を導入し、Hurwitz–Radon 数を再定式化した。古典型リー代数とその標準表現に対しては、一部の例外を除き両者は一致する。

本稿では、リー群 G と部分空間 $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ を固定し、 G -多様体 (M, σ) とそのアフィン接続 ∇ に対して非負整数 $\rho_{G, \mathfrak{s}}(M, \sigma)$ および $\rho_{G, \mathfrak{s}}^{\pm}(M, \sigma, \nabla)$ を定義する。これらは M 上の基本ベクトル場の枠組みで定義される。特別な場合には $\rho_{G, \mathfrak{s}}(M, \sigma)$ は $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ に一致し、 $\rho_{G, \mathfrak{s}}^{-}(M, \sigma, \nabla)$ は $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ に一致することを紹介する。さらに、 $\rho_{G, \mathfrak{s}}^{+}(M, \sigma, \nabla)$ が Clifford 構造と関係することを紹介する。

1 導入

Hurwitz–Radon 数は Hurwitz [3] および Radon [7] による二次形式の合成問題に起源を持つ古典的な不変量である。

正の整数 N を

$$N = 2^{4a+b}(2c+1) \quad (a, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 0 \leq b \leq 3)$$

と分解するとき、Hurwitz–Radon 数 $\rho(N)$ は

$$\rho(N) = 8a + 2^b.$$

によって定義される。

Adams [1] は $\rho(N) - 1$ が球面 S^{N-1} 上の各点で一次独立なベクトル場の最大本数と一致することを示すことにより、Hurwitz–Radon 数を幾何学的に特徴づけた。さらに、行列の線形族の可逆性問題 [2], Kobayashi–Yoshino [5] による Clifford–Klein 形の研究など、多様な場面で現れることが知られている。

* 本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2132 の支援を受けたものです。
E-mail: miyajimuneto@hiroshima-u.ac.jp

Hurwitz–Radon 数は自然数に対して代数的に定義される数であるが、近年、甘中–東條 [4] により実簡約リー代数とその表現の枠組みにおいて一般化された。

$(\mathfrak{g}, \iota)$ を実簡約リー代数 $\mathfrak{g}$ と忠実表現 $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ の組とする。さらに、 $\iota(\mathfrak{g})$ がある正定値エルミート形式に関して自己共役である、すなわち、ある正定値エルミート形式 $\langle, \rangle$ に関して随伴をとる操作で閉じていると仮定する。このとき、 $\mathfrak{g}$ の自己同型 θ であって

$$\langle \iota(X)v, w \rangle = -\langle v, \iota(\theta(X))w \rangle \quad (X \in \mathfrak{g}, v, w \in \mathbb{C}^N).$$

を満たすものが存在する。 θ に関する固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とかく。すなわち、 $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{p}$) は固有値 1 (resp. -1) に対する固有空間である。 $\mathfrak{g}$ が半単純であれば、 $\mathfrak{g}$ の任意の忠実表現 ι はこの仮定を満たし、 θ は $\mathfrak{g}$ のカルタン対合になる。

定義 1.1 (甘中–東條 [4]). 上記の設定のもとで、2 つの整数 $\rho^{(i)}(\mathfrak{g}, \iota)$ ($i = 1, 2$) を次のような $\mathbb{R}$ -線型写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{p}$ が存在するような最大の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ として定める。

- $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$: 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $\iota(f(v))^2 = \|v\|^2 I_N$ である,
- $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$: 任意の $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ に対して $\iota(f(v))$ は可逆である。

明らかに

$$\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota) \leq \rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$$

が成り立つ。

例えば標準表現 $\iota: \mathfrak{so}(N, N) \rightarrow \mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$ に関して

$$\rho^{(1)}(\mathfrak{so}(N, N), \iota) = \rho^{(2)}(\mathfrak{so}(N, N), \iota) = \rho(N)$$

が成り立つ。したがって、 $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ および $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ は Hurwitz–Radon 数の一般化と言える。

古典型リー代数 $\mathfrak{g}$ とその標準表現 ι に対しては、 $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ および $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の値は甘中–東條により完全に決定されている。

事実 1.2 (甘中–東條 [4, Theorem B]). $\mathfrak{g}$ を古典型リー代数とし、 ι をその標準表現とする。 $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}(2N+1, \mathbb{D})$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, N \geq 1$) の場合、

$$\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota) = \rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$$

が成り立ち、その共通の値は表 1 によって与えられる。さらに例外的な場合 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2N+1, \mathbb{D})$ においては、

$$\rho^{(1)}(\mathfrak{sl}(2N+1, \mathbb{D}), \iota) = 0, \quad \rho^{(2)}(\mathfrak{sl}(2N+1, \mathbb{D}), \iota) = 1$$

が成り立つ。ここで、 $\text{ord}_2(N)$ は N の 2 進付値を表す。また、 $\rho(x)$ に現れる x が正の整数でない場合は $\rho(x) = 0$ と約束する。

さらに、 $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ は、 $\text{Spin}(n, 1)$ が G/H に proper に作用し得る最大の n を与える。

表 1 Values of $\rho^{(i)}(\mathfrak{g}, \iota)$ associated with classical pairs

$\mathfrak{g}$	$\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$	$\mathfrak{g}$	$\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$
$\mathfrak{so}(N, N)$	$\rho(N)$	$\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$	$2 \operatorname{ord}_2(N) + 1$
$\mathfrak{gl}(N, \mathbb{R})$	$\rho(N/2) + 1$	$\mathfrak{su}(N, N)$	$2 \operatorname{ord}_2(N) + 2$
$\mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$	$\rho(N/2) + 2$	$\mathfrak{sl}(2N, \mathbb{R})$	$\rho(N) + 1$
$\mathfrak{sp}(N, \mathbb{C})$	$\rho(N/2) + 3$	$\mathfrak{sl}(2N, \mathbb{C})$	$2 \operatorname{ord}_2(N) + 3$
$\mathfrak{sp}(N, N)$	$\rho(N/2) + 4$	$\mathfrak{sl}(2N, \mathbb{H})$	$\rho(N/2) + 5$
$\mathfrak{gl}(N, \mathbb{H})$	$\rho(N/4) + 5$	$\mathfrak{sl}(1, \mathbb{D})$	0
$\mathfrak{so}^*(2N)$	$\rho(N/8) + 6$	$\mathfrak{su}(p, q; \mathbb{D})$ ($p \neq q$)	0
$\mathfrak{so}(N, \mathbb{C})$	$\rho(N/16) + 7$		

事実 1.3 (甘中–東條 [4, Theorem A, D]). $n \geq 2$ を固定する. G/H を半単純対称空間とし, $\mathfrak{g}$ が単純であるとする. また, G が連結な複素化を持つとする. このとき, G, H が表 2 のどれか 1 つと局所的に同型であり ι が $\mathfrak{g}$ の標準表現ならば, $\operatorname{Spin}(n, 1)$ が G/H に proper に作用することと $n \leq \rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ となることは同値である.

表 2 Where $0 \leq p \leq N/2$

G	H
$SL(2N, \mathbb{R})$	$SO(N+1, N-1)$
$SL(2N, \mathbb{C})$	$SU(N+1, N-1)$
$SL(2N, \mathbb{H})$	$Sp(N+1, N-1)$
$SO^*(4N)$	$U(N+1, N-1)$
$SO(2N, \mathbb{C})$	$SO(N+1, N-1)$
$SO(N, N)$	$SO(p, p+1) \times SO(N-p, N-p-1)$
$SU(N, N)$	$S(U(p, p+1) \times U(N-p, N-p-1))$
$Sp(N, N)$	$Sp(p, p+1) \times Sp(N-p, N-p-1)$
$SO^*(4N)$	$SO^*(4p+2) \times SO^*(4N-4p-2)$
$SO(2N, \mathbb{C})$	$SO(2p+1, \mathbb{C}) \times SO(2N-2p-1, \mathbb{C})$

Hurwitz–Radon 数は球面上のベクトル場によって幾何学的に特徴付けられた. さらに, 甘中–東條は Hurwitz–Radon 数を表現論の枠組みで一般化した. そこで, 次のような問題を考えるのは自然である.

問題. $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$, $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ を, より幾何学的な枠組みで定式化することはできるだろうか.

本稿では, 甘中–東條による一般化された Hurwitz–Radon 数を G -多様体の枠組みで再定式化する.

定義 1.4. G をリー群, M を G -多様体とし, その群作用を σ とする. また, $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ を部分ベクトル

空間とする.

$$\rho_{G,\mathfrak{s}}(M, \sigma) := \max \left\{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \begin{array}{l} M \text{ 上の各点で一次独立な } n \text{ 本の} \\ (G, \mathfrak{s})\text{-基本ベクトル場が存在する} \end{array} \right\}.$$

また, $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ を M のアフィン接続とし,

$$\nabla^M \mathfrak{s} := \{ \nabla X_A \mid A \in \mathfrak{s}, X_A : A \text{ に対応する } M \text{ 上の基本ベクトル場} \}$$

とおく.

定義 1.5. 整数 $\rho_{G,\mathfrak{s}}^\pm(M, \sigma, \nabla)$ を次のような $\mathbb{R}$ -代数準同型写像 $f : Cl_n^\pm \rightarrow \text{End}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M))$ が存在するような最大の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ として定める.

- 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $f(e_i) \in \nabla^M \mathfrak{s}$.

ここで, $Cl_n^+ := Cl_n$, $Cl_n^- := Cl_{0,n}$.

本稿では, 以下の定理を紹介する.

定理 1.6. G を実簡約線形リー群, $\varphi : G \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ をリー群準同型とし, $\iota := (d\varphi)_e$ は単射であるとする. また, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を ι から定まる固有空間分解とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$\rho_{G,\mathfrak{p}}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}, \varphi) = \rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota).$$

さらに, ∇ を $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ 上の標準平坦アフィン接続とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$\rho_{G,\mathfrak{p}}^-(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}, \varphi, \nabla) = \rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota).$$

したがって, $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$, $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ はそれぞれ, $\rho_{G,\mathfrak{s}}^-(M, \sigma, \nabla)$, $\rho_{G,\mathfrak{s}}(M, \sigma)$ の特別な場合である. ささやかな応用として以下のようなことが分かる.

定理 1.7. $N \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{so}(N, N) = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をカルタン分解とし, $\varphi : SO(N, N) \rightarrow GL(2N, \mathbb{R})$ をリー群の標準表現とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \rho(N) &= \max \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \begin{array}{l} \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ 上の各点で一次独立な } n \text{ 本の} \\ (O(N), \mathfrak{o}(N))\text{-基本ベクトル場が存在する} \end{array} \right\} + 1 \\ &= \max \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \begin{array}{l} \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\} \text{ 上の各点で一次独立な } n \text{ 本の} \\ (SO(N, N), \mathfrak{p})\text{-基本ベクトル場が存在する} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

最後に, 次の定理を紹介する.

M を G -多様体とし, σ をその群作用とする. また, ∇ を M 上のアフィン接続とする.

定理 1.8. g を M 上の G -不変なリーマン計量とし, ∇ を g に関する Levi-Civita 接続とする. このとき, 以下は同値.

- (1) $n \leq \rho_{G,\mathfrak{s}}^+(M, \sigma, \nabla)$.
- (2) ある階数 n のクリフォード構造 (E, h, φ) が存在して以下を満たす.

- E は自明束である.
- ある h -正規直交フレーム $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ が存在して, 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $\varphi \circ s_i \in \nabla^M \mathfrak{s}$ が成り立つ.

2 リーマン多様体上のクリフォード構造

本章では, Moroianu–Semmelmann [6] に従ってリーマン多様体上のクリフォード構造について復習する.

(M, g) をリーマン多様体とする.

定義 2.1. $A \in \text{End}(TM)$ が歪対称であるとは, $\forall p \in M, \forall v, w \in T_p M$ に対して,

$$g_p(Av, w) = -g_p(v, Aw)$$

が成り立つことを言う. TM の歪対称自己準同型全体の集合を $\text{End}^-(TM)$ とかく.

定義 2.2. (E, h) を M 上のユークリッドベクトル束とする. このとき,

$$Cl(E, h) := \bigsqcup_{x \in M} Cl(E_x, h_x)$$

をクリフォード代数束と呼ぶ.

定義 2.3. (M, g) 上の階数 r のクリフォード構造とは, M 上の向き付けられた階数 r のユークリッドベクトル束 (E, h) と, クリフォード写像と呼ばれるゼロ写像でない代数束準同型 $\varphi : Cl(E, h) \rightarrow \text{End}(TM)$ の組であって, $\varphi(E) \subset \text{End}^-(TM)$ を満たすものをいう.

3 G -多様体に対する Hurwitz–Radon 数

本章では, G -多様体に対して $\rho_{G, \mathfrak{s}}(M, \sigma)$ を定義し, $\rho_{G, \mathfrak{s}}(M, \sigma)$ が甘中–東條によって定義された $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の拡張となることを示す. これにより, $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ に幾何学的な意味付けが与えられる.

3.1 $\rho_{G, \mathfrak{s}}(M, \sigma)$ の定義と性質

G をリー群, M を G -多様体, σ をその群作用とする. また, $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ を部分ベクトル空間とする.

定義 3.1. $A \in \mathfrak{g}$ に対して, ベクトル場 $X_A \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$X_A : M \rightarrow TM, \quad p \mapsto (d\sigma_p)_e(A)$$

で定義し, A に対応する基本ベクトル場と呼ぶ. ここで, $\sigma_p : G \rightarrow M, g \mapsto \sigma(g, p)$ である. 特に, $A \in \mathfrak{s}$ のときは, X_A を $(G, \mathfrak{s})$ -基本ベクトル場と呼ぶ.

G -多様体に対して次の整数を定義する.

定義 3.2.

$$\rho_{G,\mathfrak{s}}(M, \sigma) := \max \left\{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \begin{array}{l} M \text{ 上の各点で一次独立な } n \text{ 本の} \\ (G, \mathfrak{s})\text{-基本ベクトル場が存在する} \end{array} \right\}.$$

まず, いくつかの例を紹介する.

例 3.3. $N \geq 2$ とし, $\varphi : SL(N, \mathbb{R}) \rightarrow GL(N, \mathbb{R})$ を標準表現とする. このとき,

$$\rho_{SL(N, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(N, \mathbb{R})}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \varphi) = \rho(N)$$

が成り立つ. また, $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をカルタン分解とする. このとき,

$$\rho_{SL(N, \mathbb{R}), \mathfrak{p}}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \varphi) = \rho\left(\frac{N}{2}\right) + 1$$

が成り立つ. ここで, N が奇数のときは $\rho(N/2) = 0$ とする.

例 3.4. $N \geq 2$ とし, $\varphi : SL(N, \mathbb{R}) \rightarrow GL(N, \mathbb{R})$ を標準表現とする. このとき,

$$\rho_{SL(N, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(N, \mathbb{R})}(\mathbb{RP}^{N-1}, \varphi) = \rho(N) - 1$$

が成り立つ. また,

$$\rho_{SL(N, \mathbb{R}), \mathfrak{p}}(\mathbb{RP}^{N-1}, \varphi) = 0$$

が成り立つ.

例 3.5. $N \geq 2$ とし,

$$G := SO_0(N, 1), \quad M := S^{N-1} \times S^1 = S^{N-1} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

とおく. このとき,

$$\sigma : G \times M \rightarrow M, \left(\begin{pmatrix} A & b \\ c^T & d \end{pmatrix}, (u, [t]) \right) \mapsto \left(\frac{Au + b}{c^T u + d}, [t + \log(c^T u + d)] \right)$$

は推移的群作用である. このとき,

$$\rho_{SO_0(N, 1), \mathfrak{so}(N, 1)}(S^{N-1} \times S^1, \sigma) = N.$$

次に, $\rho_{G,\mathfrak{s}}$ の関手性について紹介する.

定義 3.6. 圏 $G\text{-Mfd}$ を次で定義する.

- 対象 (M, σ) は滑らかな多様体 M とその滑らかな群作用 $\sigma : G \times M \rightarrow M$ の組.
- 射 $\varphi : (M, \sigma) \rightarrow (N, \tau)$ は滑らかな写像 $\varphi : M \rightarrow N$ であって次を満たすもの:
 1. φ は全射,
 2. φ は G -同変,
 3. M の各 G -軌道上ではめ込み.

命題 3.7. $\rho_{G,\mathfrak{s}}$ は $G\text{-Mfd}$ から半順序集合 $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \leq)$ への関手である.

命題 3.8. $\eta : GL(N, \mathbb{C}) \rightarrow GL(2N, \mathbb{R}), A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ とし, $\varphi : G \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ をリー群準同型とする. このとき,

$$\rho_{G,\mathfrak{s}}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}, \varphi) = \rho_{G,\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}, \eta \circ \varphi).$$

3.2 $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の幾何学的意味付け

ここでは, $\rho_{G,\mathfrak{s}}(M, \sigma)$ と $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の関係について紹介する.

G をリー群, $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ を部分ベクトル空間, $\varphi : G \rightarrow GL(N, \mathbb{R})$ をリー群準同型とし, $\iota := (d\varphi)_e$ とおく.

定義 3.9. 上記の設定のもとで, 2 つの整数 $\rho_{\mathfrak{s}}^{(i)}(\mathfrak{g}, \iota)$ ($i = 1, 2$) を次のような $\mathbb{R}$ -線型写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{s}$ が存在するような最大の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ として定める.

- $\rho_{\mathfrak{s}}^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$: 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $\iota(f(v))^2 = \|v\|^2 I_N$ である,
- $\rho_{\mathfrak{s}}^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$: 任意の $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ に対して $\iota(f(v))$ は可逆である.

特に, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ をカルタン分解とし, $\mathfrak{s} = \mathfrak{p}$ とすると,

$$\rho_{\mathfrak{s}}^{(i)}(\mathfrak{g}, \iota) = \rho^{(i)}(\mathfrak{g}, \iota).$$

主結果の一つとして次を得る.

定理 3.10. 以下が成り立つ.

$$\rho_{G,\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \varphi) = \rho_{\mathfrak{s}}^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota).$$

系 3.11. $\mathfrak{g}$ を実簡約リー代数, $\iota : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ をその忠実表現とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ をカルタン分解とする. このとき, ある単連結リー群 G とリー群準同型 $\varphi : G \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ が存在して $\iota = (d\varphi)_e$ である. このとき, 以下が成り立つ.

$$\rho_{G,\mathfrak{p}}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}, \varphi) = \rho_{G,\mathfrak{p}}(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}, \eta \circ \varphi) = \rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota).$$

系 3.12. $n \in \mathbb{N}$ とする. 以下は同値.

- (1) $n \leq \rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$,
- (2) $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ 上に φ に関する n 本の $\mathfrak{p}$ 由来の基本ベクトル場であって, 各点で一次独立なものが存在する.

従って, $\rho^{(2)}(\mathfrak{g}, \iota)$ は各点で一次独立な基本ベクトル場の枠組みで意味づけられる.

4 G -多様体とそのアフィン接続に対する Hurwitz–Radon 数

本章では, G -多様体とそのアフィン接続に対して, $\rho_{G,\mathfrak{s}}^{\pm}(M, \sigma, \nabla)$ を定義し, $\rho_{G,\mathfrak{s}}^{-}(M, \sigma, \nabla)$ が $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の拡張となることを示す. これにより, $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ に幾何学的な意味付けが与えられる. さらに, $\rho_{G,\mathfrak{s}}^{\pm}(M, \sigma, \nabla)$ とクリフォード構造の関係を示す.

4.1 $\rho_{G,\mathfrak{s}}(M, \sigma, \nabla)$ の定義と性質

G をリー群, $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ を部分ベクトル空間, M を G -多様体とし, その群作用を σ とする. また, $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ を M のアフィン接続とする.

$$\nabla^M \mathfrak{s} := \{\nabla X_A \mid A \in \mathfrak{s}\} \subset \text{End}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M))$$

とおく.

G -多様体とそのアフィン接続に対して, 次の整数を定義する.

定義 4.1. 整数 $\rho_{G,\mathfrak{s}}^{\pm}(M, \sigma, \nabla)$ を次のような $\mathbb{R}$ -代数準同型写像 $f : Cl_n^{\pm} \rightarrow \text{End}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M))$ が存在するような最大の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ として定める.

- 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $f(e_i) \in \nabla^M \mathfrak{s}$.

ここで, $Cl_n^+ := Cl_n$, $Cl_n^- := Cl_{0,n}$.

まず, $\rho_{G,\mathfrak{s}}^{\pm}$ の関手性について紹介する.

定義 4.2. 圏 $G\text{-MfdConn}$ を次で定義する.

- 対象 (M, σ, ∇) を滑らかな多様体 M , その滑らかな群作用 $\sigma : G \times M \rightarrow M$ および M 上のアフィン接続の 3 組とする.
- 射 $\varphi : (M, \sigma, \nabla) \rightarrow (N, \tau, \nabla')$ を滑らかな写像 $\varphi : M \rightarrow N$ であって以下の条件を満たすものとする:
 1. φ ははめ込み,
 2. φ は G -同変,
 3. 任意の $p \in M, v \in T_p M$ および任意の $A \in \mathfrak{s}$ に対して,

$$(d\varphi)_p(\nabla_v X_A) = \nabla'_{(d\varphi)_p(v)} Y_A.$$

ここで, X_A, Y_A はそれぞれ σ, τ に関する A の基本ベクトル場.

命題 4.3. $\rho_{G,\mathfrak{s}}^{\pm}$ は $G\text{-MfdConn}$ から半順序集合 $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \leq)$ への反変関手である.

$$F : \mathbb{C}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}, x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \eta : GL(N, \mathbb{C}) \rightarrow GL(2N, \mathbb{R}), A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

とし, $\varphi : G \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ をリー群準同型とする. また, ∇ を $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ の標準平坦アフィン接続とし,

$$F_* \nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}), (X, Y) \mapsto F_* \left(\nabla_{F_*^{-1}X} (F_*^{-1}Y) \right)$$

とおく. ただし, $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\})$, $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\})$ に対して,

$$\begin{aligned} F_* X : \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\} &\rightarrow T(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}), x \mapsto (dF)_{F^{-1}(x)} (X_{F^{-1}(x)}), \\ F_*^{-1} Y : \mathbb{C}^N \setminus \{0\} &\rightarrow T(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}), z \mapsto (dF^{-1})_{F(z)} (Y_{F(z)}). \end{aligned}$$

$F_* \nabla$ は $\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$ の標準平坦アフィン接続である.

命題 4.4. 以下が成り立つ.

$$\rho_{G, \mathfrak{s}}^{\pm}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}, \varphi, \nabla) = \rho_{G, \mathfrak{s}}^{\pm}(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}, \eta \circ \varphi, F_* \nabla).$$

4.2 $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ の幾何学的意味づけ

G をリー群, $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ を部分ベクトル空間とする. $\varphi : G \rightarrow GL(N, \mathbb{R})$ をリー群準同型とし, $\iota := (d\varphi)_e$ とおく.

以下, $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ のアフィン接続として,

$$\nabla^{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}), \quad \nabla_X^{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \left(\sum_{i=1}^N f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{k=1}^N X(f_k) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

を考え, $\nabla := \nabla^{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}}$ とおく.

主結果の一つとして次を得る.

定理 4.5. 以下が成り立つ.

$$\rho_{G, \mathfrak{s}}^{-}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \varphi, \nabla) = \rho_{\mathfrak{s}}^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota).$$

系 4.6. $(\mathfrak{g}, \iota)$ を, 実簡約リー代数 $\mathfrak{g}$ とその忠実表現 $\iota : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ の組とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ カルタン分解とする. このとき, ある単連結リー群 G とリー群準同型 $\varphi : G \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ が存在して $\iota = (d\varphi)_e$ である. また, ∇ を $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ の標準平坦アフィン接続とし, $F : \mathbb{C}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}, x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$\rho_{G, \mathfrak{p}}^{-}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}, \varphi, \nabla) = \rho_{G, \mathfrak{p}}^{-}(\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}, \eta \circ \varphi, F_* \nabla) = \rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota).$$

系 4.7. $n \in \mathbb{N}$ とする. 以下は同値.

- (1) $n \leq \rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$.
- (2) ある $\mathbb{R}$ -代数準同型 $f : Cl_{0, n} \rightarrow \text{End}_{C^\infty(\mathbb{C}^N \setminus \{0\})}(\mathfrak{X}(\mathbb{C}^N \setminus \{0\}))$ が存在して各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $f(e_i) \in \nabla^{\mathbb{C}^N \setminus \{0\}} \mathfrak{p}$.

以上により, $\rho^{(1)}(\mathfrak{g}, \iota)$ は G -多様体およびそのアフィン接続の枠組みにおいて意味づけられる.

4.3 クリフォード構造との関係

G をリー群, $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ を部分空間, (M, g) をリーマン G -多様体, σ を群作用, $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ を M 上のアフィン接続とする. また, ∇ の値域を $\Gamma(\text{End}(TM))$ とみなしたものを, $\tilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(\text{End}(TM))$ と書くことにする.

$\rho_{G,\mathfrak{s}}^+(M, \sigma, \nabla)$ をクリフォード構造と関連づけるため, 次の整数を導入する.

定義 4.8. 整数 $\rho_{G,\mathfrak{s}}^\pm(M, g, \sigma, \tilde{\nabla})$ を次のような $\mathbb{R}$ -代数準同型写像 $f : Cl_n^\pm \rightarrow \Gamma(\text{End}(TM))$ が存在するような最大の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ として定める.

- 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $f(e_i) \in \tilde{\nabla}^M \mathfrak{s} \cap \Gamma(\text{End}^-(TM))$.

ここで, $Cl_n^+ := Cl_n$, $Cl_n^- := Cl_{0,n}$.

明らかに

$$\rho_{G,\mathfrak{s}}^\pm(M, g, \sigma, \tilde{\nabla}) \leq \rho_{G,\mathfrak{s}}^\pm(M, \sigma, \nabla).$$

が成り立つ.

次の定理は $\rho_{G,\mathfrak{s}}^+(M, g, \sigma, \tilde{\nabla})$ がクリフォード構造と深く関係していることを示している.

定理 4.9. 以下は同値.

- (1) $n \leq \rho_{G,\mathfrak{s}}^+(M, g, \sigma, \tilde{\nabla})$.
- (2) ある階数 n のクリフォード構造 (E, h, φ) が存在して以下を満たす.
 - E は自明束である.
 - ある h -正規直交フレーム $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ が存在して, 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $\varphi \circ s_i \in \tilde{\nabla}^M \mathfrak{s}$.

命題 4.10. σ を等長作用, ∇ を Levi-Civita 接続とする. このとき,

$$\tilde{\nabla}^M \mathfrak{g} \subset \Gamma(\text{End}^-(TM)).$$

系 4.11. σ を等長作用, ∇ を Levi-Civita 接続とする. このとき,

$$\rho_{G,\mathfrak{s}}^+(M, g, \sigma, \tilde{\nabla}) = \rho_{G,\mathfrak{s}}^+(M, \sigma, \nabla).$$

定理 1.8 は次の系から直ちに従う.

系 4.12. σ を等長作用, ∇ を Levi-Civita 接続とする. このとき, 以下は同値.

- (1) $n \leq \rho_{G,\mathfrak{s}}^+(M, \sigma, \nabla)$.
- (2) ある階数 n のクリフォード構造 (E, h, φ) が存在して以下を満たす.
 - E は自明束である.
 - ある h -正規直交フレーム $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ が存在して, 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $\varphi \circ s_i \in \tilde{\nabla}^M \mathfrak{s}$.

謝辞

本稿は、2026 年 6 月に開催された RIMS 共同研究「表現論とその周辺分野の交流」における著者の講演内容に基づいて作成した講究録である．このような貴重な発表の機会を賜りました神奈川大学の小林雅人先生に、心より感謝申し上げます．

本研究を進めるにあたり、御指導いただいた指導教員の奥田隆幸先生に深く感謝申し上げます．また、本研究の着想の契機となる研究成果を示してくださった甘中一輝先生、東條広一先生に深く感謝申し上げます．

参考文献

- [1] John Frank Adams, *Vector fields on spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 39–41. MR 133837
- [2] Yik-hoi Au-yeung, *On matrices whose nontrivial real linear combinations are nonsingular*, Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1971), 17–22. MR 274478
- [3] Adolf Hurwitz, *über die Komposition der quadratischen Formen*, Math. Ann. **88** (1922), no. 1-2, 1–25. MR 1512117
- [4] Kazuki Kannaka and Koichi Tojo, *Hurwitz–Radon numbers and proper actions of semisimple Lie groups*, arXiv e-prints (2026), arXiv:2602.04544.
- [5] Toshiyuki Kobayashi and Taro Yoshino, *Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces—revisited*, Pure Appl. Math. Q. **1** (2005), no. 3, 591–663. MR 2201328
- [6] Andrei Moroianu and Uwe Semmelmann, *Clifford structure on Riemannian manifolds*, Adv. Math. **228** (2011), no. 2, 940–967. MR 2822214
- [7] Johann Radon, *Lineare Scharen orthogonaler Matrizen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **1** (1922), no. 1, 1–14. MR 3069384